يمكنك الحصول على جميع الملفات من أوراق عمل وامتحانات ومذكرات وملخصات لجميع الصفوف وجميع المواد الخاصة بالمنهاج الإماراتي من خلال الرابط التالي

https://www.almanahj.com

كما يمكنك الحصول على جميع الملفات لجميع الفصول عبر تحميل تطبيق المناهج من خلال الرابط التالي:

https://play.google.com/store/apps/details?id=com.almanahj.UAEapplication

يمكنك الحصول على جميع الروابط الخاصة بمجموعات المناهج الإماراتية على مواقع التواصل الاجتماعي واتساب وفيسبوك وتلغرام من خلال الدخول على الرابط التالي:

http://t.me/almanahj

12

عام

مدرسة عبد القادر الجزائري

قسم الرياضيات

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

تحذير هام

هذه الأوراق بمثابة دفتر مساعد للطالب لتوفير الوقت في كتابة السؤال ولكن الحذر كل الحذر من الإكتفاء بها فقط حيث أن كتاب الوزارة هو المرجع الأساسي في كل شئ وعلى الطالب أن يتدرب على حل التمارين الواردة في الكتاب المدرسي الموجودة نهاية كل درس ويناقش المعلم بها

math 2020

الوحدة الثامنة

المتجهات

اسم الطالب / ....

اسم المدرسة / ....

أ/ أحمد عطا

2 حل مسائل المتجهات، وتحليل المتجهات إلى مركباتها المتعامدة.

مقدمة في المتجهات
Introduction to Vectors

1 تمثيل المتجهات واستخدامها هندسيًا.

الكميات القياسية والكميات المتجهة يمكن وصف الكثير من الكميات الفيزيائية مثل الكتلة بقيمة عددية واحدة، وعندئذٍ تُسمى **كمية قياسية (عددية)**، ويدل هذا العدد على مقدار الكمية أو قياسها. أما **الكمية المتجِهة** فهي كمية لها مقدار واتجاه؛ فمثلًا سرعة الكرة المتجهة نحو المرمى جنوبًا تمثل كلًّا من: مقدار سرعة الكرة، واتجاه حركتها.

تحديد الكميات المتجهة

حدّد الكميات المتجهة، والكميات القياسية (العددية) في كلٍّ مما يأتي:

1) يسير قارب بسرعة $15\ mi/h$ في اتجاه الجنوب الغربي.

....

2) يسير شخص على قدميه بسرعة $75\ m/min$ جهة الغرب.

....

3) قطعت سيارة مسافة قدرها $20\,km$.

....

4) تسير سيارة بسرعة $60\ mi/h$ ، وبزاوية $15°$ جهة الجنوب الشرقي.

....

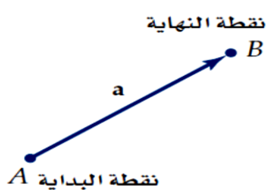
5) هبوط مظلّي رأسيًا إلى أسفل بسرعة $12.5\ mi/h$.

....

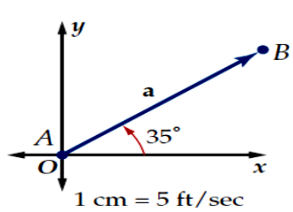
6) طول قطعةٍ مستقيمةٍ $5\,cm$.

....

المتجهات:



يمكن تمثيل الكمية المتجِهة بسهم يُظهر كلًّا من المقدار والاتجاه ويسمى هذا التمثيل **متجهًا**. ويمثّل الشكل المجاور المتجه الذي له **نقطة البداية** A، **ونقطة النهاية** B. ويرمز لهذا المتجه بالرمز $\overrightarrow{AB}$ أو $\vec{a}$ أو $\mathbf{a}$.



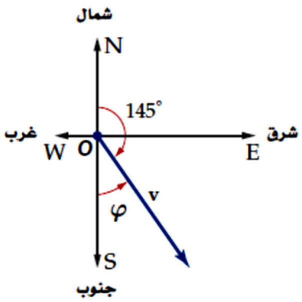
أما **طول المتجه** فهو مقدار المتجه ويمثله طول القطعة المستقيمة، ويتناسب مع مقدار الكمية المتجِهة، ففي الشكل المجاور، إذا كان مقياس الرسم هو $1\ cm = 5\ ft/s$، فإن طول المتجه $\mathbf{a}$ ، ويُرمز له بالرمز $|\mathbf{a}|$ ، يساوي 5×2.6 أو $13\ ft/s$.

يكون المتجه في **الوضع القياسي**. إذا كانت نقطة بداية المتجه هي نقطة الأصل ويعبّر عن **اتجاه المتجه** بالزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الأفقي (الاتجاه الموجب للمحور x).
فمثلًا: اتجاه المتجه $\mathbf{a}$ هو $35°$.

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

ويمكن التعبير عن اتجاه المتجه أيضًا باستعمال زاوية **الاتجاه الربعي** φ ، وتُقرأ فاي، وهي زاوية قياسها بين $0°$ و $90°$ شرق أو غرب الخط الرأسي (خط شمال – جنوب). فمثلًا زاوية الاتجاه الربعي للمتجه **v** في الشكل المجاور هي $35°$ جنوب شرق، وتُكتب $S\ 35°\ E$.

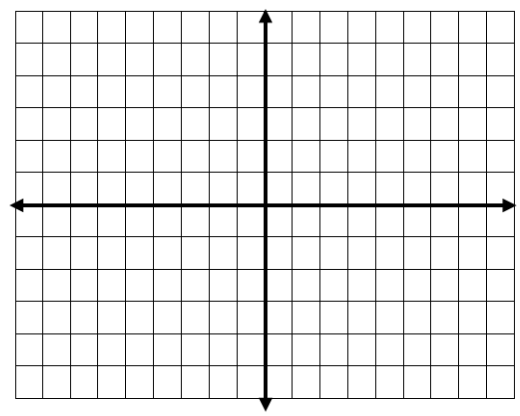
كما يمكن استعمال زاوية **الاتجاه الحقيقي** ، حيث تُقاس الزاوية مع عقارب الساعة بدءًا من الشمال. ويُقاس الاتجاه الحقيقي بثلاثة أرقام، فمثلًا يُكتب الاتجاه الذي يحدّد زاوية قياسها $25°$ من الشمال مع عقارب الساعة باستعمال الاتجاه الحقيقي على الصورة $025°$.



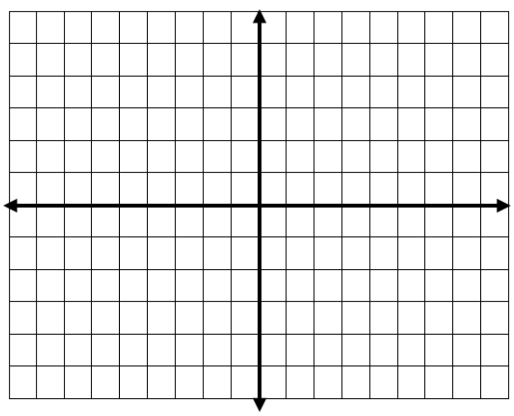
تمثيل المتجه هندسيًا

استعمل مسطرةً ومنقلةً؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية، واكتب مقياس الرسم في كل حالة:

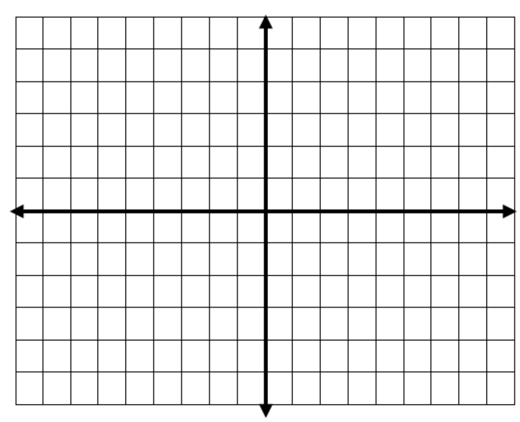
8) $\mathbf{v} = 75\,\mathrm{N}$ ، بزاوية قياسها $140°$ مع الاتجاه الأفقي.



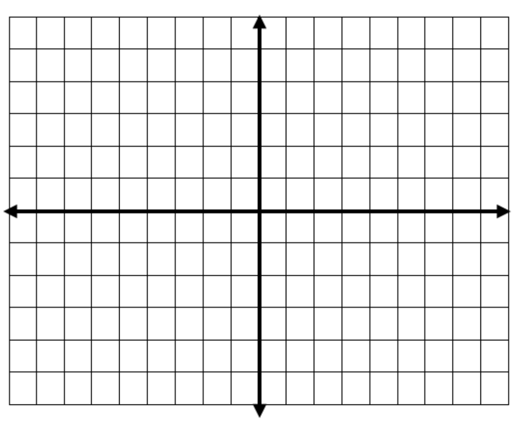
7) $a = 20\ \mathrm{ft/s}$ باتجاه $030°$.



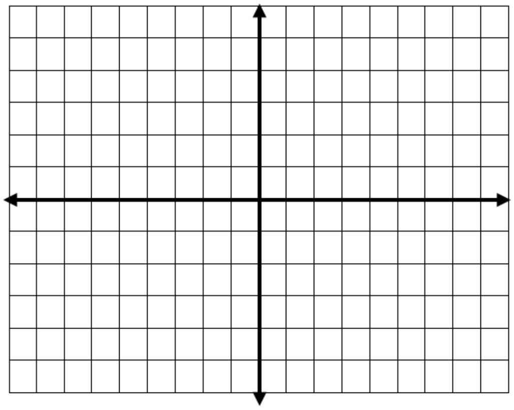
10) $t = 20\ \mathrm{ft/s}$ ، باتجاه $065°$.



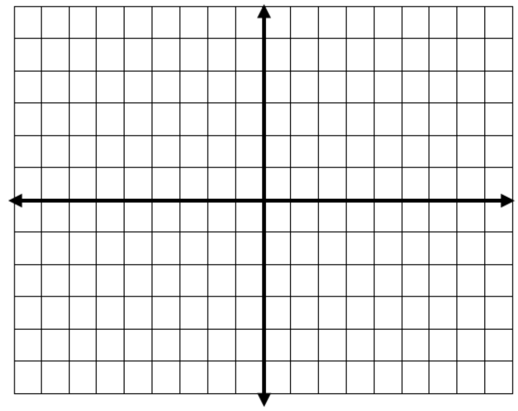
9) $z = 30\ \mathrm{mi/h}$ ، باتجاه $S\ 60°\ W$.



11) $\mathbf{u} = 15\ \text{mi/h}$ ، باتجاه $S\ 25°\ E$.

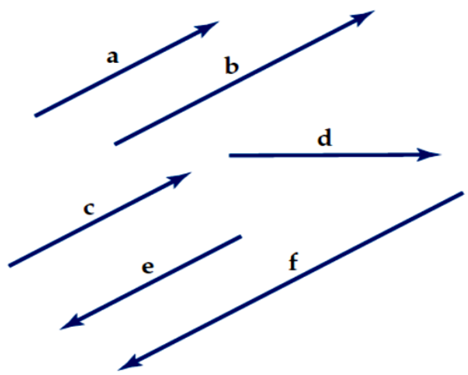


12) $\mathbf{m} = 60\text{N}$ ، بزاوية قياسها $80°$ مع الاتجاه الأفقي.



عند إجرائك العمليات على المتجهات، فإنك تحتاج إلى الأنواع الشائعة الآتية من المتجهات:

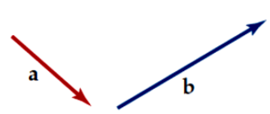
- **المتجهات المتوازية** لها الاتجاه نفسه، أو اتجاهان متعاكسان، وليس بالضرورة أن يكون لها الطول نفسه. فمثلًا في الشكل المجاور $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \parallel \mathbf{c} \parallel \mathbf{e} \parallel \mathbf{f}$.
- **المتجهات المتساوية** لها الاتجاه نفسه، والطول نفسه. ففي الشكل المجاور $\mathbf{a}, \mathbf{c}$ ؛ لهما الطول والاتجاه نفساهما، لذا هما متساويان، ويعبَّر عنه بالرموز: $\mathbf{a} = \mathbf{c}$.
لاحظ أن $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ ؛ لأن $|\mathbf{a}| \neq |\mathbf{b}|$ و $\mathbf{a} \neq \mathbf{d}$ ؛ لأن لهما اتجاهين مختلفين.
- **معكوس المتجه** هو متجه له طول المتجه $\mathbf{a}$ ، ولكنه في اتجاه معاكس له، ويكتب على الصورة $-\mathbf{a}$، ففي الشكل المجاور $\mathbf{e} = -\mathbf{a}$.



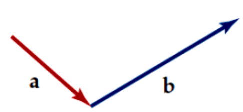
مفهوم أساسي إيجاد المحصلة

قاعدة المثلث

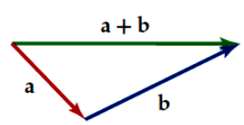
لإيجاد محصِّلة المتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، اتَّبع الخطوتين الآتيتين:



الخطوة 1 أجرِ انسحابًا للمتجه $\mathbf{b}$ ، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة نهاية المتجه $\mathbf{a}$.

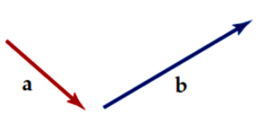


الخطوة 2 محصلة المتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ هي المتجه المرسوم من نقطة بداية $\mathbf{a}$ إلى نقطة نهاية $\mathbf{b}$.

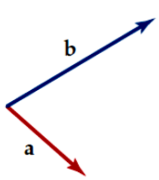


قاعدة متوازي الأضلاع

لإيجاد محصِّلة المتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، اتَّبع الخطوات الآتية :

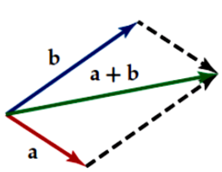


الخطوة 1 أجرِ انسحابًا للمتجه $\mathbf{b}$ ، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية المتجه $\mathbf{a}$.



الخطوة 2 أكمل رسم متوازي الأضلاع الذي ضلعاه $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

الخطوة 3 محصلة المتجهين هي المتجه الذي يُمثِّله قطر متوازي الأضلاع .

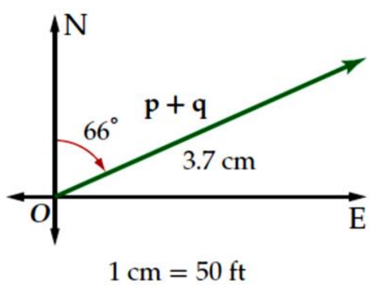


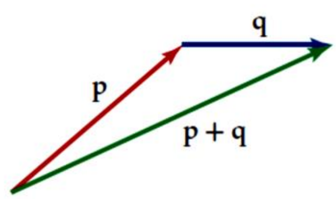
إيجاد محصلة متجهين

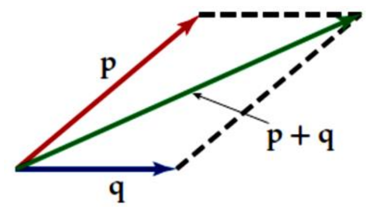
13 **رياضة المشي:** قطع عبد اللّه في سباق للمشي، مسافة $120\ m$ باتجاه $N\ 50°\ E$ ، ثم مسافة $80\ m$ في اتجاه الشرق. كم يبعُد عبد الله عن نقطة البداية، وما هي زاوية الاتجاه الربعي؟

خطوات الحل

الإجابة



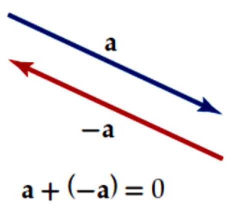




أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية مستعملًا قاعدة المثلث، أو متوازي الأضلاع. ثمّ حدّد اتجاهها بالنسبة للأفقي.

14 **لعبة أطفال:** رمى طفل كرةً صغيرةً في لعبة مخصصة للأطفال بسرعة $7\,\text{in/s}$، باتجاه $310°$، فارتدت باتجاه $055°$، وبسرعة $4\,\text{in/s}$. أوجد مقدار محصلة حركة الكرة والاتجاه الحقيقي لها.
(قرب طول المحصلة إلى أقرب بوصة، والاتجاه إلى أقرب درجة)

عند جمع متجهين متعاكسين لهما الطول نفسه، فإن المحصلة هي **المتجه الصفري**. ويرمز له بالرمز $\vec{0}$ أو $\mathbf{0}$، وطوله صفر، وليس له اتجاه. وعملية طرح المتجهات تشبه عملية طرح الأعداد.
لإيجاد $\mathbf{p}-\mathbf{q}$، اجمع معكوس $\mathbf{q}$ إلى $\mathbf{p}$؛ أي أن: $\mathbf{p}-\mathbf{q}=\mathbf{p}+(-\mathbf{q})$.
و كذلك يمكن ضرب المتجه في عددٍ حقيقيٍّ.



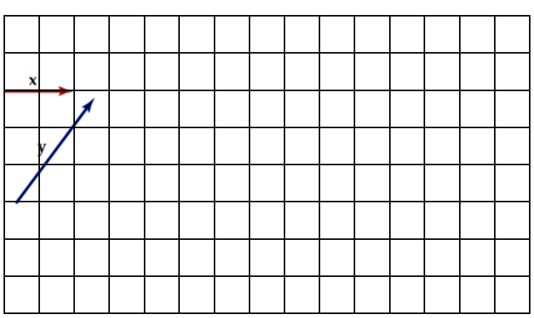
مفهوم أساسي — ضرب المتجه في عدد حقيقي

إذا ضُرب المتجه $\mathbf{v}$ في عدد حقيقي k ينتج المتجه $k\mathbf{v}$ الذي يوازي المتجه $\mathbf{v}$، ويكون طول المتجه $k\mathbf{v}$ هو $|k|\ |\mathbf{v}|$. ويتحدّد اتجاهه بإشارة k.

- **إذا كانت $k>0$، فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو اتجاه $\mathbf{v}$ نفسه.**
- **إذا كانت $k<0$، فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو عكس اتجاه $\mathbf{v}$.**

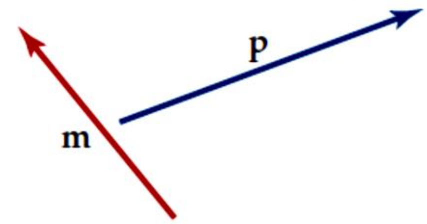
العمليات على المتجهات

15 ارسم المتجه $3\mathbf{x}-\frac{3}{4}\mathbf{y}$، حيث $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ متجهان كما في الشكل المجاور.

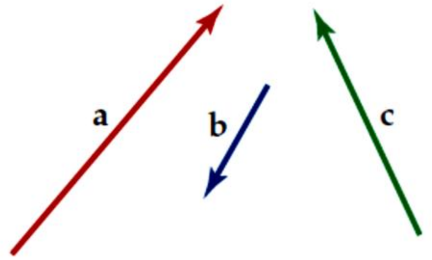


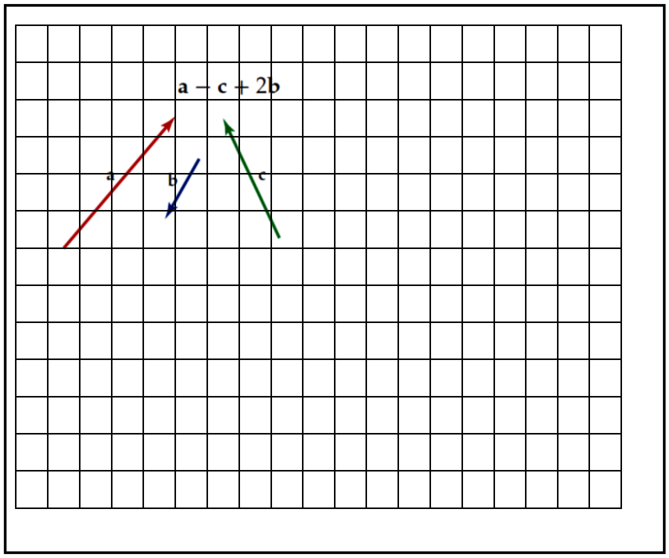
16 ارسم المتجه الذي يُمثّل كلًّا مما يأتي :

$$m - \frac{1}{4}p$$



$$a - c + 2b$$





تطبيقات المتجهات: يُسمى المتجهان اللّذان ناتج جمعهما المتجه r ، **مركبتي** r . ومع أن مركبتي المتجه يمكن أن تكونا في أي اتجاه، إلا أنه من المفيد غالبًا تحليل المتجه إلى **مركبتين متعامدتين،** واحدة أفقية، والأخرى رأسية. ففي الشكل المجاور، يمكن اعتبار القوة r المبذولة لسحب العربة بصفتها مجموع مركبتين هما أفقية x تحرك العربة إلى الأمام، ورأسية y تسحب العربة إلى أعلى.

2 استخدامات المتجهات

استخدامات المتجهات يمكن استخدام جمع وحساب مثلثات المتجهات لحل مسائل المتجهات التي تتضمن المثلثات التي كثيرًا ما تكون مائلة.

في الملاحة، الاتجاه هو اتجاه توجيه مركبة، مثل طائرة أو سفينة، للتغلب على القوى الأخرى، مثل الرياح أو التيار. السرعة النسبية للمركبة هي الناتج عند دمج سرعة الاتجاه والقوى الأخرى.

17 **الملاحة الجوية** تطير طائرة بسرعة مقدارها 310 عقدة باتجاه °050. إذا كانت الرياح تهب بسرعة 78 عقدة من الاتجاه الحقيقي °125، فحدّد سرعة الطائرة واتجاهها بالنسبة إلى الأرض.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

18 يسبح علي باتجاه الشرق بسرعة 3.5 متر في الثانية عبر نهر باتجاه الضفة المتعاكسة مباشرة. في الوقت ذاته، يحمله تيار النهر باتجاه الجنوب بمعدل مترين في الثانية. أوجد سرعة علي واتجاهه بالنسبة إلى الشاطئ.

....

....

....

....

....

....

....

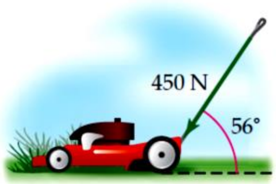
....

....

....

تحليل القوة إلى مركبتين متعامدتين

19 **قص العشب:** يدفع علي عربة قصِّ العشب بقوة مقدارها 450 N ، وبزاويةٍ قياسها °56 مع الأفقي (سطح الأرض).



a) ارسم شكلًا يوضِّح تحليل القوة التي يبذلها علي إلى مركبتين متعامدتين.

....

....

....

....

....

b) أوجد مقدار كلٍّ من المركبتين؛ الأفقية والرأسية للقوة.

....

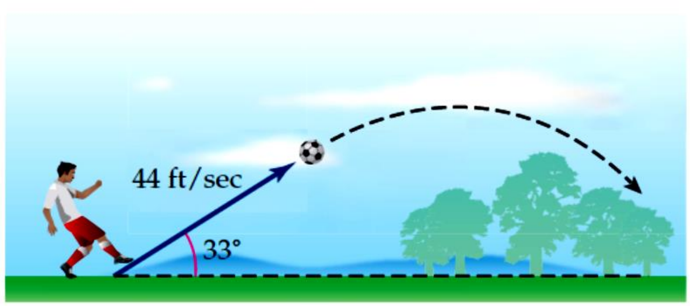
....

....

....

....

20 **كرة قدم:** يركل لاعبٌ كرةَ قدمٍ من سطح الأرض بسرعةٍ مقدارها 44 ft/s ، وبزاويةٍ قياسها °33 مع سطح الأرض كما في الشكل أدناه.



A) ارسم شكلًا يوضِّح تحليل هذه السرعة إلى مركبتين متعامدتين.

....

....

....

....

....

B) أوجد مقدار كلٍّ من المركبتين الأفقية والرأسية للسرعة .

....

....

....

....

....

21 **تنظيف:** يدفع حسن عصا مكنسة التنظيف بقوة مقدارها 190 N ، وبزاويةٍ قياسها 33° مع سطح الأرض كما في الشكل المجاور. **(مثال 5)**

a) ارسم شكلًا يوضِّح تحليل هذه القوة إلى

....

....

....

....

b) أوجد مقدار كلٍّ من المركبة الأفقية والمركبة الرأسية.

....

....

....

....

22 **اكتشف الخطأ:** حاول كلٌّ من حسين ومصطفى إيجاد محصلة المتجهين a , b . أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.

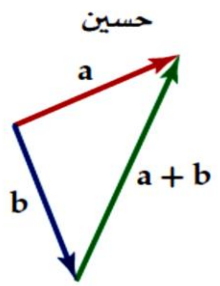
....

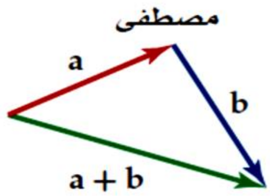
....

....

....

....





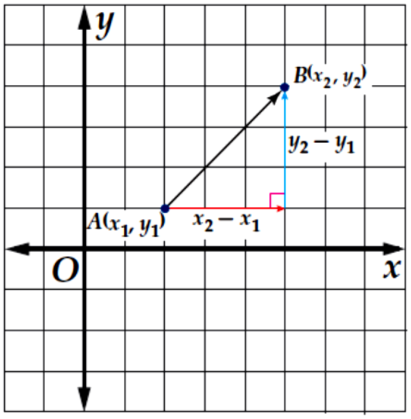
ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

1 تمثيل وإجراء العمليات على المتجهات في المستوى الإحداثي.

المتجهات في المستوى الإحداثي

2 كتابة متجه كتوفيق خطي لمتجهات الوحدة.

مفهوم أساسي: الصورة الاحداثية لمتجه



الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$ ، ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي :

$$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$

التعبير عن المتجه بالصورة الإحداثية

(الصورة المركبة تعنى الصورة الاحداثية)

1 أوجد الصورة الإحداثية لِـ $\overrightarrow{AB}$ ، الذي نقطة بدايته $A(-4, 2)$ ، ونقطة نهايته $B(3, -5)$.

....

....

....

أوجد الصورة الإحداثية لِـ $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي: (الصورة المركبة)

2 $A(-2, -7), B(6, 1)$

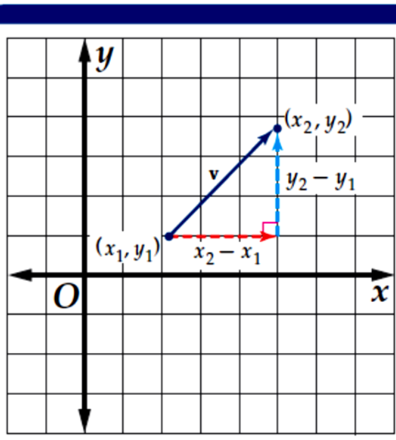
3 $A(0, 8), B(-9, -3)$

....

....

....

مفهوم أساسي: طول المتجه في المستوى الإحداثي



إذا كان **v** متجهًا، نقطة بدايته (x_1, y_1) ، ونقطة نهايته (x_2, y_2) ، فإن طول **v** يُعطى بالصيغة:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وإذا كانت $\langle a, b \rangle$ هي الصورة الإحداثية للمتجه **v** فإن :

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

4 أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-4, 2)$ ، ونقطة نهايته $B(3, -5)$.

....

....

....

أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممّا يأتي:

5 $A(-2, -7), B(6, 1)$

....

....

....

6 $A(0, 8), B(-9, -3)$

....

....

....

7 $A(-3, 1), B(4, 5)$

....

....

....

8 $A(-2, 6), B(1, 10)$

....

....

....

9 $A(10, -2), B(3, -5)$

....

....

....

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

مفهوم أساسي العمليات على المتجهات

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ متجهين، و k عددًا حقيقيًا، فإن:

جمع متجهين $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$

طرح متجهين $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$

ضرب متجهٍ في عددٍ حقيقيٍّ $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$

10 أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات $\mathbf{a} = \langle 2, 5 \rangle, \mathbf{b} = \langle -3, 0 \rangle, \mathbf{c} = \langle -4, 1 \rangle$:

a) $\mathbf{c} + \mathbf{a}$ b) $\mathbf{b} - 2\mathbf{a}$

....

....

....

11 أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{a} = \langle 2, 5 \rangle, \mathbf{b} = \langle -3, 0 \rangle, \mathbf{c} = \langle -4, 1 \rangle$:

$4\mathbf{c} + \mathbf{b}$ $-3\mathbf{c}$ $2\mathbf{c} + 4\mathbf{a} - \mathbf{b}$

....

....

....

....

....

متجهات الوحدة: يُسمَّى المتجه الذي طوله 1 **متجه الوحدة**، ويرمز له بالرمز $\mathbf{u}$، ولإيجاد متجه الوحدة $\mathbf{u}$ الذي له نفس اتجاه المتجه $\mathbf{v}$، اقسم المتجه $\mathbf{v}$ على طوله $|\mathbf{v}|$.

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$$

وبذلك يكون $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\,\mathbf{u}$. ونكون قد عبَّرنا عن المتجه غير الصفريّ $\mathbf{v}$ في صورة حاصل ضرب متجه وحدة بنفس اتجاه $\mathbf{v}$ في عددٍ حقيقيٍّ.

إيجاد متجه وحدة له نفس الاتجاه لمتجه معطًى

12 أوجد متجه الوحدة **u** الذي له نفس اتجاه $\mathbf{v} = \langle -2, 3 \rangle$.

....

....

....

....

....

أوجد متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه المتجه المُعطى في كلٍّ ممَّا يأتي:

13 $\mathbf{w} = \langle 6, -2 \rangle$

....

....

....

....

....

14 $\mathbf{x} = \langle -4, -8 \rangle$

....

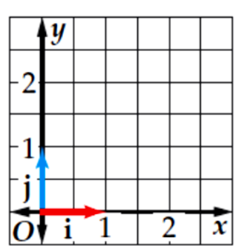
....

....

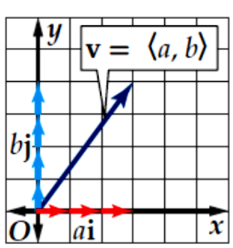
....

....

يُرمز لمتجهي الوحدة بالاتجاه الموجب لمحور x، والاتجاه الموجب لمحور y بالرمزين $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$ ، على الترتيب كما في الشكل 3.2.3 . كما يُسمَّى المتجهان **i , j** **متجهَي الوحدة القياسيين**.



الشكل 3.2.3



الشكل 3.2.4

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

ويمكن استعمال هذين المتجهين للتعبير عن أي متجه $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ على الصورة $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ كما في الشكل 3.2.4 ؛ وذلك لأن:

$\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$	الصورة الإحداثية
$= \langle a, 0\rangle + \langle 0, b\rangle$	أعد كتابة المتجه على صورة ناتج جمع متجهين
$= a\langle 1, 0\rangle + b\langle 0, 1\rangle$	اضرب متجه في عدد حقيقي
$= a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$	$\langle 1, 0\rangle = \mathbf{i}, \langle 0, 1\rangle = \mathbf{j}$

تسمى الصورة $a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j}$ **توافقًا خطيًا** للمتجهين $\mathbf{i}, \mathbf{j}$. ويُقصد بها كتابة المتجه بدلالة متجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$

كتابة متجهٍ على صورة توافق خطي لمتجهَي الوحدة

15 إذا كانت نقطة بداية المتجه $\overrightarrow{DE}$ هي $D(-2, 3)$ ، ونقطة نهايته $E(4, 5)$ ، فاكتب $\overrightarrow{DE}$ على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$.

....

....

....

....

....

اكتب المتجه $\overrightarrow{DE}$ المُعطى نقطتا بدايته ونهايته على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ في كلٍّ ممَّا يأتي :

16 $D(-6, 0), E(2, 5)$

....

....

....

....

....

17 $D(-3, -8), E(7, 1)$

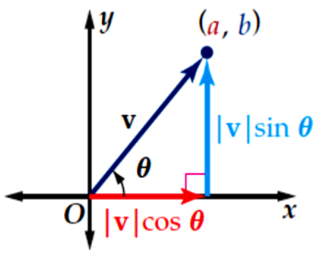
....

....

....

....

ويمكن كتابة المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ ، باستعمال زاوية الاتجاه التي يصنعها $\mathbf{v}$ مع الاتجاه الموجب لمحور x . فمن الشكل 3.2.5 يمكن كتابة $\mathbf{v}$ على الصورة الإحداثية، أو على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ كما يأتي:



الشكل 3.2.5

$\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ الصورة الإحداثية

$= \langle |\mathbf{v}| \cos\theta, |\mathbf{v}| \sin\theta\rangle$ عوّض

$= |\mathbf{v}| (\cos\theta)\mathbf{i} + |\mathbf{v}| (\sin\theta)\mathbf{j}$ توافق خطي من $\mathbf{i}, \mathbf{j}$

إيجاد الصورة الإحداثية

(الصورة المركبة تعني الصورة الاحداثية)

18) أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ الذي طوله 10 ، وزاوية اتجاهه $120°$ مع الأفقي.

....

....

....

....

....

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي في كلٍّ ممَّا يأتي :

19) $|\mathbf{v}| = 8, \theta = 45°$

....

....

....

....

....

20) $|\mathbf{v}| = 24, \theta = 210°$

....

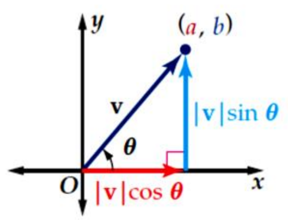
....

....

....

....

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL



الشكل 3.2.5

فمن الشكل 3.2.5 تستنتج أنه يمكن إيجاد زاوية اتجاه المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ مع الاتجاه الأفقي (الموجب لمحور x) بحَلّ المعادلة المثلثية: $\tan\theta = \frac{|\mathbf{v}|\sin\theta}{|\mathbf{v}|\cos\theta}$، أو $\tan\theta = \frac{b}{a}$.

زوايا الاتجاه للمتجهات

21 أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور x.

a) $\mathbf{p} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

....

....

....

....

....

b) $\mathbf{r} = \langle 4, -5\rangle$

....

....

....

....

....

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهين الآتيين مع الاتجاه الموجب لمحور x.

22 $-6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

....

....

....

....

....

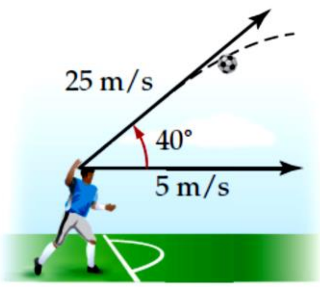
ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

23 $\langle -3, -8 \rangle$

....
....
....
....
....

تطبيق العمليات على المتجهات

24 **كرة قدم:** يركض حارس مرمى في لعبة كرة القدم للأمام بسرعة 5 m/s ، ليرمي الكرة بسرعة 25 m/s ، بزاوية $40°$ مع الأفقي. أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة.



....
....
....
....
....
....
....

كرة قدم: أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة إذا تحرك اللاعب إلى الأمام بسرعة 7 m/s

....
....
....
....
....
....
....

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

2 إيجاد مسقط متجه على آخر.

الضرب النقطي ومساقط المتجهات

1 إيجاد ناتج الضرب النقطي لمتجهين. واستخدم ناتج الضرب النقطي لإيجاد الزاوية بينهما.

مفهوم أساسي الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى الإحداثي

يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$ كالآتي :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

الضرب النقطي يعني الضرب الداخلي

لاحظ أنه خلافًا لعمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات، فإن حاصل الضرب الداخلي لمتجهين يكون عددًا وليس متجهًا. ويتعامد متجهان غير صفريين، إذا وفقط إذا كان حاصل ضربهما الداخلي صفرًا. ويقال للمتجهين اللّذين حاصل ضربهما الداخلي صفر : **متجهان متعامدان** .

مفهوم أساسي المتجهان المتعامدان

يكون المتجهان غير الصفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ متعامدين، إذا وفقط إذا كان $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

استعمال الضرب الداخلي في التحقق من تعامد متجهين

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين .

2) $\mathbf{u} = \langle 2, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle 8, 4\rangle$

....

....

....

1) $\mathbf{u} = \langle 3, 6\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 2\rangle$

....

....

....

4) $\mathbf{u} = \langle 3, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 1\rangle$

....

....

....

3) $\mathbf{u} = \langle -2, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 9, -6\rangle$

....

....

....

6) $\mathbf{u} = 11\mathbf{i} + 7\mathbf{j}, \mathbf{v} = -7\mathbf{i} + 11\mathbf{j}$

....

....

....

5) $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j}, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

....

....

....

نظريّة خصائص الضرب الداخلي (الضرب النقطي)

إذا كانت $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ متجهات، وكان k عددًا حقيقيًا، فإن الخصائص الآتية صحيحة:

الخاصية الإبدالية	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
خاصية التوزيع	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
خاصية الضرب في عدد حقيقي	$k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot k\mathbf{v}$
خاصية الضرب الداخلي في المتجه الصفري	$0 \cdot \mathbf{u} = 0$
العلاقة بين الضرب الداخلي وطول المتجه	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$

البرهان

إثبات أن: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$

افترض أن: $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2$ الضرب الداخلي

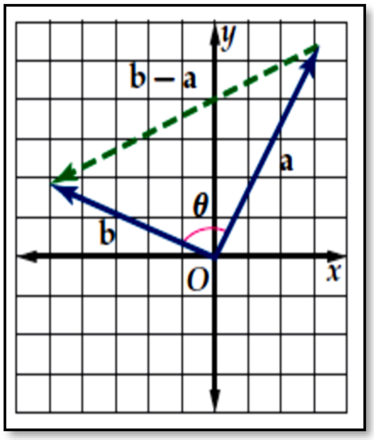
$= \left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\right)^2$ اكتب على صورة مربع جذر $(u_1^2 + u_2^2)$

$= |\mathbf{u}|^2$ $\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = |\mathbf{u}|$

استعمال الضرب الداخلي لإيجاد طول متجه

7 استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول كلٍّ من المتجهات الآتية : (الضرب النقطي)

$\mathbf{a} = \langle -5, 12 \rangle$ $\mathbf{b} = \langle 12, 16 \rangle$ $\mathbf{c} = \langle -1, -7 \rangle$



الزاوية θ بين أي متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ هي الزاوية بين هذين المتجهين، عندما يكونان في وضع قياسي كما في الشكل المجاور، حيث: $0 \le \theta \le \pi$ ، أو $0° \le \theta \le 180°$ ، ويمكن استعمال الضرب الداخلي؛ لإيجاد قياس **الزاوية بين متجهين** غير صفريين.

مفهوم أساسي **الزاوية بين متجهين**

إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، فإن:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$

إيجاد قياس الزاوية بين متجهين

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

8) $\mathbf{u} = \langle 6, 2 \rangle , \mathbf{v} = \langle -4, 3 \rangle$

....

....

....

....

....

....

....

9) $\mathbf{u} = \langle 3, 1 \rangle , \mathbf{v} = \langle 3, -3 \rangle$

....

....

....

....

....

....

....

10) $\mathbf{u} = \langle -5, -2 \rangle , \mathbf{v} = \langle 4, 4 \rangle$

11) $\mathbf{u} = \langle 9, 5 \rangle , \mathbf{v} = \langle -6, 7 \rangle$

12) **مواصلات:** انطلق القطاران A, B من نقطة واحدة. إذا كان $\langle 33, 12 \rangle$ يُمثّل مسار القطار A ، و $\langle 55, 4 \rangle$ يُمثّل مسار القطار B ، فأوجد قياس الزاوية بين المتجهين.

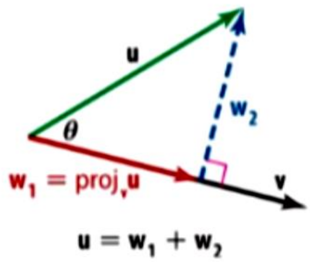
2 مسقط المتجه

مسقط المتجه في الدرس 1-8، تعلمت أنه يمكن تحليل متجه إلى مركبين متعامدين. بينما تكون هذه المركبات أفقية ورأسية في كثير من الأحيان، لكن من المفيد أحيانًا أن يكون أحدها موازيًا للآخر.

المفهوم الأساسي مسقط $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$

افترض أن $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ متجهان غير صفريين، وافترض أن $\mathbf{w}_1$ و $\mathbf{w}_2$ مركبتي المتجه $\mathbf{u}$ بحيث $\mathbf{w}_1$ توازي $\mathbf{v}$ كما هو موضح. إذًا، المتجه $\mathbf{w}_1$ يُسمى **مسقط المتجه** $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$، المشار إليه بالعبارة $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$، و

$$\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}.$$



13) **أوجد مسقط $\mathbf{u} = \langle 3, 2\rangle$ على $\mathbf{v} = \langle 5, -5\rangle$. ثمّ اكتب $\mathbf{u}$ باعتباره مجموع متّجهين متعامدين، أحدهما هو مسقط المتّجه $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$.**

14) أوجد مسقط $\mathbf{u} = \langle 1, 2\rangle$ على $\mathbf{v} = \langle 8, 5\rangle$. ثمّ اكتب $\mathbf{u}$ باعتباره مجموع متّجهين متعامدين. أحدهما هو مسقط المتّجه $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$.

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

15 أوجد مسقط $u = \langle 4, -3 \rangle$ على $v = \langle 2, 6 \rangle$. ثم اكتب u باعتباره مجموع متّجهين متعامدين، أحدهما هو مسقط المتّجه u على v.

....

....

....

....

....

....

....

16 . أوجد مسقط $u = \langle -3, 4 \rangle$ على $v = \langle 6, 1 \rangle$. ثم اكتب u باعتباره مجموع متّجهين متعامدين. أحدهما هو مسقط المتّجه u على v.

....

....

....

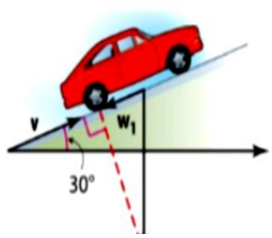
....

....

....

....

17 السيارات تقف سيارة تزن 1360 كيلوجرام على تل مائل بزاوية 30° كما هو موضح. إذا تم تجاهل قوة الاحتكاك. فما القوة اللازمة لمنع تدحرج السيارة لأسفل التل؟



....

....

....

....

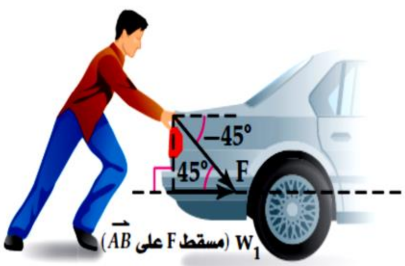
....

....

....

18 **التزلج** تجلس نسرين على زلاجة على جانب تل مائل بزاوية $60°$. ما القوة اللازمة لمنع انزلاق الزلاجة لأسفل التل إذا علمت أن وزن نسرين والزلاجة 125 كيلوجرام؟

19 **سيارة:** يدفع شخص سيارةً بقوةٍ ثابتةٍ مقدارها $120\,N$ بزاوية $45°$ كما في الشكل المجاور، أوجد الشغل المبذول بالجول لتحريك السيارة $10\,m$ (بإهمال قوة الاحتكاك).



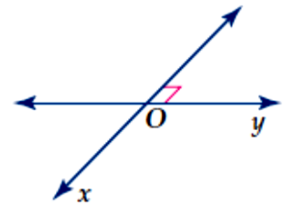
20 **تنظيف:** يدفع إبراهيم مكنسةً كهربائيةً بقوةٍ مقدارها $25\,N$، إذا كان قياس الزاوية بين ذراع المكنسة وسطح الأرض $60°$، فأوجد الشغل بالجول الذي بذله إبراهيم عند تحريك المكنسة مسافة $6\,m$؟

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

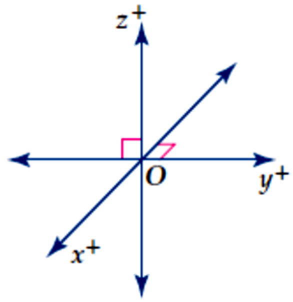
1 تحديد النقاط والمتجهات في نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد.

المتجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد

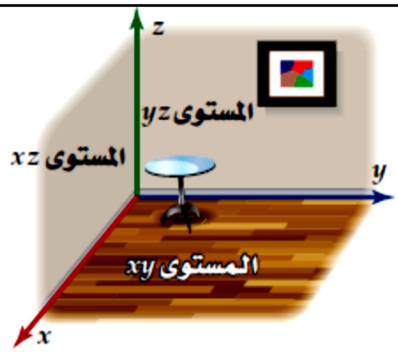
2 التعبير عن المتجهات في الفضاء جبريًا وإجراء العمليات عليها.



الشكل 6.4.1



الشكل 6.4.2

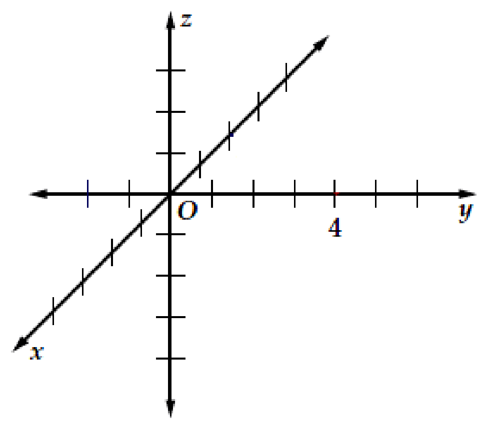


الشكل 6.4.3

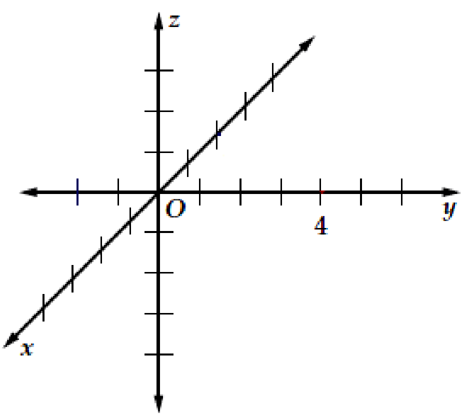
تُمثَّل النقطة في الفضاء **بثلاثيات مرتبة** من الأعداد الحقيقية (x, y, z)، ولتعيين مثل هذه النقطة، عيّن أولًا النقطة (x, y) في المستوى $x\,y$ ، ثم تحرك لأعلى، أو إلى أسفل موازيًا للمحور z ، بحسب المسافة المتجهة التي يُمثّلها z .

1 عيِّن كلًّا من النقطتين الآتيتين فى نظام الإحداثيات الثلاثى الأبعاد:

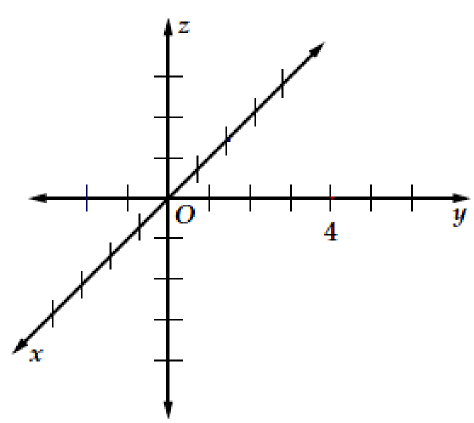
$(4 , 6 , 2)$



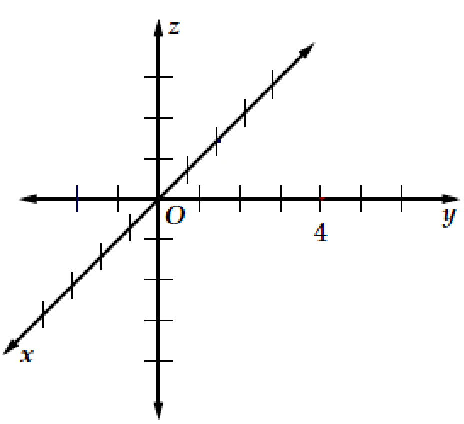
$(-2 , 4 , -5)$



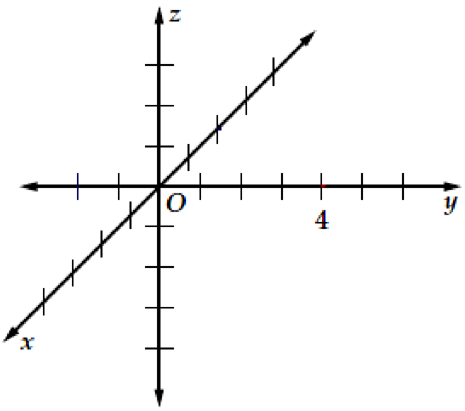
$(-3 , -4 , 2)$



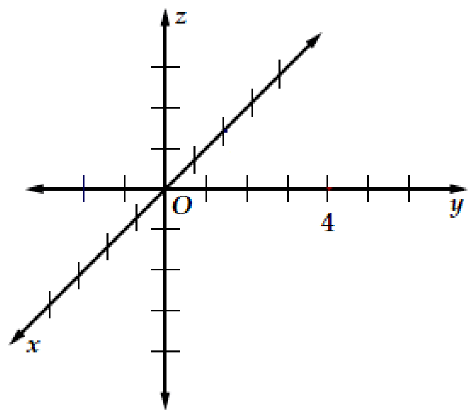
$(3 , 2 , -3)$



$(5, -4, -1)$



$(1, -2, -4)$



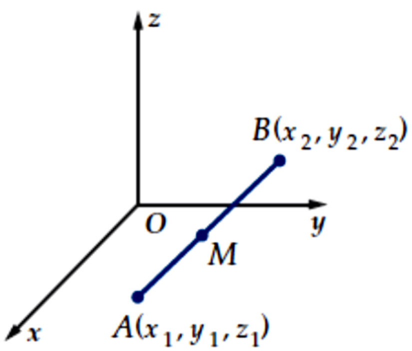
مفهوم أساسي صيغتا المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء

تُعطى المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ بالصيغة:

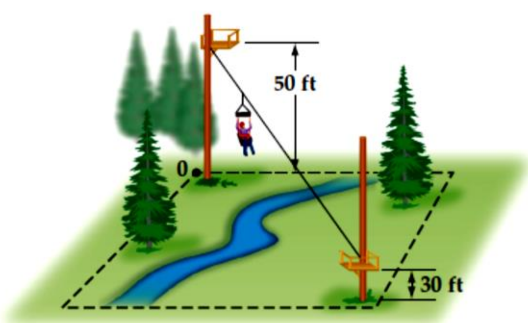
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

وتعطى نقطة المنتصف M لـ $\overline{AB}$ بالصيغة:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$



2 **رحلة:** تتحرك العربة في الشكل المجاور على سلسلة مشدودة، تربط بين منصَّتين تسمح للمتنزهين بالمرور فوق مناظر طبيعية خلابة. إذا مُثلت المنصتان بالنقطتين: $(10, 12, 50)$, $(70, 92, 30)$، وكانت الإحداثيات معطاة بالأقدام، فأجب عما يأتي:



a) أوجد طول السلسلة اللازمة للربط بين المنصَّتَين إلى أقرب قدمٍ.

....

....

....

....

b) أوجد إحداثيات منتصف المسافة بين المنصَّتين.

....

....

....

....

3 **طائرات:** تفرض أنظمة السلامة ألَّا تقل المسافة بين الطائرات عن $0.5\,\text{mi}$ في أثناء طيرانها، إذا علمت أن طائرتين تطيران فوق إحدى المناطق، وفي لحظةٍ معينةٍ كانت إحداثيات موقِعَي الطائرتين: $(450, -250, 28000)$, $(300, 150, 30000)$، مع العلم بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام، فأجب عما يأتي:

A) هل تخالف الطائرتان أنظمة السلامة؟

....

....

....

....

B) إذا أطلقت ألعابٌ ناريةٌ، وانفجرت في منتصف المسافة بين الطائرتين، فما إحداثيات نقطة الانفجار؟

إرشادٌ: الميل = 5280 قدمًا

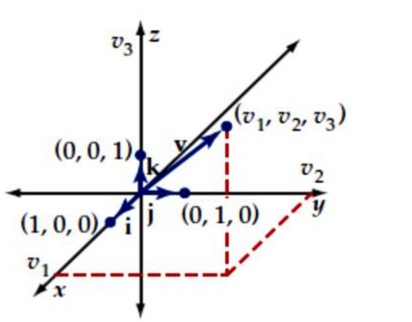
....

....

....

....

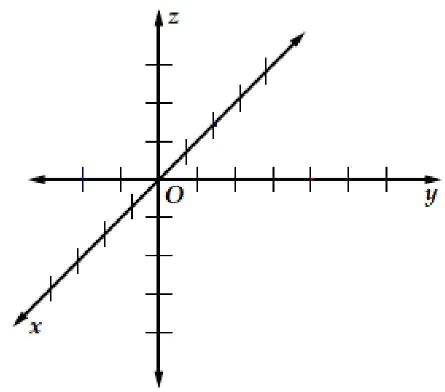
المتجهات في الفضاء إذا كان $\mathbf{v}$ متجهًا في الفضاء في وضع قياسي، وكانت (v_1, v_2, v_3) نقطة نهايته، فإننا نعبّر عنه بالصورة الإحداثية $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ ، كما يُعبّر عن المتجه الصفري بالصورة الإحداثية $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0\rangle$ ، وعن متجهات الوحدة القياسية بالصورة الإحداثية $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0\rangle, \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0\rangle, \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1\rangle$ ، كما في الشكل 6.4.4 ، ويمكن التعبير عن الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ على صورة توافق خطي لمتجهات الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ كما يأتي: $\langle v_1, v_2, v_3\rangle = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$.



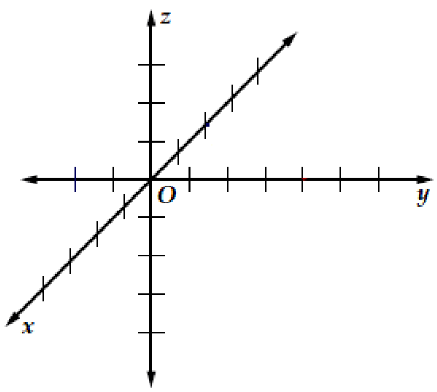
الشكل 6.4.4

4 مثِّل بيانيًّا كلًّا من المتجهين الآتيين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

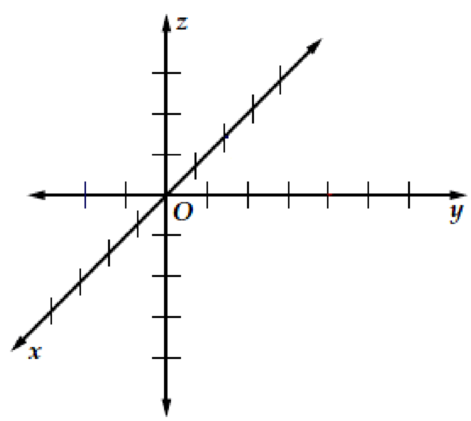
$\mathbf{u} = \langle -4, 2, -3 \rangle$



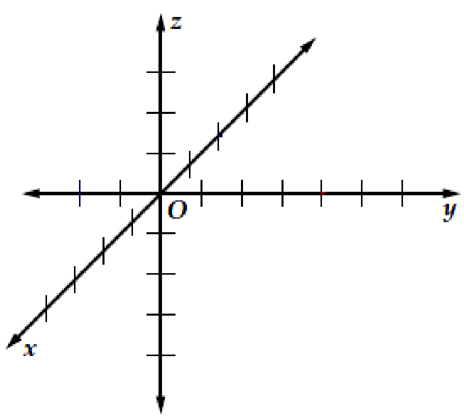
$\mathbf{v} = \langle 3, 4, -2 \rangle$



$\mathbf{w} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$



$\mathbf{p} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$



ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

مفهوم أساسي **العمليات على المتجهات في الفضاء**

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ متجهين في الفضاء، وكان k عددًا حقيقيًّا ، فإن :

جمع متجهين $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$

طرح متجهين $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$

ضرب متجهٍ في عددٍ حقيقيٍّ $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$

5 أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{y} = \langle 3, -6, 2 \rangle, \mathbf{w} = \langle -1, 4, -4 \rangle, \mathbf{z} = \langle -2, 0, 5 \rangle$:

$4\mathbf{y} + 2\mathbf{z}$

....

....

....

$2\mathbf{w} - \mathbf{z} + 3\mathbf{y}$

....

....

....

....

6 أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{y} = \langle 3, -6, 2 \rangle, \mathbf{w} = \langle -1, 4, -4 \rangle, \mathbf{z} = \langle -2, 0, 5 \rangle$:

$4\mathbf{w} - 8\mathbf{z}$

....

....

....

$3\mathbf{y} + 3\mathbf{z} - 6\mathbf{w}$

....

....

....

....

وكما في المتجهات ذات البُعدين، نجد الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1, z_1)$ ونقطة نهايته $B(x_2, y_2, z_2)$ ، وذلك بطرح إحداثيات نقطة البداية من إحداثيات نقطة النهاية.

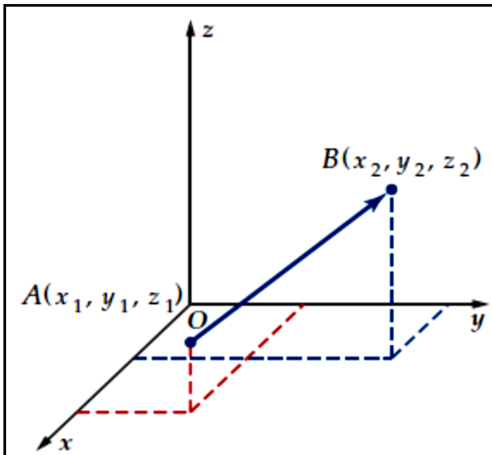
$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

وعندها يكون: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ ،

وهذا يعني أنه إذا كان: $\overrightarrow{AB} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ، فإن:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

ويكون متجه الوحدة $\mathbf{u}$ باتجاه $\overrightarrow{AB}$ هو $\mathbf{u} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$



7 أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-4,-2,1)$ ، ونقطة نهايته $B(3,6,-6)$ ، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$.

....

....

....

....

....

....

8 أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته ، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$ في كلٍّ مما يأتي:

$A(-2,-5,-5), B(-1,4,-2)$

....

....

....

....

....

....

$A(-1,4,6), B(3,3,8)$

....

....

....

....

....

....

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

9 حدّد نوع المثلث الذي رؤوسه هي النقاط الثلاث في كلٍّ مما يأتي (قائم الزاوية، أو متطابق الضلعين، أو مختلف الأضلاع):

$A(3, 1, 2)$, $B(5, -1, 1)$, $C(1, 3, 1)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

10 $A(4, 3, 4)$, $B(4, 6, 4)$, $C(4, 3, 6)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

11 **الصواريخ بعد الانطلاق، يتجه صاروخ نموذجي نحو الشمال ويرتفع بزاوية $75°$ بالنسبة للمحور الأفقي بسرعة 200 كيلومتر في الساعة. فإذا هبت الرياح من الشمال الغربي بسرعة 5 كيلومتر في الساعة، فأوجد متجه السرعة الناتجة للصاروخ بالنسبة لنقطة الانطلاق.**

....

....

....

....

....

....

....

....

12 **الملاحة الجوية** بعد إقلاع طائرة، اتجهت شرقًا واستمرت في الارتفاع بزاوية $18°$ بالنسبة للمحور الأفقي. وكانت سرعتها في الهواء 250 كيلومتر في الساعة. فإذا هبت الرياح من الشمال الشرقي بسرعة 10 كيلومتر في الساعة. فأوجد المتجه الذي يمثل السرعة الناتجة للطائرة بالنسبة لنقطة الإقلاع. افترض أن النقطة **i** في الغرب، والنقطة **j** في الشمال والنقطة **k** لأعلى.

....

....

....

....

....

....

....

....

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

2 إيجاد قيمة ناتج الضرب المتجهي للمتجهات في الفضاء واستخدام ناتج الضرب المتجهي في إيجاد المساحة والحجم.

الضرب النقطي والضرب المتجهي في الفضاء

1 إيجاد قيمة ناتج الضرب النقطي والزوايا بين متجهات في الفضاء.

مفهوم أساسي الضرب الداخلي والمتجهات المتعامدة في الفضاء

يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين: $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ في الفضاء كالآتي:

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ ، ويكون المتجهان غير الصفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ متعامدين ، إذا وفقط إذا كان $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$

1 أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين:

$\mathbf{u} = \langle 3, -3, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 7, 3\rangle$

$\mathbf{u} = \langle -7, 3, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 17, 5\rangle$

....

....

....

....

....

$\mathbf{u} = \langle 4, -2, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3, -2\rangle$

$\mathbf{u} = \langle 3, -5, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 7, 5\rangle$

....

....

....

....

....

وكما هو في المتجهات في المستوى، إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ في الفضاء فإن $\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$.

2 أوجد قياس الزاوية θ بين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ، إذا كان: $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, 3, -2\rangle$ ، إلى أقرب جزءٍ من عشرة.

....

....

....

....

....

3 أوجد قياس الزاوية بين المتجهين: $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ ، إلى أقرب منزلةٍ عشريةٍ.

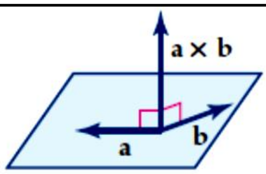
....

....

....

....

....



الضرب الاتجاهي هو نوع آخر من الضرب بين المتجهات في الفضاء، وبخلاف الضرب الداخلي، فإن **الضرب الاتجاهي** لمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ هو متجه وليس عددًا، ويُرمز له بالرمز $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$، ويُقرأ a cross b ، ويكون المتجه $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ عموديًا على المستوى الذي يحوي المتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

مفهوم أساسي — الضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

إذا كان: $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ ، فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$

هو المتجه: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$

إذا طبَّقنا قاعدة حساب قيمة محدّدة من الدرجة الثالثة على المحدّدة أدناه، والتي تتضمن متجهات الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$، وإحداثيات كلٍّ من $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، فإننا نتوصل إلى القاعدة نفسها للمتجه $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

بوضع متجهات الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ في الصف 1

بوضع إحداثيات $\mathbf{a}$ في الصف 2

بوضع إحداثيات $\mathbf{b}$ في الصف 3

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{k}$$

خطوة 1: أعد كتابة العمود الأول والثاني عن يمين المحدّدة.

خطوة 2: أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الرئيس وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة ثم اجمع.

$$\left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right| \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

خطوة 3: أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الآخر وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة ثم اجمع.

$$\left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right| \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

خطوة 4: لإيجاد قيمة المحدّدة نطرح ناتج الخطوة 3 من ناتج الخطوة 2 .

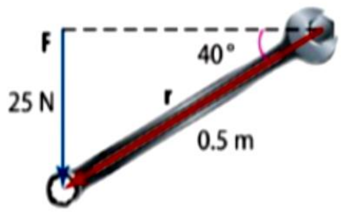
4 أوجد الضرب الاتجاهي $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ حيث: $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 1 \rangle, \mathbf{v} = \langle -3, 3, 1 \rangle$، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

5 أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ ممايأتي، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$:

$\mathbf{u} = \langle 4, 2, -1 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 1, 4 \rangle$

$\mathbf{u} = \langle -2, -1, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 1, 4 \rangle$

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL



6 **إصلاح السيارات** يستخدم عبد الكريم مفتاح ربط الصواميل لإحكام صامولة العروة. ويبلغ طول مفتاح الربط الذي يستخدمه 50 سنتيمترًا أو 0.5 متر. أوجد مقدار واتجاه العزم على صامولة العروة إذا بذل قوة قدرها 25 نيوتن لأسفل لنهاية ذراع التوجيه عندما تكون $40°$ أسفل محور x الموجب كما هو موضح.

....

....

....

....

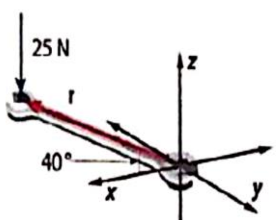
....

....

....

....

....



7 **إصلاح السيارات** أوجد مقدار العزم إذا بذل عبد الكريم نفس مقدار القوة على نهاية ذراع التوجيه لأسفل مباشرةً عندما يكوّن ذراع التوجيه زاوية $40°$ أعلى محور x الموجب كما هو موضح في الشكل 7.5.3.

....

....

....

....

....

....

....

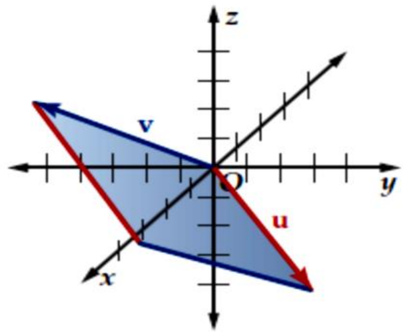
....

....

....

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

للضرب الاتجاهي تطبيقات هندسية عديدة، فمثلًا مقدار المتجه $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ أو المقدار $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ يُعبِّر عن مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ضلعان متجاوران كما في الشكل 6.5.1 .



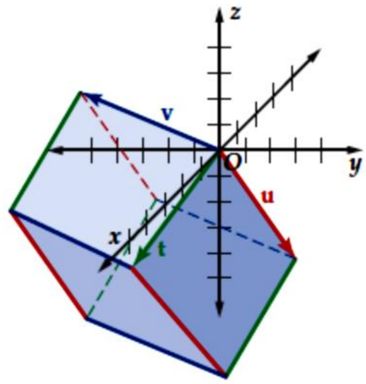
الشكل 6.5.1

8 أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه: $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ضلعان متجاوران.

9 أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه: $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ضلعان متجاوران .

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

الضرب القياسي الثلاثي إذا التقت ثلاثة متجهات في مستويات مختلفة في نقطة البداية، فإنها تكوّن أحرفًا متجاورة **لمتوازي سطوح**، وهو عبارة عن مجسم له ستة أوجهٍ، كل وجهٍ منها على شكلٍ متوازي أضلاع كما في الشكل 6.5.2 أدناه، إن القيمة المطلقة **للضرب القياسيّ الثلاثي** لهذه المتجهات هو عدد يُمثّل حجم متوازي السطوح.



الشكل 6.5.2

مفهوم أساسي **الضرب القياسي الثلاثي**

إذا كان: $\mathbf{t} = t_1\mathbf{i} + t_2\mathbf{j} + t_3\mathbf{k},\ \mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k},\ \mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$،

فإن الضرب القياسي الثلاثي للمتجهات $\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ يُعرف كالآتي $\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

10 أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه: $\mathbf{t} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k},\ \mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k},\ \mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ أحرف متجاورة.

....

....

....

....

....

....

....

....

11 أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه: $t = 2j - 5k, u = -6i - 2j + 3k, v = 4i + 3j + k$
أحرف متجاورة.

....

....

....

....

....

....

....

....

مصفوفات التحويلات في الفضاء ثلاثي الأبعاد

1 تحويل الأشكال ثلاثية الأبعاد باستخدام عمليات المصفوفات لوصف التحويل.

1 الرسوم المتحركة الحاسوبية استخدم كريس ويدج من استوديوهات Blue Sky Studios, Inc. برمجيات لعمل فيلم فاز بجائزة الأوسكار لعام 1999 لفئة أفلام الرسوم المتحركة القصيرة. تسمح البرمجيات للسيد ويدج برسم أجسام ثلاثية الأبعاد وتحريكها وتحويلها لابتكار حركة ولون واتجاه للضوء. العمليات الرياضية التي يستخدمها الحاسب الآلي شديدة التعقيد. وسنقوم بحل مسألة ذات صلة بالرسوم المتحركة في المثال 2.

يمكن وصف الحركات الأساسية في الفضاء ثلاثي الأبعاد باستخدام المتجهات ومصفوفات التحويل.

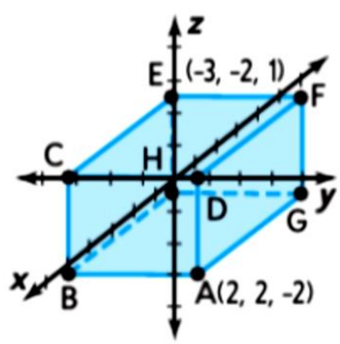
تذكر أنه يمكن تمثيل نقطة عند (x, y) في نظام إحداثي ثنائي الأبعاد من خلال المصفوفة $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

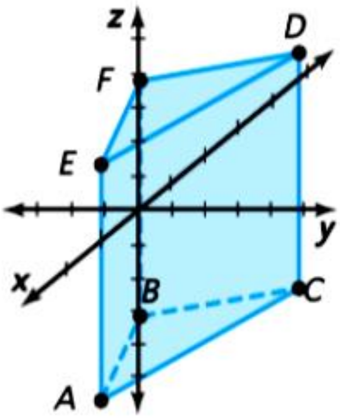
يمكن أن تتوسع هذه الفكرة إلى الفضاء ثلاثي الأبعاد.

يمكن التعبير عن نقطة عند (x, y, z) بالمصفوفة $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

أوجد إحداثيات رؤوس المنشور المستطيل ومثّلها في صورة مصفوفة الرؤوس.

$\overrightarrow{AE} = \langle -3 -2, -2 -2, 1, -(-2) \rangle$ أو $\langle -5 -4, 3 \rangle$





تحتاج إلى إزاحة منشور باستخدام المتجه $\vec{a} = \langle 3, 3, 0\rangle$.
لدى رؤوس المنشور الإحداثيات التالية.

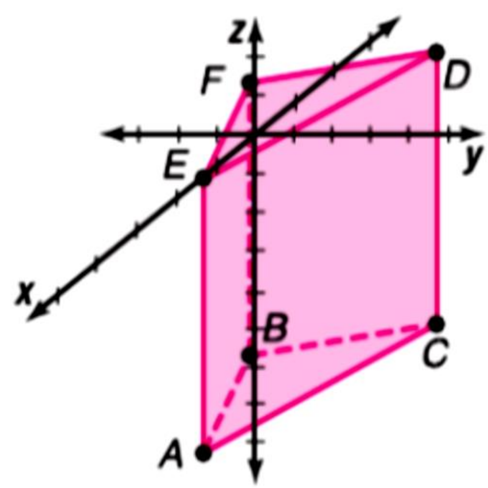
$A(2, 1, -4)$ $B(-1, -1, -4)$ $C(-2, 3, -4)$

$D(-2, 3, 3)$ $E(2, 1, 3)$ $F(-1, -1, 3)$

a. اكتب مصفوفة سيكون لديها مثل ذلك التأثير على الشكل.

b. أوجد إحداثيات رؤوس الصورة المزاحة.

c. مثّل الصورة المزاحة بيانيًا.



افترض أن M يمثل مصفوفة رأس المنشور المستطيل في المثال 1.

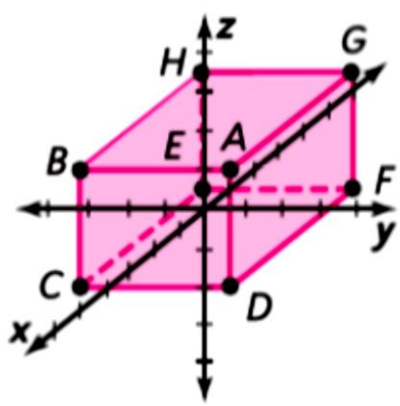
a. أوجد TM إذا كان $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

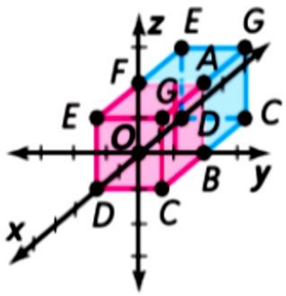
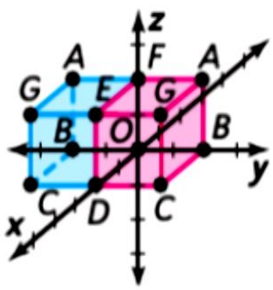
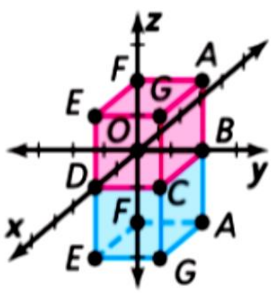
b. مثّل الصورة الناتجة بيانيًا.

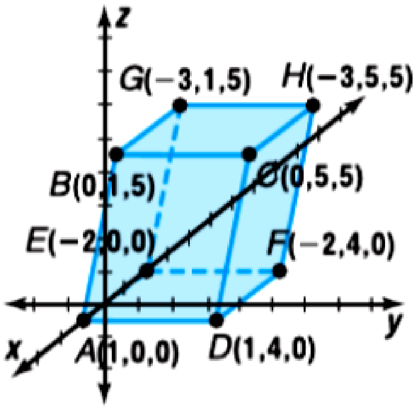
c. صف التحويل الذي تمثله المصفوفة T.

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

ثم مثّل بيانيًا النقاط التي تمثلها المصفوفة الناتجة.



مصفوفات الانعكاس		
بالنسبة لانعكاس على:	**اضرب مصفوفة الرؤوس في:**	**الصورة الناتجة**
المستوى yz	$R_{yz\text{ -المستوى}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
المستوى xz	$R_{xz\text{ -المستوى}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
المستوى xy	$R_{xy\text{ -المستوى}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	



متوازي المستطيلات هو منشور تكون جميع وجوهه متوازيات أضلاع كما هو موضح في التمثيل البياني.

a. أوجد مصفوفة الرؤوس للتحويل D حيث $k = 2$.

b. ارسم تمثيلا بيانيًا للشكل الناتج.

c. ما التأثير الذي يحدثه D على الشكل الأصلي؟

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL