[3-4]: النمذجة والأوفقية

اليوم والتاريخ : ..... / / 2013 م

2013/2012

مدرسة الرؤية للتعليم الثانوي بنين

adel hessen

النمذجة والأوفقية

تطبيقات على القيم القصوى

www.almanahj.com

جواهر الرياضيات

تدريبات و أوراق العمل

الصف الثاني عشر العلمي

اسم الطالب : .....

تحياتي ،،،

عادل حسين

الفصل الدراسي الثاني

2013 / 2012 م

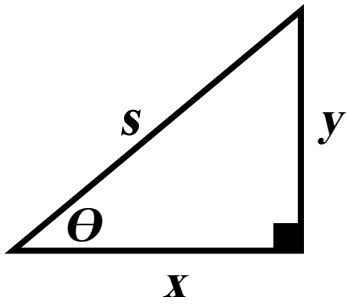
الثاني عشر العلمي الفصل الدراسي الثاني

adel hessen

الوحدة 3 تطبيقات التفاضل

[3-4]: النمذجة والأوفقية

المثلث القائم الزاوية :



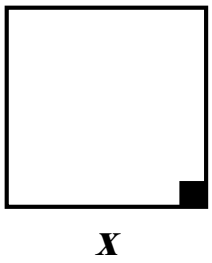
" نظرية فيثاغورث" $S^2 = x^2 + y^2$

مساحة المثلث القائم الزاوية = $\frac{1}{2} x\ y$

= نصف حاصل ضرب ضلعي القائمة

محيط المثلث = $s + x + y$ " مجموع اطوال اضلاعه "

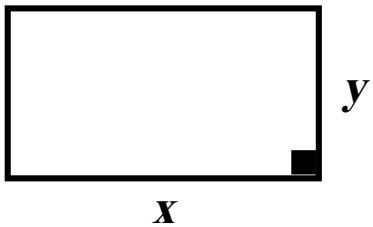
المـــــــــربع :



مساحـــة المربـــــــــع = $A = x^2$ " مربع طول ضلعة "

محيـــط المربـــــــــع = $4\ x$ " طول الضلع × 4 "

المستـــــــــطيل :

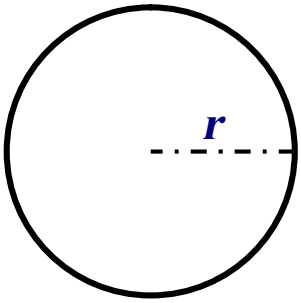


مساحة المستطيل = $A = x\ .\ y$ " الطول × العرض "

محيـــط المستطيل = $2\ (x + y)$ " 2 (الطول + العرض) "

www.almanahj.com

الدائـــــــــرة :

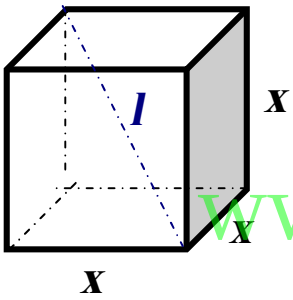


مساحة الدائـــــــرة = πr^2

محيـــــط الدائـــــــرة = $2\pi r$

المكعـــــــــب :

حجم المكعب= طوله × عرضه × ارتفاعه



حجم المكعب = x^3 " مكعب طول ضلعه "

المساحة الجانبية = 4 × (مربع طول الحرف)

المساحة الجانبية = $4x^2$

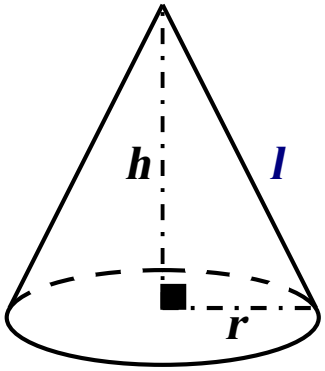
المساحة الكلية = 6 × (مربع طول الحرف)

المساحة الكلية = $6x^2$

طول قطـــــر المكعب = $l = \sqrt{3}\ x$

www.almanahj.com

المخـــروط الدائري القائـــم :



حجم المخروط الدائري القائم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

حجم المخروط = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

المساحة الجانبية للمخروط الدائري القائم = نصف محيط قاعدته × طول راسمه

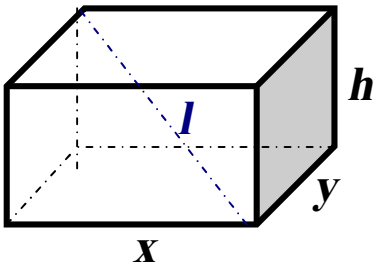
= $\pi r l$ حيث l طول راسم المخروط

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة للمخروط الدائري القائم

= $\pi r l + \pi r^2$

شبه المكعب " متوازي مستطيلات " :

الحجم = الطول × العرض × الارتفاع



حجم شبه المكعب = $x\ y\ h$

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

المساحة الجانبية = $2\ (x+y)\ h$

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

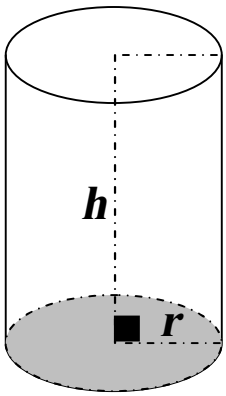
المساحة الكلية = $2\ (x+y)\ h+2\ x\ y$

طول قطر شبه المكعب = $l=\sqrt{x^2+y^2+h^2}$

www.almanahj.com

الاسطوانه الدائرية القائمة :

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع



حجم الاسطوانة الدائرية القائمة = $\pi\ r^2\ h$

المساحة الجانبية للاسطوانة = محيط القاعدة × الارتفاع

المساحة الجانبية = $2\pi\ r\ h$

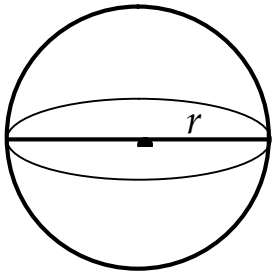
المساحة الكلية للاسطوانة = المساحة الجانبية + مساحتي القاعدتين

المساحة الكلية = $2\pi\ r\ h\ +2\pi\ r^2$

[3-4]: النمذجة والأوفقية

اليوم والتاريخ : ..... / / 2013 م

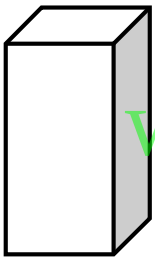
الكـــــــــــرة :



حجم الكـــــــــرة = $\frac{4}{3}\pi r^3$

المساحـــــــــــة = $4\pi r^2$

المنشور القائم :



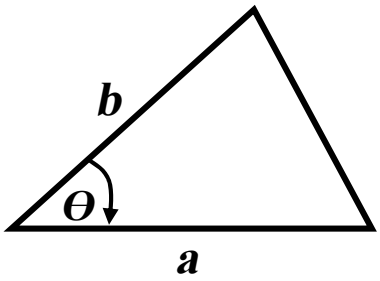
الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع (حسب القاعدة)

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع (حسب القاعدة)

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + (2 × مساحة القاعدة) (حسب القاعدة)

www.almanahj.com

المثـــــــلث :



مساحة المثلث = $\frac{1}{2} a\, b \sin\theta$

[3-4]: النمذجة والأوفقية

اليوم والتاريخ : ..... / / 2013 م

لحل مسائل تطبيقات القيم القصوى

1. تقرأ المسائلة جيدا وتفهم ونحدد المعطيات المعطاة بالمسائلة
2. نحدد المتغير المطلوب وتكتب المعلومات المعطاة بواسطة المتغير ونوجد العلاقة أو الدالة التي بها المتغير
3. نشتق العلاقة أو الدالة التي بها المتغير ونحدد النقاط الحرجة و نوجد القيم القصوى المطلقة
4. نوجد المطلوب ونفسَره .

ملاحظات

1. إذا وجد نقطة واحدة حرجة فندرس إشارة المشتقة الأولى لتحديد ما إذا كانت عظمى محلية أو صغرى محلية فتكون عظمى أو صغرى مطلقة
2. يمكن تحديد القيم القصوى المحلية بدراسة إشارة المشتقة الأولى أو باختبار المشتقة الثانية
3. يجب تحديد مجال المتغير المطلوب (إن وجد)

www.almanahj.com

(1) يراد صنع صندوق يدوي بدون غطاء بقص مربعات متطابقة طول ضلع كل منها x من أركان طبقة صفيح أبعادها 20×25 سنتيمتر وثني جوانبها إلى أعلى

ما الطول الذي تكون علية المربعات لصنع صندوق سعته اكبر ما يمكن ؟ وما أكبر حجم للصندوق ؟

[3-4]: النمذجة والأوفقية

اليوم والتاريخ : ..... / / 2013 م

تحديد الإبعاد :

(2) أردت التخطيط لعمل صندوق على هيئة متوازي مستطيلات بدون غطاء من قطعة ورق مستطيلة الشكل أبعادها $15\ in \times 8\ in$ وذلك بقطع 4 مربعات متطابقة عند الرؤوس ثم طي الأجزاء البارزة

ما إبعاد الصندوق الذي له اكبر حجم يمكن صنعة على أساسهـــــا ؟ ما حجمـــــه ؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

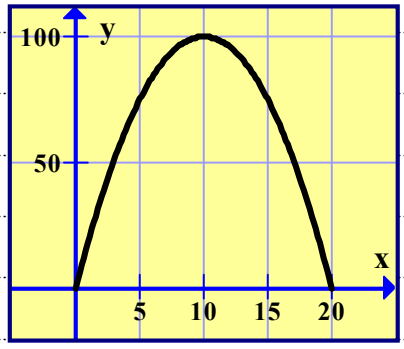
.....

ملاحظات

يجب إن تكون العلاقـــــــة أو الدالة في متغير واحـــــــد

www.almanahj.com

(3) أوجـــــــد عددين مجموعهما 20 وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن .



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(4) مجموع عددين غير سالبين هو 20 ومجموع مربعيهما أكبر ما يمكن . أوجـــــد العدديـــن ؟

www.almanahj.com

(5) مجموع عددين غير سالبين هو 20 ، أحد العددين مضافاً إلية الجذر التربيعي للآخر أكبر ما يمكن أو أصغر ما يمكن .

أوجـــــد العدديـــن ؟

(6) أقصى مساحة : ما أكبر مساحة ممكنة لمثلث قائم الزاوية ووتره يساوي 5 cm ؟ . مـــــا أبعاده ؟

www.almanahj.com

(7) إيجاد المساحة : أثبت أن من بين المستطيلات التي محيطها 8 m ، واحداً منها يعطي أكبر مساحة ويكون مربعاً .

[3-4]: النمذجة والأوفقية

اليوم والتاريخ : ..... / / 2013 م

تصميم علبة زيت :

(8) طلب إليك تصميم علبة زيت تسع لترا واحدا تكون على شكل اسطوانة دائرية قائمة .

ما الإبعـــــاد التي تستخـــدم أقل مادة ممكنـــــــة ؟

www.almanahj.com

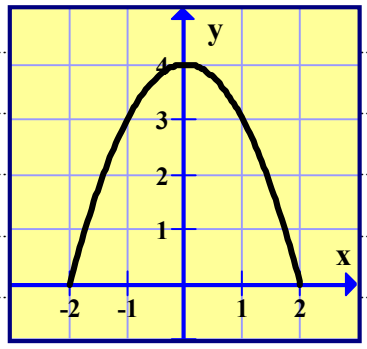
تصميم علبة :

(9) علبة على شكل اسطوانة دائرية قائمة مفتوحة من أعلى وحجمها $1000\ cm^3$.

ما الإبعـــــاد التي تستخـــدم أقل مادة ممكنـــــــة ؟

(10) يراد رسم مستطيل أحد بعدية منطبق على محور السينات ورأساه الآخران على منحنى الدالة $y=-x^2+4$

ما أكبر مساحة ممكنة لهذا المستطيل ؟



www.almanahj.com

أكبر مستطيل :

(11) مستطيل قاعدته على محور السينات ورأساه العلويان على القطع المكافئ $y=12-x^2$ ،

ما أكبر مساحـــــة للمستطيل ؟ وما أبعـــــادة ؟

adel hesen
الثاني عشر العلمي الفصل الدراسي الثاني
الوحدة 3 تطبيقات التفاضل
adel hesen

[3-4]: النمذجة والأوفقية

اليوم والتاريخ : ..... / / 2013 م

أصغر محيـــــــط :

(12) ما أصغـــر محيط ممكن لمستطيل مساحتـــــة $16\ in^2$ ؟ ومـــــا أبعـــــادة ؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

امتحان 2007 / 2008 م

(13) ما أكبر مساحة ممكنة لمستطيل محيطة $128\ m$ وما أبعاده عندئذ .

.....

.....

.....

www.almanahj.com

.....

.....

.....

(14) مزرعة على شكل قطعة مستطيلة من الأرض تقع على حافة نهر مستقيم يراد وضع سياج على الجوانب الثلاث الأخرى ، ما أكبر مساحة يمكن إحاطتها بسياج طوله $800\ m$ ؟ وما أبعـــــــادها ؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

نموذج الوزارة 2009 / 2010 م

يريد رجل أقامة سياج حول قطعة أرض مستطيلة الشكل تقع على حافة نهر مستقيم . ويراد وضع سياج حول الجوانب الثلاثة الأخرى.

(15) أوجد أبعاد القطعة ليكون طول السياج أقل ما يمكن علماً بأن مساحة قطعة الأرض 800 متر مربع .

www.almanahj.com

(16) يراد التخطيط لغلق ركن في الربع الأول بقطعة مستقيمة طولها 20 وحدة طول . نبدأ العمل لغلق الركن من نقطة (a , 0) إلى نقطة (0 , b) . أثبت أن مساحة المثلث الذي تحده القطعة المستقيمة يكون أكبر ما يمكن عند a = b .

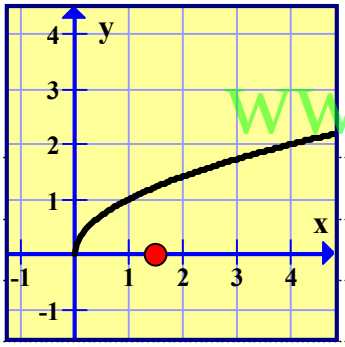
(17) إيجاد زاوية :

ضلعان في مثلث طولهما a و b والزاوية بينهما θ . ما قيمة θ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن ؟

$$(A = \frac{1}{2} ab \sin\theta)$$

حساب التفاضل والتكامل والهندسة :

(18) ما أقصر بعد للنقطة $(\frac{3}{2}, 0)$ عن المنحنى $y = \sqrt{x}$ ؟



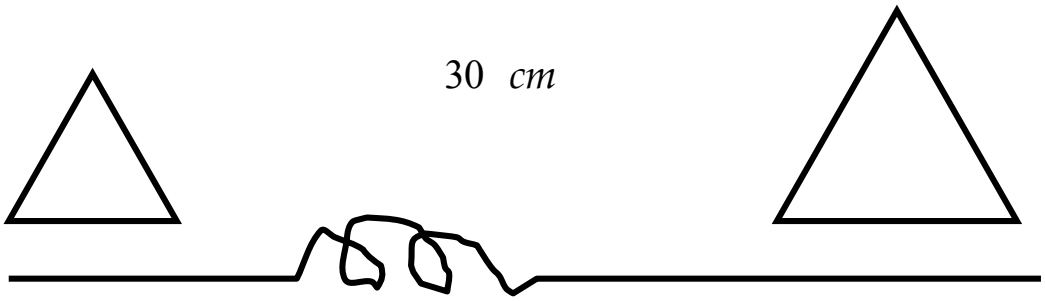
www.almanahj.com

مخروط داخل كرة :

(19) أوجـــــد أكبر حجم لمخروط دائري قائم داخل كرة طول نصف قطرها 3

امتحان 2009 / 2010 م

(20) سلك طوله $30\ cm$ نريد أن نصنع منه مثلثين كل منهما متطابق الأضلاع عين طول ضلع كل من ليكون مجموع مساحتيهما أصغر ما يمكن .



ارشاد

مساحة المثلث المتطابق الأضلاع الذي طول ضلعه l هي :

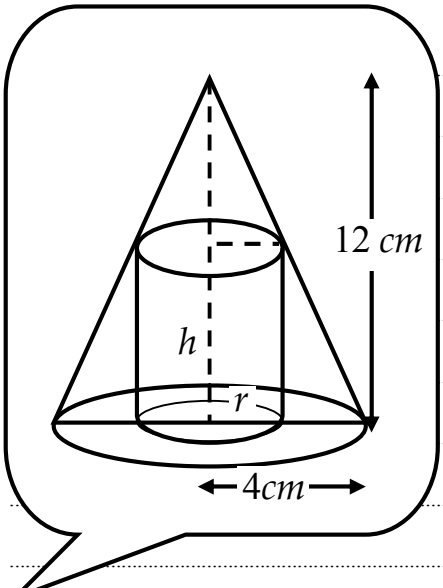
$$\frac{\sqrt{3}}{4} l^2$$

www.almanahj.com

امتحان الإعادة 2007 / 2008 م

في الشكل المجاور : مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته $4\ cm$ وارتفاعه $12\ cm$ رسم داخله اسطوانة دائرية قائمة بحيث يكون محور الاسطوانة ومحور المخروط متقابلين وكذلك القاعدتين .

(21) أوجـــــد أكبر حجم لهذه الاسطوانة .



نظرية (6) : القيمة العظمى للربح

القيمة العظمى للربح (إذا وجدت) تحدث عند مستوى الإنتاج الذي عنده الدخل الحدي يساوي التكلفة الحدية .

$r(x)$ = الدخل من بيع x سلعة . $\quad \dfrac{dr}{dx}$ = دخل حدي .

$c(x)$ = تكلفة إنتاج الـ x سلعة . $\quad \dfrac{dc}{dx}$ = تكلفة حدية .

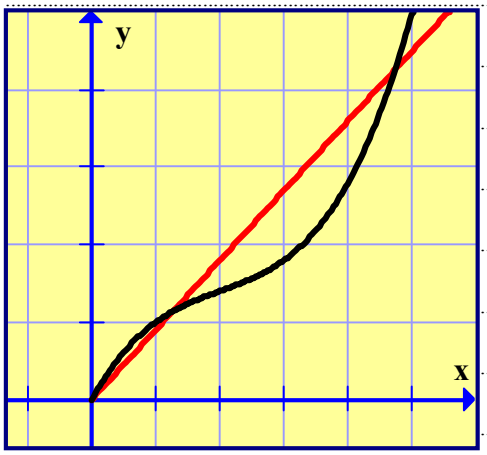
$p(x)$ = الربح من بيع x سلعة . $\quad \dfrac{dp}{dx}$ = ربح حدي .

$$p(x) = r(x) - c(x)$$

www.almanahj.com

(22) افترض أن : $r(x) = 9x$ و $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ حيث x تمثل آلاف وحدات المنتج

هل يوجد مستوى إنتاج يحقق قيمة عظمى للربح ؟ إذا كان كذلك ، ما هـــــو ؟



افترض أن $b(x) = -x^2 + 12x - 20$ تمثل الربح بآلاف الدراهم لمبيع x (بالمئات) من أجهزة كهربائية على الفترة $[0,15]$

(23) هل يوجد مستوى إنتاج يحقق قيمة عظمى للربح ؟ إذا كان كذلك ، فما هو ؟

(24) ما مستوى الإنتاج الذي يكون الربح يساوي صفرا ؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

امتحان الإعادة 2009 / 2010 م

(25) مصنع لعب أطفال ينتج أجهزة حاسوب ، يبيع المصنع x جهاز من نفس النوع أسبوعيا بمبلغ $(R(x) = 20x)$ درهم ، فإذا كانت دالة التكلفة لإنتاج x جهاز تعطى بالعلاقة $(C(x) = 0.002x^2 + 8x + 5000)$ درهم .

www.almanahj.com

فأوجـــــــد : عدد أجهزة الحاسوب التي يجب أن يبيعها المصنع ليحقق أكبر ربح ممكن .

ارشاد .

$P(x) = R(x) - C(x)$

حيث $P(x)$ دالة الربح

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

امتحان 2007 / 2008 م

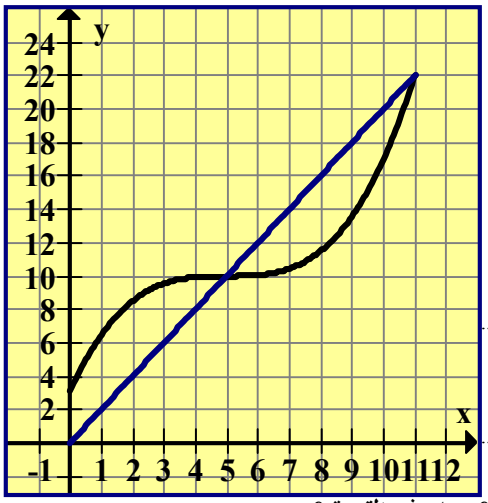
(26) مصنع أدوية ينتج البنسلين السائل ويبع العبوة الواحدة من الحجم الكبير بمبلغ 200 درهم ، فإذا كانت دالة التكلفة لإنتاج عدد x من العبوات أسبوعياً تعطى بالعلاقة : $C(x)=500000+80x+0.003x^2$

وإذا علم أن الطاقة الإنتاجية لهذا المصنع 30000 عبوة في الأسبوع .

هل يوجـــــد إنتاج يحقق قيمة عظمى للربح اسبوعياً ؟ إذا كانت كذلك ما هـــــو ؟

www.almanahj.com

امتحان الإعادة 2007 / 2008 م



في الشكل المجاور $C(x)$ تمثل التكلفة بملايين الدرهم ،

$r(x)$ تمثل الدخل بملايين الدراهم حيث (x) تمثل وحدات

جهاز الحاسوب المنتجة من شـــــــــــــــــركة ما

بآلاف الوحـــــــــدات حيث $0 \le x \le 11$

اجب عما يلي :

(27) حدد الفترات التي تحقق فيها الشركة ربحاً .

(28) حدد الفترات التي تحقق فيها الشركة خسارة .

(29) أوجـــــــــد قيمة تقريبية لمستوى الإنتاج التي تحقق فيها الشركة ربحية عظمى ؟ وما هذه القيمة ؟

(30) أوجـــــــد $C(x)$, $r(5)$ وماذا تلاحـــــظ .

(31) أوجـــــــد $C(0)$ وما الدلالة عليها .

نظرية (7) : تخفيض إلى أصغر قيمة للتكلفة

مستوى التكلفة (إذا وجد) الذي عنده تكون التكلفة المتوسطة أصغر ما يمكن هو المستوى الذي عنده تكون التكلفة المتوسطة تساوي التكلفة الحدية .

□

ملاحظة

إذا وجدت نقطة عندها التكلفة الحدية = التكلفة المتوسطة يجب إن تتأكد إن عندها توجد قيمة صغرى مطلقة للتكلفة المتوسطة وبالتالي يوجد مستوى تكون فيه التكلفة المتوسطة اصغر ما يمكن .

(32) افترض إن $c(x)=x^3-6x^2+15x$ حيث $c(x)$ تكلفة إنتاج x من آلاف الوحدات

هل هناك مستوى إنتاج يخفض التكلفة المتوسطة لأقل قيمة لها ؟ إذا كان كذلك ، فما هـــــــي ؟

www.almanahj.com

(33) لتكن الكلفة (بمئات الدراهم) لإنتاج x (بمئات الوحدات) من سلعة مـــــا

هل هناك مستوى إنتاج يخفض التكلفة المتوسطة لأقل قيمة ؟ إذا كان كذلك فما هـــــــي ؟

تمنياتي بالنجاح ولا تنسونا بالدعاء