مدرسة توام النموذجية الخاصة بالعين

26

مثال محلول +7 تمارين

الصف الثانى عشر العلمى

تطبيقات على القيم القصوي المطلقة

(القيم المثلي)

HILAL

الفصل الدراسي الثاني

إعداد : أ.هلال حسين

مدرسة خليفة بن زايد الثانوية

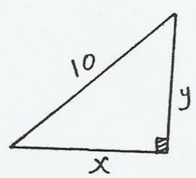
"تطبيقات على القيم القصوى"

العين "أمثلة محلولة" إعداد أ. هلال حسين

(1) يراد رسم مثلث قائم الزاوية طول وتره (10)cm ، أوجد طولي ضلعي القائمة بحيث يكون محيطه أكبر ما يمكن

($5\sqrt{2}$ cm , $5\sqrt{2}$ cm)

الحل



المعادلة المساعدة:

$x^2 + y^2 = 100$

$\Rightarrow y = \sqrt{100 - x^2}$

(T) المحيط $= y + 10 + x$

$(T) = x + 10 + \sqrt{100 - x^2} \quad : x \in [0,10]$

$\frac{dT}{dx} = 1 - \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{100 - x^2}} = 0$

$1 = \frac{x}{\sqrt{100 - x^2}} \Rightarrow \sqrt{100 - x^2} = x$

(بالتربيع)

$\Rightarrow 2x^2 = 100$

$\Rightarrow x = \mp\sqrt{50} \quad : -\sqrt{50} \notin \,]0,10[$

$+\sqrt{50} \in \,]0,10[$

∴ قيم x للنقاط الحرجة هي $\{5\sqrt{2}\}$

$T|_{x=0} = 20 \quad , \quad T|_{x=10} = 20 \quad , \quad T|_{x=5\sqrt{2}} = 24.14$

∴ توجد قيمة عظمى مطلقة عند $x = 5\sqrt{2}$

ويكون المحيط أكبر ما يمكن عندما يكون طولي ضلعي القائمة

$5\sqrt{2} \quad , \quad 5\sqrt{2}$

#

إعداد: أ/ هلال حسين

2) يبيع مصنع تلفزيونات (x) جهازا من منتجاته أسبوعيا، فإذا كان ثمن بيع الجهاز الواحد هو $(-\frac{5}{3}x+1150)$ وتكلفة انتاج هذه الأجهزة هو $(100000+30x+0.2x^2)$ درهما، أوجد عدد الأجهزة التي يجب أن يبيعها المصنع أسبوعيا حتى يحقق أكبر ربح ممكن

(300 جهاز)

الحل

دالة الربح = دالة البيع - دالة التكلفة

$$P(x) = x\left(-\frac{5}{3}x + 1150\right) - \left(0.2x^2 + 30x + 100000\right)$$

$$\Rightarrow P(x) = -\frac{5}{3}x^2 + 1150x - 0.2x^2 - 30x - 100000$$

$$\Rightarrow P'(x) = -\frac{10}{3}x + 1150 - 0.4x - 30$$

$$\Rightarrow P'(x) = -\frac{56}{15}x + 1120 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{15}{56} \times 1120 = 300$$

$$\therefore P''(x) = -\frac{56}{15}$$

عند $x = 300 \Rightarrow P''(300) = \frac{-56}{15} < 0$

∴ توجد قيمة عظمى محلية وهي الوحيدة

∴ هي القيمة العظمى المطلقة عند $x = 300$

∴ عدد الأجهزة التي يجب بيعها المصنع أسبوعيا 300 جهاز المحقق أكبر ربح ممكن

\#

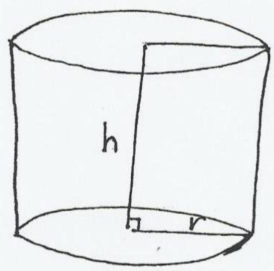
هلال

إعداد: أ/ هلال حسين

3) يراد صنع خزان من المعدن على شكل اسطوانة دائرية قائمة مغلقة سعتها ثابتة وتساوي $(128)\pi s^3$ أوجد أبعاد الخزان لتكون كمية المعدن المستخدم في صنعه أقل ما يمكن.

$(r = 4cm , h = 8cm)$

الحل



المعادلة المساعدة:

$\because S = \pi r^2 h$

$128\cancel{\pi} = \cancel{\pi} r^2 h$

$h = \dfrac{128}{r^2}$

حيث $h > 0 , r > 0$

المساحة الكلية $= 2\pi r h + 2\pi r^2$

$A = 2\pi \cancel{r} * \dfrac{128}{r^{\cancel{2}}} + 2\pi r^2$

$\Rightarrow A = \dfrac{256\pi}{r} + 2\pi r^2$

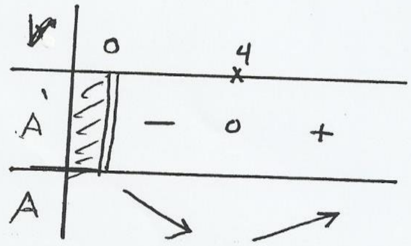
$\Rightarrow A' = \dfrac{-256\pi}{r^2} + 4\pi r = 0$

$\Rightarrow -\dfrac{256\cancel{\pi}}{r^2} = 4\cancel{\pi} r$

$\Rightarrow 64 = r^3$

$\therefore r = 4m.$

هلال



$\therefore$ توجد قيمة صغرى محلية وهي الوحيدة

هي القيمة الصغرى المطلقة عند $r = 4m$

$\therefore h = \dfrac{128}{16} = 8m.$

$\therefore$ أبعاد الخزان هي $r = 4m$, $h = 8$ لتكون كمية المعدن المستخدم في صنعه أقل ما يمكن

#

(3)

إعداد: أ/ هلال حسين

4) تنتج شركة للصناعات الدوائية نوعاً من البنسلين في عبوات خاصة فإذا كانت دالة البيع $h(x) = 20x$ ، ودالة التكلفة: $S(x) = 5000 + 8x + 0.003x^2$ حيث (x) عدد العبوات المنتجة يومياً وكل من $h(x)$ و $S(x)$ بالدراهم، أوجد عدد العبوات التي يجب أن تنتجها الشركة يومياً لتحقق أكبر ربح ممكن

(2000 عبوة)

الحل

$\because L(x) = h(x) - S(x)$

$\Rightarrow L(x) = 20x - 5000 - 8x - 0.003x^2$

$\Rightarrow L'(x) = 20 - 8 - 0.006x = 0$

$\Rightarrow 12 = 0.006x$

$\Rightarrow \boxed{x = 2000}$

هلال

$\because L''(x) = -0.006x$

عند $x = 2000 \Leftarrow L''(2000) < 0$

$\therefore$ توجد قيمة عظمى محلية وهي الوحيدة

$\therefore$ هي القيمة العظمى المطلقة عند $x = 2000$

$\therefore$ عدد العبوات $=$ 2000 عبوة لتحقق أكبر ربح.

#

5) صاحب مطبعة يربح عن كل كتاب مبلغ (6) دراهم طالما عدد الكتب المراد طباعتها لا يتجاوز (100) كتاب فإذا زاد عدد الكتب عن (100) فإن الربح عن كل كتاب ينقص (2) فلس على كل كتاب زيادة ، أوجد عدد الكتب الذي يحقق أكبر ربح للتاجر (200 كتاب)

الحل

نفرض عدد الكتب الزيادة $= x$

$\therefore$ العدد الكلي للكتب $= x+100$

التخفيض في ربح الكتاب نظير الزيادة $= \frac{2}{100}x$

$= \frac{1}{50}x$

الربح في الكتاب بعد الزيادة $= \left(6-\frac{1}{50}x\right)$

$S(x) = (x+100)\left(6-\frac{1}{50}x\right)$

$S'(x) = \frac{-2}{50}x + 4 = 0$

$\Rightarrow x = 100$

هلال

$S''(x) = \frac{-2}{50} \Rightarrow S''(100) < 0$

$\therefore$ توجد قيمة عظمى محلية وهي الوحيدة .

$\therefore$ هي العظمى المطلقة عند $x=100$

$\therefore$ العدد الكلي للكتب $= 100+100 = 200$ كتاب يحقق للتاجر أكبر ربح

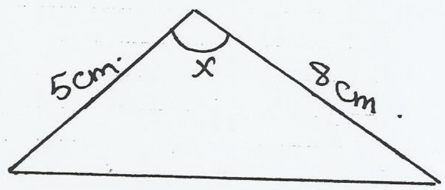
#

(5) إعداد : أ/ هلال حسين

6) مثلث طولا ضلعين فيه (5cm) ، (8cm) وقياس الزاوية بينهما (x)
أوجد قياس (x) التي تجعل مساحة منطقة أكبر ما يمكن

$\left(\frac{\pi}{2}\right)$ rad.

الحل



هلال

$$M = \frac{1}{2} * 8 * 5 * \sin x$$

$$M = 20 \sin x$$

$$\frac{dM}{dx} = 20 \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{0}{20} = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -20 \sin x$$

$$\left.\frac{d^2M}{dx^2}\right|_{x=\frac{\pi}{2}} = < 0$$

∴ توجد قيمة عظمى محلية وهي الوحيدة عند $x = \frac{\pi}{2}$

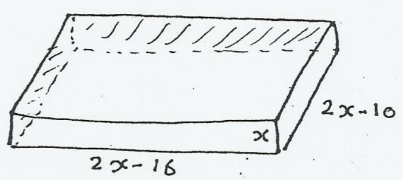
∴ هي القيمة العظمى المطلقة عند $x = \frac{\pi}{2}$

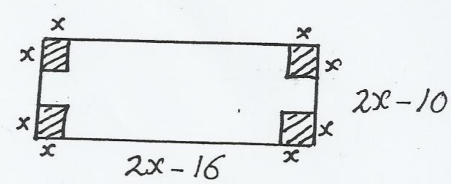
∴ قياس الزاوية = $\frac{\pi}{2}$ rad.

#

7) قطعة من الكرتون على شكل مستطيل أبعاده (16cm) ، (10cm) ، يراد صنع صندوق مفتوح من أعلى وذلك بقطع أربع مربعات متطابقة عند أطرافها، أوجد أبعاد الصندوق بحيث يكون حجمه أكبر ما يمكن

(2cm...)





(V) حجم الصندوق = الطول × العرض × الارتفاع .

$$V = (2x-16)(2x-10)x \quad : \quad x \in [0,5]$$

$$\therefore V = 160x - 52x^2 + 4x^3$$

$$V' = 160 - 104x + 12x^2 = 0$$

$$\therefore 3x^2 - 26x + 40 = 0$$

هلال

$$(3x-20)(x-2) = 0$$

إما $x = \frac{20}{3} \notin]0,5[$

أو $x = 2 \in]0,5[$

∴ م.قيم x للنقاط الحرجة هي $\{2\}$

نوجد قيمة النقط الحرجة والنقط الطرفية

$V(0) = 0$ ، $V(5) = 0$ ، $V(2) = 144$

∴ القيمة العظمى المطلقة عند $x = 2$ هي 144

الابعاد هي $12, 6, 2$ cm ليكون الحجم أكبر ما يمكن

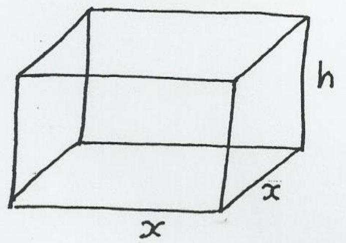
#

إعداد : أ/ هلال حسين

8) أوجد حجم أكبر صندوق على شكل شبه مكعب قاعدته مربعة الشكل مفتوح من أعلى يمكن صنعه باستخدام صفائح معدنية مساحتها $(4800 cm^2)$

$(32000 cm^3)$

الحل



$x^2 + 4xh =$ (المساحة الكلية (٣) المعادلة لمساحة ٨)

$\Rightarrow 4xh + x^2 = 4800$

$\therefore h = \dfrac{-x^2 + 4800}{4x}$

$V = x^2 h$

$V = x^2 * \dfrac{x^2 - 4800}{4x}$

$\therefore V = \dfrac{x^3 - 4800x}{4}$

$\therefore V' = \dfrac{3x^2 - 4800}{4} = 0$

$4800 = 3x^2 \Rightarrow x^2 = 1600$

$\boxed{\therefore x = 40}$

$V'' = \dfrac{-6}{4} x$

$V''\big|_{x=40} < 0$

∴ توجد قيمة عظمى محلية وهي الوحيدة.

∴ هي العظمى المطلقة عند $x = 40$

∴ $V = \dfrac{4800 \times 40 - (40)^3}{4}$

$= 32000 \, m^2$

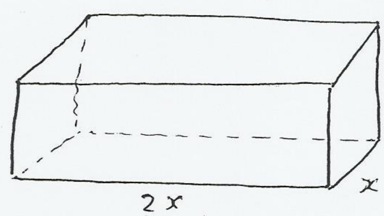
∴ حجم الصندوق $= 32000 cm^2$ أكبر ما يمكن

عندما تكون أبعاده $40, 40, 20$ Cm

(8) إعداد: أ/ هلال حسين

9) صندوق على شكل متوازي مستطيلات وله غطاء حجمه $(72cm^3)$ فإذا كان طول القاعدة ضعف عرضها. أوجد أبعاد الصندوق لتكون مساحته الكلية أقل ما يمكن
$(6, 4, 3)$

الحل



المعادلة المساعدة:

$V = 2x^2 h$

$72 = 2x^2 h$

$h = \frac{36}{x^2}$

$\therefore A = 6xh + 4x^2$

$A = \frac{216}{x} + 4x^2$

نجعل $A'(x) = \frac{-216}{x^2} + 8x = 0$

$\Rightarrow x^3 = 27$

$\Rightarrow x = \sqrt[3]{27} = 3$

$A''(x) = \frac{2 \times 216}{x^3} + 8$

$A''\Big|_{x=3} > 0$

∴ توجد قيمة صغرى محلية وهي الوحيدة

∴ هي القيمة الصغرى المطلقة

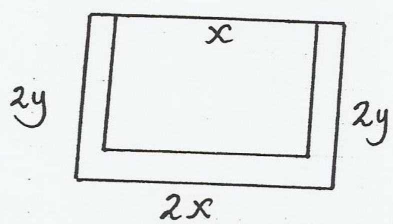
الابعاد هي: $(3, 6, 4)$ لتكون المساحة أقل ما يمكن

#

10) سلك طوله .. (12 m) ثني على شكل مستطيل بحيث عبر السلك على كل ضلع مرتين ماعدا ضلع واحد فقط مر عليه مرة واحدة . أوجد أبعاد المستطيل حتى تكون مساحته أكبر ما يمكن .

$(\frac{3}{2}m, 2m)$

الحل



المعادلة المساعدة :

$3x + 4y = 12$

$4y = 12 - 3x$

$y = \frac{12-3x}{4}$

هدف

$A = xy$

$A = x\left(\frac{12-3x}{4}\right) : x \in [0,4]$

$A = \frac{12x - 3x^2}{4}$

$A'(x) = \frac{12-6x}{4} = 0$

$\Rightarrow 12 - 6x = 0 \Rightarrow x = 2 \in]0,4[$

قيم x للنقاط الحرجة $= \{2\}$

نوجد قيم النقاط الحرجة والنقط الطرفية

$A(0) = 0$

$A(2) = \cancel{2} \times \frac{6}{\cancel{4}} = 3$ قيمة عظمى مطلقة عند $x = 2$

$A(4) = 0$

$\therefore x = 2 \quad , \quad y = \frac{12-6}{4} = \frac{3}{2}$

$\therefore$ أبعاد المستطيل $= \frac{3}{2}m, 2m$ نحصل على مساحة أكبر ما يمكن

(10)

إعداد : أ/ هلال حسين

11) أوجد عددين موجبين مجموعها 40 بحيث يكون مجموع مربعيهما أقل ما يمكن
(20, 20)

الحل

العدد الأول = x ، الثاني = y

$x^2 + y^2 = h$

المعادلة المساعدة

$y + x = 40$

$y = 40 - x$

هلهم

$h = x^2 + (40 - x)^2 \quad : x \in [0, 40]$

$h' = 2x + 2(40 - x) * -1$

$h' = 2x - 2(40 - x)$

$h' = 2x - 80 + 2x = 4x - 80 = 0$

$x = 20 \in]0, 40[$

$h(0) = (40)^2 = 1600$

$h(20) = (20)^2 + (20)^2 = 800 \Rightarrow$ قيمة صغرى مطلقة.

$h(40) = (40)^2 = 1600$

العددان هما

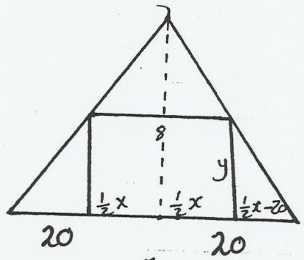
20 , 20.

#

(11) إعداد: أ/ هلال حسين

12) مثلث متساوي الساقين قاعدته $40cm$, وارتفاعه $8cm$ يراد قطع مستطيل منه تقع رأسان منه على قاعدة المثلث والرأسان الآخران على الساقين. أوجد أكبر مساحة لهذا المستطيل؟

$(80cm^2)$



المعادلة المساعدة :

$$\frac{\frac{1}{2}x-20}{5\,\cancel{20}} = \frac{y}{\cancel{8}\,2}$$

$$\frac{y}{2} = \frac{x}{10} - \frac{20}{5}$$

$$y = \frac{x}{5} - 8$$

الحل

$$A = yx$$

$$A = x\left(8 - \frac{x}{5}\right) : x \in [0,40]$$

$$A = 8x - \frac{x^2}{5}$$

هلال

$$A' = 8 - \frac{2}{5}x = 0$$

$$\overset{4}{\cancel{8}} = \frac{\cancel{2}}{5}x \Rightarrow x = 20 \in\,]0,40[$$

$$A(0) = 0 \quad , \quad A(40) = 0$$

$$A(20) = 20(8-4) = 20 \times 4 = 80$$

قيمة عظمى مطلقة

∴ تكون المساحة أكبر ما يمكن عندما تساوي $\boxed{80\,cm}$

#

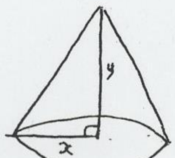
إعداد : أ/ هلال حسين

(12)

13) مثلث قائم الزاوية طول وتره ثابت (9Cm) وطول ضلعي القائمة x و y فإذا دار المثلث حول أحد ضلعي القائمة مكونا مخروطا. أوجد أكبر حجم ممكن للمخروط.

$(54\sqrt{3}\pi cm^3)$

الحل



* معادلة المساعدة

$$y^2 = 81 - x^2$$

$$y = \sqrt{81 - x^2}$$

حيث $x \in [0, 9]$

$$A = \frac{1}{3}\pi x^2 (y)$$

$$A = \frac{\pi}{3} x^2 (\sqrt{81 - x^2})$$

$$A' = \frac{2\pi}{3} x \sqrt{81 - x^2} - \frac{\cancel{2}x \times \frac{\pi}{3} x^2}{\cancel{2}\sqrt{81 - x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow 2x(81 - x^2) - x^3 = 0$$

$$162x - 2x^3 - x^3 = 0$$

$$\Rightarrow 54x - x^3 = 0 \Rightarrow x(54 - x^2) = 0$$

$$x = 0 \cancel{\in}]0, 9[$$

$$x = \sqrt{54} \in]0, 9[$$

$$A(0) = 0$$

$$A(\sqrt{54}) = 54\sqrt{3}\pi$$

$$A(9) = 0$$

أكبر قيمة للحجم: $= 54\sqrt{3}\pi Cm^3$

عندما تكون $x = 3\sqrt{6}, 3\sqrt{3}$ cm

إعداد: م/ هلال حسين

14) عين النقاط المنحنى التي يكون ميل المماس عندها أقل ما $(y = x^3 - 6x^2 + 5)$ يمكن ... $(2, -11)$

الحل

$m = \frac{dy}{dx}$ ميل المماس

$m = 3x^2 - 12x$

$m' = 6x - 12 = 0$

$\Rightarrow \boxed{x = 2}$

هلال

$m'' = 6$

$m''\big|_{x=2} = 6 > 0$

∴ توجد قيمة صغرى محلية وهي الوحيدة

∴ هي القيمة الصغرى المطلقة.

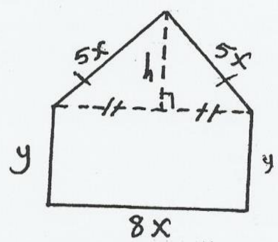
$x = 2 \Rightarrow y = -11$

النقطة $(2, -11)$ يكون الميل عندها أكبر ما يمكن

#

(14) إعداد: أ/ هلال حسين

15) سلك طوله 90cm كما هو موضح بالشكل المجاور (الشكل الخماسي) أوجد أكبر مساحة ممكنة لهذا الشكل. ($540cm^2$)



المعادلة المساعدة:

$90 = 2y + 18x$

$\Rightarrow \boxed{y = 45 - 9x}$

$h^2 = 25x^2 - 16x^2$

$h^2 = 9x^2 \Rightarrow \boxed{h = 3x}$

الحل

$A = 8xy + \frac{1}{2} 8xh$

$A = 8x(45 - 9x) + 4x * 3x$

$A = 360x - 72x^2 + 12x^2$

$A = 360x - 60x^2 : x \in [0,5]$

$A' = 360 - 120x = 0$ مهمل

$\Rightarrow x = 3 \in]0,5[$

$A(0) = 0$ $A(5) = 300$

$A(3) = 540$

∴ قيمة عظمى مطلقة عند $x = 3$

∴ أكبر قيمة للمساحة هي $\boxed{540cm^2}$

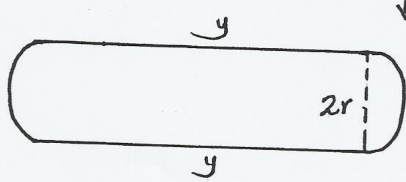
#

إعداد : أ/ هلال حسين

15) ملعب على شكل مستطيل ينتهي بنصفي دائرة محيطه ($240m$)، أوجد طول نصف قطر الدائرة حتى تكون مساحته أكبر ما يمكن

($\frac{120}{\pi}$ m.)

الحل



المعادلة المساعدة

$240 = 2y + 2\pi r$

$120 = y + \pi r$

$y = 120 - \pi r$

$\therefore V = y * 2r + \pi r^2$

$V = y * 2r + \pi r^2$

$V = 2r(120 - \pi r) + \pi r^2$

$V = 240r - \pi r^2$

$V' = 240 - 2\pi r = 0 \Rightarrow r = \frac{120}{\pi}$

$V'' = -2\pi$

$V''\Big|_{r=\frac{120}{\pi}} < 0$

$\therefore$ توجد قيمة عظمى محلية وهي الوحيدة.

$\therefore$ هي العظمى المطلقة عند $r = \frac{120}{\pi}$

$\therefore$ تكون المساحة أكبر ما يمكن عند $r = \frac{120}{\pi}$ m

هلال

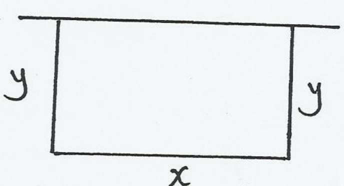
#

إعداد: أ/ هلال حسين

17) أرض على محاذاة نهر أراد صاحبها إحاطة جوانبها الثلاثة بسياج طوله (800m)، أوجد أبعاد هذه الأرض حتى تكون مساحتها أكبر ما يمكن

(200m, 400m)

الحل



المعادلة المساعدة:

$$\therefore 2y + x = 800$$

$$y = \frac{800 - x}{2}$$

$$y = 400 - \frac{x}{2}$$

$$A = xy$$

$$A = x\left(400 - \frac{x}{2}\right) : x \in [0, 800]$$

$$A = 400x - \frac{1}{2}x^2$$

$$A' = 400 - x = 0$$

$$\Rightarrow x = 400 \in]0, 800[$$

قيم x للنقاط الحرجة هي = $\{400\}$ ...

هلال

$$A(0) = 0$$

$$A(800) = 0$$

$A(400) = 80000 \Rightarrow$ قيمة عظمى مطلقة عند $x = 400$

$$\therefore y = 400 - \frac{400}{2} = 400 - 200 = \boxed{200\text{ m}}$$

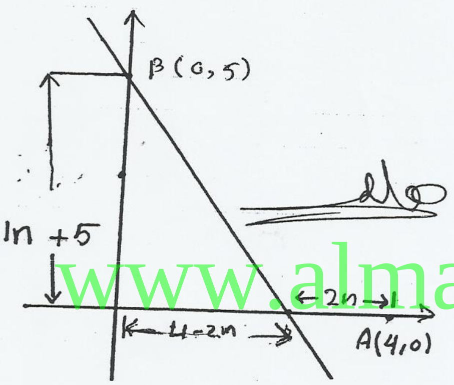
∴ الأبعاد هي 200 ، 400

إعداد: م/هلال حسين

18) $A(4,0)$, $B(0,5)$ بدأت نقطة تتحرك من A على محور السينات باتجاه نقطة الأصل بسرعة (ثانية\وحدة 2) وفي نفس اللحظة بدأت نقطة أخرى بالحركة من نقطة B مبتعدة عن نقطة الأصل على محور الصادات بسرعة منتظمة (ثانية\وحدة 1) متى يكون البعد بين النقطتين أقل ما يمكن

(البعد: 0.65)

الحل



$$F = \sqrt{(4-2n)^2+(n+5)^2}$$

$$F' = \frac{2(4-2n)*20 + 2(n+5)}{2\sqrt{(4-2n)^2+(n+5)^2}}$$

$$F' = \frac{10n-6}{2\sqrt{(4-2n)^2+(n+5)^2}}$$

$$F' = 0 \Rightarrow 10n-6=0 \Rightarrow n=0.6$$

x		0.6	
F'	−	0	+
F	↘		↗

∴ توجد قيمة صغرى محلية وهي الوحيدة.

∴ هي القيمة الصغرى المطلقة عند $n=0.6$

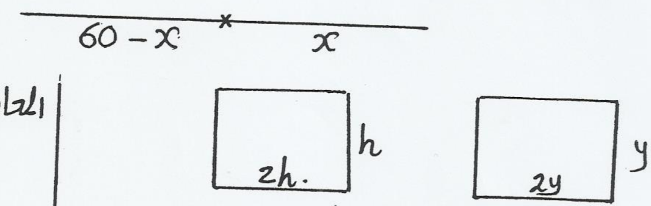
∴ عند $x=0.6$ يكون البعد أقل ما يمكن

#

(18) إعداد: م/هلال حسين

19) سلك طوله (60cm) قطع إلى جزأين فتكون من كل جزء مستطيل طوله ضعف عرضه أوجد أقل مساحة ممكنة للمستطيلين ($100cm^2$..)

الحل



المعادلة المساعدة :

$\therefore 6y = x$

$\boxed{y = \frac{x}{6}}$

$6h = 60 - x$

$\boxed{h = 10 - \frac{x}{6}}$

$\therefore A = 2y^2 + 2h^2$

$A = 2\frac{x^2}{36} + 2(10 - \frac{x}{2})^2 : x \in [0, 60]$

$A = \frac{x^2}{18} + 2(100 - 10 \cdot \frac{x}{6} \cdot 2 + \frac{x^2}{36})$

$A = \frac{2x^2}{18} - \frac{20}{3}x + 200$

$A = \frac{x^2}{9} - \frac{20}{3}x + 200$

$\frac{dA}{dx} = \frac{2x}{9} - \frac{20}{3} = 0 \Rightarrow x = 30 \in]0, 60[$

نقطة حرجة

$A(0) = 200$

$A(30) = 100 \Leftarrow x = 30$ قيمة صغرى محلية عند

$A(60) = 400$

$\therefore$ أقل مساحة $= 100cm^2$

(19)

إعداد : أ/ هلال حسين

20) جسم يتحرك حسب العلاقة $S = n^3 - 6n^2 + 24 + 15$ أوجد أقل سرعة ممكنة له. $(12m/s.)$

الحل

$$S = n^3 - 6n^2 + 24n + 15$$

لاحظ: $S' = v$

$$\therefore V = 3n^2 - 12n + 24$$

$$V' = 6n - 12 = 0 \Rightarrow \boxed{n = 2}$$

$$V'' = 6 \Rightarrow V''\Big|_{n=2} = 6 > 0$$

هلال

∴ توجد قيمة صغرى محلية وهي الوحيدة
∴ هي القيمة الصغرى المطلقة عند $n = 2$

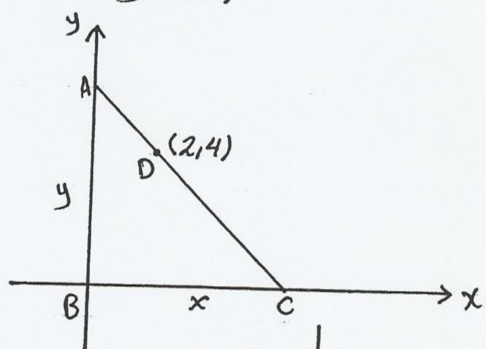
$$V\Big|_{n=2} = 12\ m/s$$

#

(20) إعداد: أ/ هلال حسين

21) في الشكل المرسوم: أوجد أقل مساحة ممكنة للمثلث ABC

(16 وحدة مربعة)



الحل

المعادلة المساعدة:

$\overset{\text{الميل}}{m}(\overline{CD}) = \overset{\text{الميل}}{m}(\overline{DA})$

$\frac{4}{2-x} = \frac{y-4}{0-2}$

$(2-x)(y-4) = -8$

$y-4 = \frac{8}{x-2}$

$y = \frac{8}{x-2} + 4$

$\therefore y = \frac{4x}{x-2}$

هلال

$\because A = \frac{1}{2} xy$

$A = \left(\frac{1}{2} x\right)\left(\frac{4x}{x-2}\right)$

$A = \frac{2x^2}{x-2}$

$A' = \frac{2x^2-8x}{(x-2)^2} = 0$

$4x^2 - 8x = 0$

$\Rightarrow x(2x-8) = 0$

$x = 0$ مرفوضة $\Rightarrow$ لأن $x > 0$

$2x = 8 \Rightarrow x = 4$

x		4	
A'	$-$	0	$+$
A	$\searrow$		$\nearrow$

توجد قيمة صغرى محلية وهي الوحيدة

$\therefore$ هي الصغرى المطلقة

$x = 4 \Rightarrow A(4) = 16 \times 2$ $= 16$ "وحدة مربعة"

$\therefore$ أقل مساحة ممكنة هي 16 وحدة مربع

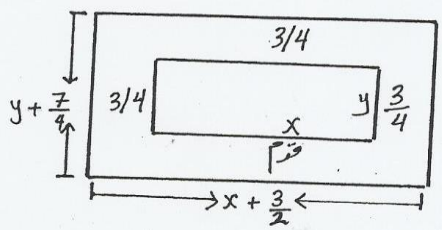
(21)

إعداد: أ/ هلال حسين

22) لوحة مستطيلة الشكل محيطها (24) قدم يراد عمل إعلان على أكبر مساحة منها بشرط أن يترك هامشاً من أسفله وعرضه قدم واحد وثلاثة هوامش من الجهات الأخرى عرض كل منها $\frac{3}{4}$ قدم، أحسب بعدي اللوحة

(٦ $\frac{١}{٨}$ قدم، ٥ $\frac{٧}{٨}$ قدم)

الحل



$A = xy$

$A = x\left(\frac{35}{4} - x\right)$

$A = \frac{35}{4}x - x^2$

$A' = \frac{35}{4} - 2x = 0$

$\Rightarrow x = \frac{35}{8} \in \left[0, \frac{35}{4}\right]$

قيم x للنقاط الحرجة هي $\left\{\frac{35}{8}\right\}$

$A(0) = 0$

$A\left(\frac{35}{4}\right) = 0$

$A\left(\frac{35}{8}\right) = \left(\frac{35}{8}\right)^2$ قيمة عظمى محلية عند $x = \frac{35}{8}$

المعادلة المساعدة

المحيط $= 2\left(x + \frac{3}{2} + y + \frac{7}{4}\right)$

$24 = 2\left(x + \frac{3}{2} + y + \frac{7}{4}\right)$

$\therefore y = 12 - x - \frac{13}{4}$

$y = \frac{35}{4} - x$

$\therefore x \in \left[0, \frac{35}{4}\right]$

$\therefore$ عرض اللوحة $= \frac{35}{8} + \frac{3}{2} = 5\frac{7}{8}$ قدم

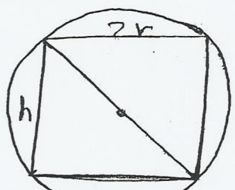
$\therefore$ طول اللوحة $= \frac{35}{8} + \frac{7}{4} = 6\frac{1}{8}$ قدم #

(22) إعداد: أ/ هلال حسين

23) أوجد ارتفاع اسطوانة دائرية قائمة ذات أكبر حجم والتي يكون رسمها داخل كرة نصف قطرها $3\sqrt{3}$ cm

(6cm)

الحل



المعادلة المساعدة :-

$\therefore h^2 = 108 - 4r^2$

$h = \sqrt{108 - 4r^2}$

حيث $h > 0 , r > 0$

هلال

$\therefore V = \pi r^2 h$

$V = \pi r^2 \sqrt{108 - 4r^2}$

$V' = 2\pi r \cdot \sqrt{108 - 4r^2} - \dfrac{8r \cdot \pi r^2}{2\sqrt{108 - 4r^2}}$

$V' = \dfrac{2\pi r \cdot 108 - 8\pi r^3 - 4\pi r^3}{\sqrt{108 - 4r^2}}$

$V' = \dfrac{216\pi r - 12\pi r^3}{\sqrt{108 - 4r^2}}$

$V' = 0 \Rightarrow 216\pi r - 12\pi r^3 = 0$

$12\pi r(18 - r^2) = 0$

$r = 0$ مرفوضة , $r = \sqrt{18}$

r		$\sqrt{18}$	
V'	$+$	0	$-$
V	$\nearrow$		$\searrow$

توجد قيمة عظمى محلية وهي الوحيدة

$\therefore$ هي المطلقة عند $r = \sqrt{18}$

$\therefore h\big|_{r=\sqrt{18}} = \sqrt{108 - 4 \times 18} = \sqrt{36} = \boxed{6\text{ cm}}$

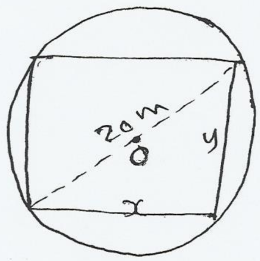
(23)

إعداد : أ/هلال حسين

24) أوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها (10cm)

(200 cm²)

الحل



المعادلة المساعدة:

$y^2 + x^2 = 400$

$y = \sqrt{400 - x^2}$

$x \in [0, 20]$

$A = xy$

$A = x\left(\sqrt{400 - x^2}\right)$

$A' = \sqrt{400 - x^2} + \dfrac{-2x^2}{2\sqrt{400 - x^2}}$

$A' = \dfrac{400 - 2x^2}{\sqrt{400 - x^2}}$

$A' = 0$ هام

$\Rightarrow 400 - 2x^2 = 0$

$\Rightarrow x = 10\sqrt{2} \in [0, 20]$

$A(0) = 0$

$A(10\sqrt{2}) = 200 \Leftarrow$ قيمة عظمى مطلقة.

$A(20) = 0$

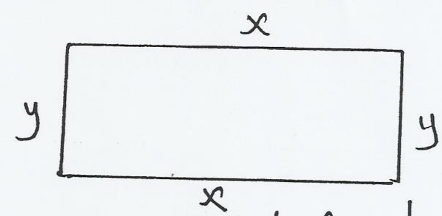
$\therefore$ أكبر مساحة $= 200\,cm^2$ عند $x = 10\sqrt{2}$

#

25) أوجد أبعاد قطعة أرض مستطيلة يراد إحاطتها بسياج تكلفته (1600) درهم علمًا بأن سعر المتر من السياج لأحد الجهات الأربعة (15) درهم وسعر المتر الجهات الثلاثة الباقية (5) دراهم بحيث يكون مساحتها أكبر ما يمكن

(40m, 80m)

الحل



المعادلة المساعدة:

$15x + 5x + 5y + 5y = 1600$

$\therefore y = 160 - 2x$

$x \in [0, 80]$

$A = xy$

$A = x(160 - 2x)$

$A' = 160 - 4x = 0$

$160 = 4x$

$\Rightarrow \boxed{x = 40}$

هلال

$x = 40 \in]0, 80[$

$\therefore$ قيم x للنقاط الحرجة هي: $\{40\}$

$A(0) = 0$

$A(40) = 3200 \leftarrow$ قيمة عظمى مطلقة عند $x = 40$

$A(80) = 0$

أبعاد المستطيل هي $x = 40,\ y = 160 - 2*40 = 80$

40, 80 m

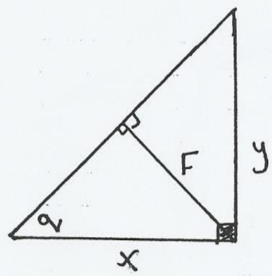
#

إعداد: أ/ هلال حسين (25)

26) مثلث قائم الزاوية طول وتره 10cm أوجد طول كل من ضلعي القائمة بحيث يكون طول العمود النازل من رأس القائمة إلى الوتر أكبر ما يمكن .

$(\sqrt{50}\text{ cm}, \sqrt{50}\text{ cm})$

الحل



$$\boxed{x^2+y^2=100}$$

حيث $x>0$

$$y=\sqrt{100-x^2}$$

هلال

$$\because \sin q = \frac{F}{x} = \frac{y}{10}$$

$$\frac{F}{x} = \frac{y}{10}$$

$$10F = xy = x\sqrt{100-x^2}$$

$$F = \frac{x\sqrt{100-x^2}}{10}$$

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\sqrt{100-x^2} + \frac{-x^2}{\sqrt{100-x^2}}}{10}$$

$$\frac{dF}{dx} = \frac{100-2x^2}{10\sqrt{100-x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow 100-2x^2=0 \Rightarrow x^2=50$$

$$\boxed{x=\sqrt{50}}$$

x		$\sqrt{50}$	
F'	$+$	0	$-$
F	$\nearrow$		$\searrow$

توجد قيمة عظمى محلية وهي الوحيدة عند $x=\sqrt{50}$

$$\therefore x=\sqrt{50} \quad , \quad y=\sqrt{100-50}=\sqrt{50}$$

#

"أرجو ملاحظة أن هناك طرق أخرى للحل" .

(26) إعداد : أ/ هلال حسين

* بعض التمارين *

1) إذا أردت أن تنشئ لمنزل حديقة مكونة من مستطيل مزروع بالزهور مساحته $10m^2$. وطريق مرصوف يحيط بالزهور عرضه متر واحد عند كل من ضلعين متقابلين للمستطيل $160cm$ عند كل من الضلعين الآخرين، فأوجد بعدي المستطيل لكي تكون مساحة الأرض اللازمة لذلك أصغر ما يمكن.

$(4m, 2.5m)$

2) قطعة من الورق مربعة الشكل طول ضلعها $24cm$ قطعت من أركانها الأربعة أربعة مربعات متساوية وثنيت الأجزاء البارزة لأعلى لتكون علبة على شكل متوازي المستطيلات. أوجد طول ضلع المربع المقطوع حتى يكون حجم العلبة أكبر ما يمكن

$(4cm.)$

هلال

3) ABC مثلث قائم الزاوية في B فيه $BC = 10cm$ ، $AB = 30cm$ ، أخذت نقطة D على $\overline{AC}$ ثم رسم $\overline{hD} \parallel \overline{BC}$ فقطع $\overline{AB}$ في h ، ورسم $\overline{DL} \parallel \overline{AB}$ فقطع BC في L. أثبت أن أكبر مساحة للمستطيل $hDBL$ هي $75cm^2$.

إعداد: م/ هلال حسين

4) إذا كان طول وتر مثلث قائم الزاوية يساوي $5\sqrt{2}$ سم ، أوجد طول ضلعي الزاوية القائمة بحيث تكون مساحة سطح المثلث قيمة عظمى

(5, 5)

5) حوض بدون غطاء قاعدته الأفقية مربعة الشكل وجدرانه مستطيلة الشكل بحيث يسع ($108\ m^3$) من الماء وهو مملوء. أوجد أقل قيمة لتكاليف تغطيته من الداخل بألواح من الصفيح الجيد الذي سعر المتر المربع منه 4 درهم.

(432 درهم)

هلال

6) صندوق على شكل متوازي مستطيلات بدون غطاء وقاعدته مربعة الشكل فإذا كانت سعة الصندوق $0.108\ m^3$ ، فأوجد أبعاد الصندوق عندما تكون مساحة جميع أوجهه أصغر ما يمكن

($0.3m, 0.6m, 0.6m$)

7) يراد صنع هيكل خارجي لثلاجة تسع $72\ m^3$ بحيث يكون طول القاعدة ضعف العرض. أوجد أبعاد الثلاجة إذا استخدمنا أقل مساحة ممكنة من المادة المصنوع منها الهيكل

($4m, 6m, 3m$)

إعداد: م/ هلال حسين (28)