

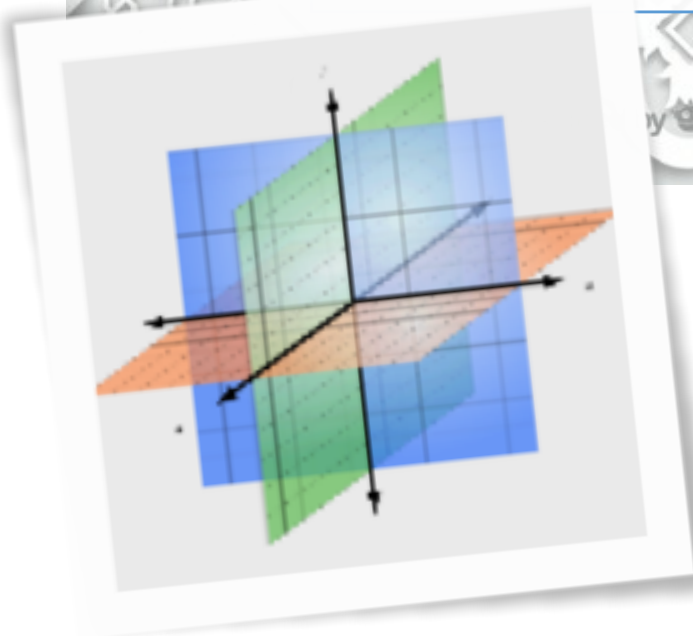
دولة الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربية و التعليم
إدارة قطاع العمليات د / نطاق 3
مدرسة أم عمارة للتعليم الثانوي
للبنات



❖ مؤشرات الأداء :

تتعرف الطالبة على : -

- مفهوم النظام الإحداثي الديكارتي
- التمثيل الديكارتي للمتجهات
- جمع المتجهات و طرحها بيانياً
- جمع المتجهات باستخدام المركبات
- ضرب متجه في كمية قياسية
- متجهات الوحدة
- طول المتجه و اتجاهه
- الضرب القياسي للمتجهات



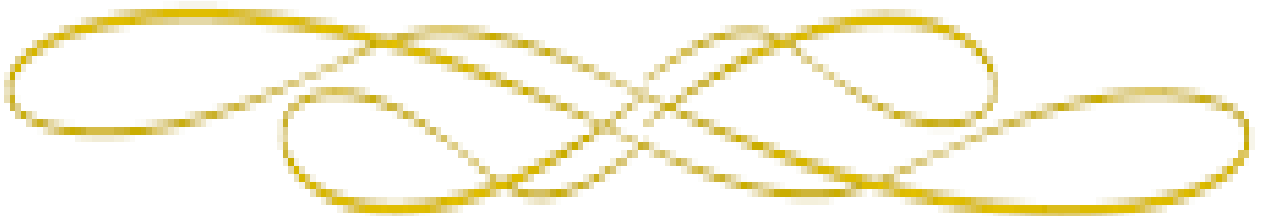
➤ مفهوم النظام الإحداثي الديكارتي

Algebra
Chapter 11

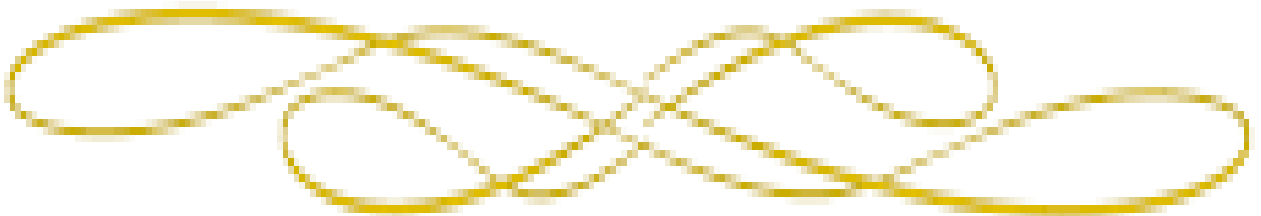
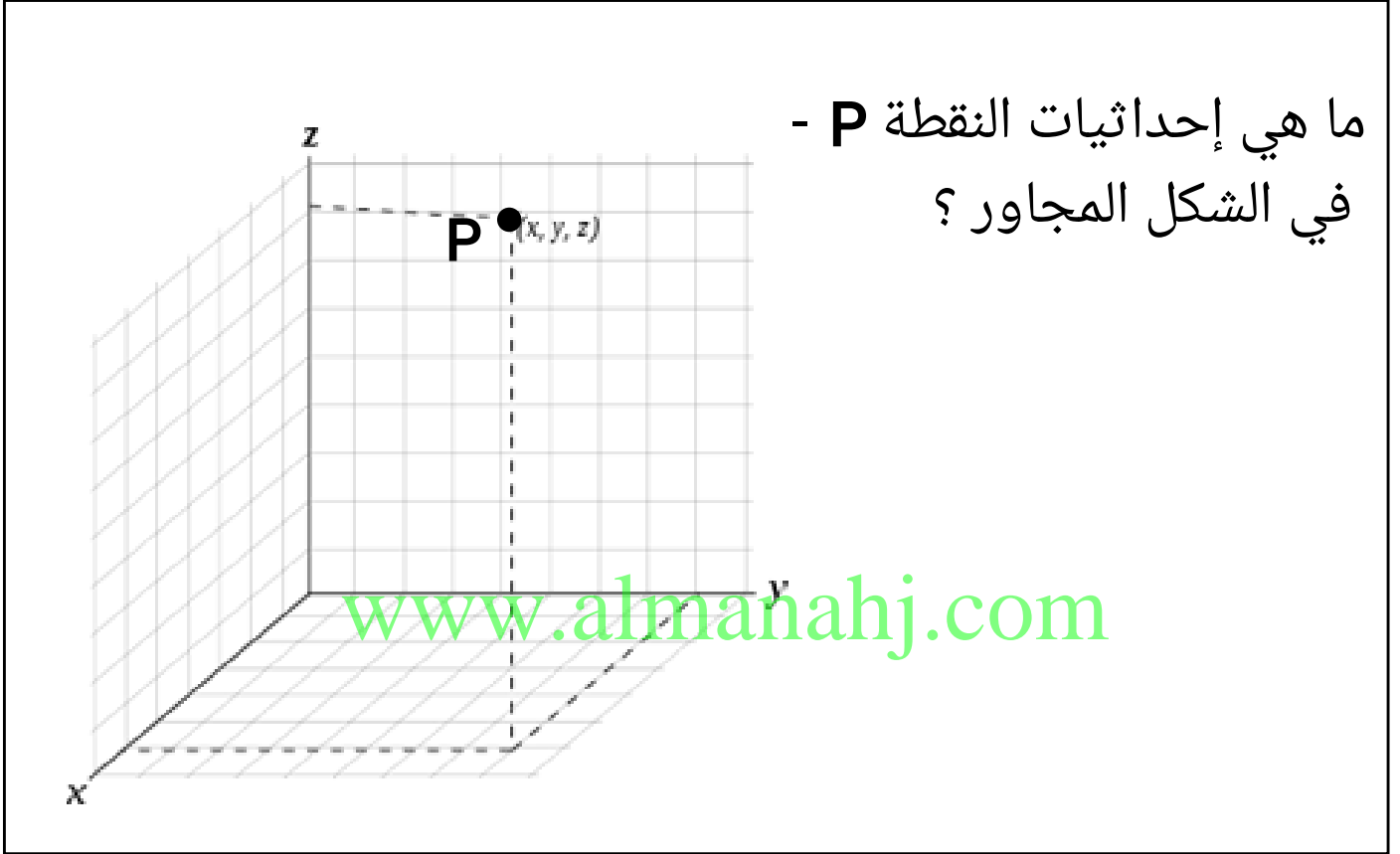


www.almanahj.com

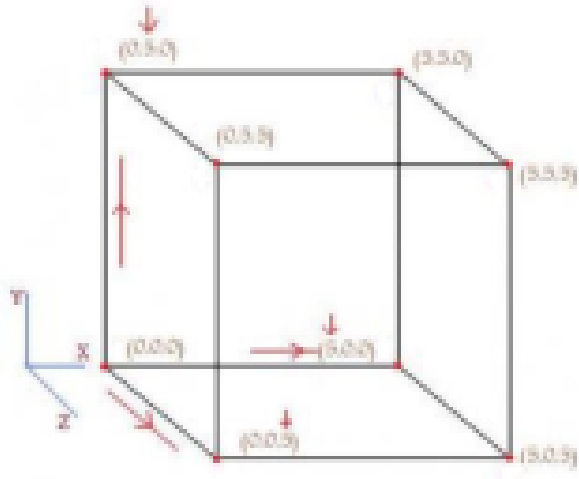
Cartesian Coordinates in Three Dimensions



➤ مفهوم النظام الإحداثي الديكارتي

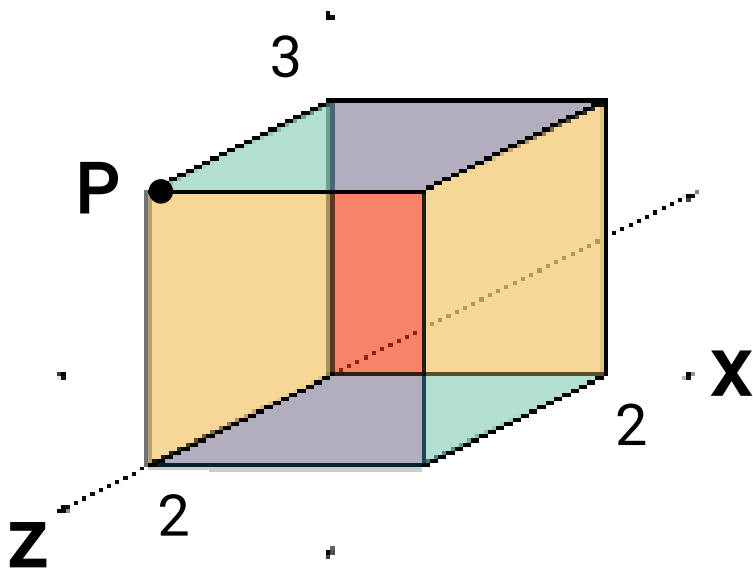


➤ مفهوم النظام الإحداثي الديكارتي



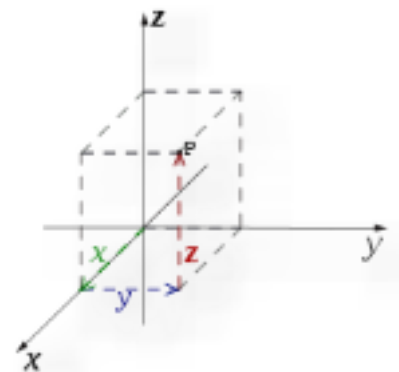
يمثل الشكل المجاور،
إحداثيات زوايا المكعب في
النظام الديكارتي .

www.almanahj.com

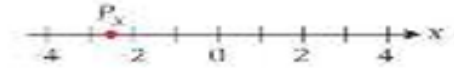


إحداثيات النقطة **P** -
بالنظام الديكارتي
هي :

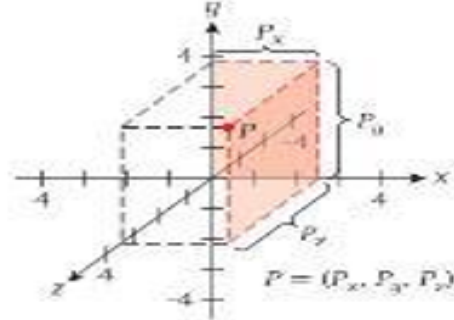
.....



➤ النظام الإحداثي الديكارتي



الشكل 1.13 تمثيل النقطة P في نظام إحداثي ديكارتي أحادي البعد.



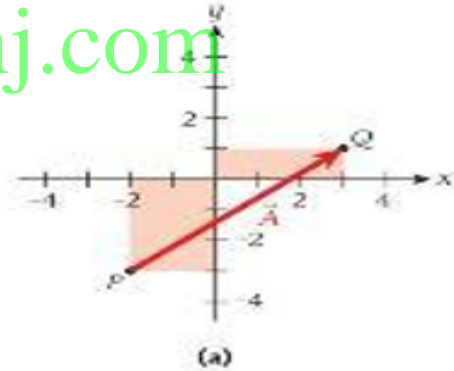
الشكل 1.14 تمثيل النقطة P في فضاء ثلاثي الأبعاد بدلالة إحداثياتها الديكارتية.

في فضاء ثنائي الأبعاد $A = (A_x, A_y)$
 في فضاء ثلاثي الأبعاد $A = (A_x, A_y, A_z)$

www.almanahj.com

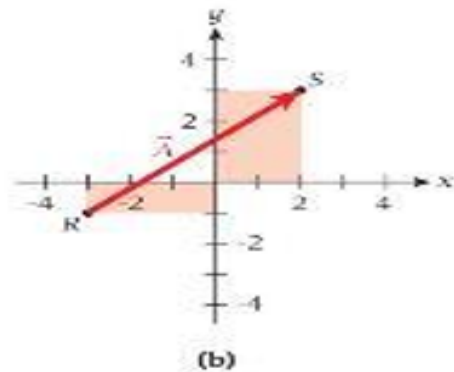
مركبتنا A هما إحداثيات النقطة Q مطروحا منها
 إحداثيات النقطة P .

$$\vec{A} = (3 - (-2), 1 - (-3)) = (5, 4)$$



(a)

$$\vec{A} = (2 - (-3), 3 - (-1)) = (5, 4)$$



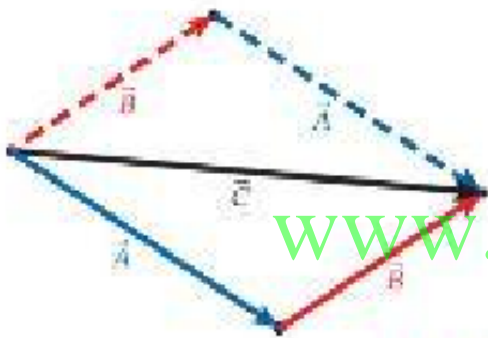
(b)

يمكن نقل المتجه مع الحفاظ على مقداره واتجاهه

➤ جمع المتجهات و طرحها بيانيا

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

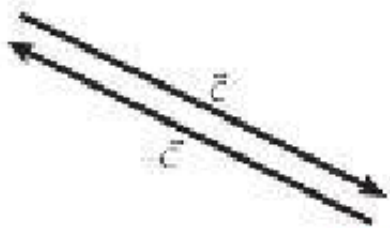
$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \square$$



الشكل 1.18 خاصية التبديل لجمع المتجهات.

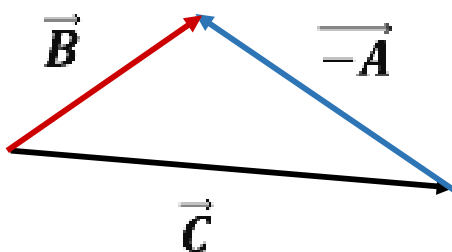
www.almanahj.com

$$\vec{C} - \vec{C} = (0,0,0) \square$$



الشكل 1.19 المتجه العاكس -C.

$$\vec{B} = \vec{C} - \vec{A} \square$$



- جمع المتجهات باستخدام المركبات

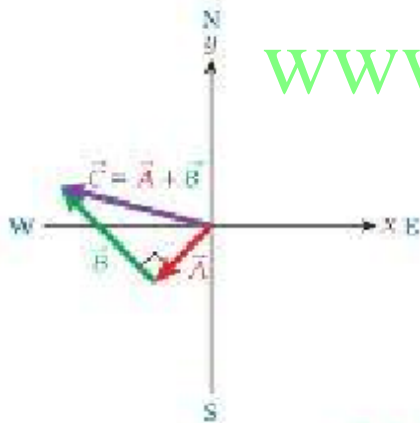
• باستخدام أطوال المتجهات (جمع المتجهات المطول) :

مسألة محلولة 1.3 ص 24

- أنت تتنزه سيراً في منطقة إيفرجلاندز في فلوريدا متجهاً من **المخيم الأساسي** إلى الجنوب الغربي مسافة 1.27 km ، ثم وصلت إلى نهر لا يمكنك عبوره بسبب عمقه البالغ. فاستدرت جهة اليمين بزاوية 90° وسرت مرة أخرى مسافة 3.12 km لتصل إلى الجسر. **كم تبعد عن المخيم الأساسي ؟**

www.almanahj.com

الحل :



الشكل 1.27 رحلة السير مع الانعطاف بزاوية 90°

$$A_x = A \cos \theta$$

$$A_x = 1.27 \cos 45 = -1.22 \text{ غربا}$$

$$A_y = 1.27 \sin 45 = -1.22 \text{ جنوبا}$$

$$B_x = 3.12 \cos 45 = -2.21 \text{ غربا}$$

$$B_y = 3.12 \sin 45 = 2.21 \text{ شمالا}$$

$$C_x = -1.22 + (-2.21) = -3.43 \text{ غربا}$$

$$C_y = -1.22 + 2.21 = 0.99 \text{ شمالا}$$

$$C = \sqrt{3.43^2 + 0.99^2} = 3.57 \text{ km}$$

للتحقق:

بما أن \vec{C} هو الوتر لمثلث قائم الزاوية، يمكن حساب طول الضلع باستخدام نظرية فيثاغورس مباشرة. جرب !

- جمع المتجهات باستخدام المركبات

- باستخدام التمثيل الديكارتي للمتجهات:

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$$

$$\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$$

www.almanahj.com

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

$$= (A_x, A_y, A_z) + (B_x, B_y, B_z)$$

$$= (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z)$$

أي أن :

$$C_x = A_x + B_x$$

$$C_y = A_y + B_y$$

$$C_z = A_z + B_z$$

- جمع المتجهات باستخدام المركبات

• مثال :

• إذا علمت أن :

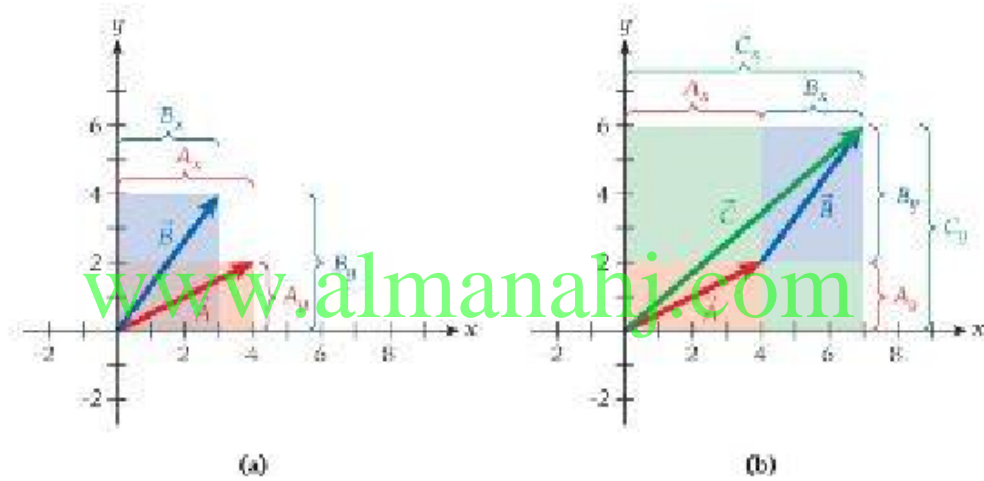
$$\vec{A} = (3,3)$$

$$\vec{B} = (2,3)$$

أوجد $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ ؟

www.almanahj.com

- جمع المتجهات باستخدام المركبات



يوضح الشكل 1.20 العلاقة بين الطريقة البيانية وطريقة المركبات. يوضح الشكل 1.20a متجهين $\vec{A} = (4, 2)$ و $\vec{B} = (3, 4)$ في فضاء ثنائي الأبعاد ويوضح الشكل 1.20b متجه المجموع $\vec{C} = (4+3, 2+4) = (7, 6)$. يثبت الشكل 1.20b يوضح أن $C_x = A_x + B_x$. نظرًا لأن المجموع الكلي يساوي مجموع المركبات متما.

وبالطريقة نفسها، يمكننا حساب متجه الفرق $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$ ويمكن التوصل إلى المركبات الديكارتية لمتجه الفرق بواسطة

$$\begin{aligned}
 D_x &= A_x - B_x \\
 D_y &= A_y - B_y \\
 D_z &= A_z - B_z.
 \end{aligned}
 \tag{1.14}$$

➤ ضرب متجه في كمية قياسية

$$\vec{E} = s \vec{A} = s(A_x, A_y, A_z) = (sA_x, sA_y, sA_z) \bullet$$

$$E_x = sA_x \bullet$$

$$E_y = sA_y \bullet$$

$$E_z = sA_z \bullet$$

www.almanahj.com

✓مثال :

$$\vec{A} = (2, 3, 5)$$

$$\vec{E} = 6\vec{A}$$

• أوجد \vec{E} ؟

➤ متجهات الوحدة

- هي متجهات مقدارها 1، تمتد على طول المحاور الإحداثية الأساسية للنظام الإحداثي .
- في حالة الثلاث أبعاد تكون هذه المتجهات في اتجاه X الموجب و y الموجب و z الموجب ويرمز لها على الترتيب :

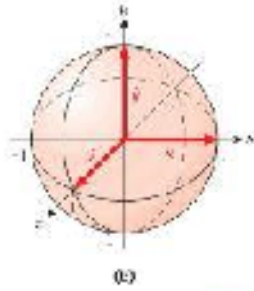
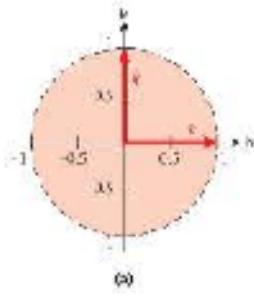
www.almanahj.com

$$\hat{x} = (1,0,0)$$

$$\hat{y} = (0,1,0)$$

$$\hat{z} = (0,0,1)$$

➤ متجهات الوحدة



الشكل 1.21 متجهات الوحدة المتكافية
(a) في بعدين و (b) في ثلاثة أبعاد.

الشكل المجاور يبين متجهات الوحدة في بعدين و في ثلاثة أبعاد .

تمكننا متجهات الوحدة من من كتابة أي متجه كمجموع لمتجهات الوحدة هذه بدلا من استخدام رمز المركبات .

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$$

$$= (A_x, 0, 0) + (0, A_y, 0) + (0, 0, A_z)$$

$$= A_x(1, 0, 0) + A_y(0, 1, 0) + A_z(0, 0, 1)$$

$$= A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$$

في حالة البعدين، نحصل على

$$\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y}$$

سيكون تمثيل متجه الوحدة هذا مغيبا بشكل خاص في ضرب متجهين.

مثال : ❖
- مثل المتجه $\vec{A} = (2,3,5)$ بمتجهات الوحدة .

الحل : ✓

$$\vec{A} = (2,3,5)$$

يمكن التعبير عنها
بمتجهات الوحدة كالتالي:

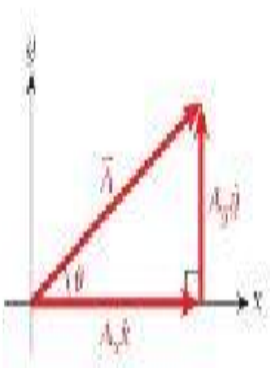
$$\vec{A} = 2\hat{x} + 3\hat{y} + 5\hat{z}$$

➤ طول المتجه و اتجاهه

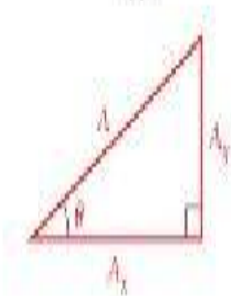
- يمكن حساب طول المتجه كالتالي :

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \cdot$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{A_y}{A_x} \cdot$$



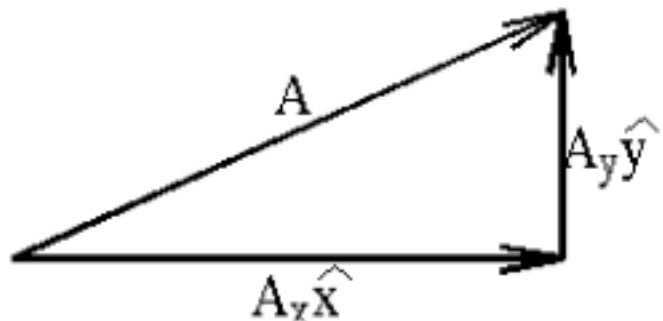
(a)



www.almanahj.com

$$A_x = A \cos \theta$$

$$A_y = A \sin \theta$$



➤ الضرب القياسي للمتجهات

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x, A_y, A_z) \cdot (B_x, B_y, B_z)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

www.almanahj.com

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \alpha = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$$

مثال :

• أوجد الزاوية α بين متجهي الموقع
 $\vec{A} = (4.00, 2.00, 5.00)$
 $\vec{B} = (4.50, 4.00, 3.00)$

www.almanahj.com

الإجابة: $\alpha = 24.6^\circ$

➤ الضرب القياسي للمتجهات

- يعطي الضرب القياسي كمية قياسية ، و تسري عليه خاصية التوزيع

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C} \cdot$$

- الضرب القياسي لمتجهات الوحدة :

www.almanahj.com

$$\begin{aligned}\hat{x} \cdot \hat{x} &= \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1 \\ \hat{y} \cdot \hat{x} &= \hat{z} \cdot \hat{x} = \hat{z} \cdot \hat{y} = 0\end{aligned}$$

يكون ناتج الضرب القياسي لأي متجهي وحدة مختلفين يساوي الصفر حيث أن المتجهين متعامدان على بعضهما .

$$\begin{aligned}\vec{x} \cdot \vec{y} &= |\vec{x}| |\vec{y}| \cos 90 = 0 \\ \vec{x} \cdot \vec{x} &= |\vec{x}| |\vec{x}| \cos 0 = 1\end{aligned}$$

$$|\vec{x}|^2 = \sqrt{(1+0+0)^2} = 1$$

➤ الضرب الاتجاهي

الضرب الاتجاهي هو عملية ثنائية بين متجهين، تكون نتيجتها متجه متعامد على المستوى الذي ينتمي له المتجهان طرفاً هذه العملية. وهذا بخلاف الضرب القياسي الذي يكون حاصله كمية قياسية.

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

يتم تحديد المقدار المطلق للمتجه \vec{C} من خلال :

$$|\vec{C}| = |\vec{A}||\vec{B}| \sin \theta$$

www.almanahj.com

θ هي الزاوية المحصورة بين \vec{A} و \vec{B} .

من ذلك نستنتج أن :

١. إذا كانت $\vec{A} \perp \vec{B}$ فإن $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ ← أقصى ما يمكن $|\vec{A}||\vec{B}|$
٢. في حالة $\vec{A} \parallel \vec{B}$ فإن $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ ← $\vec{A} \times \vec{B} = 0$
٣. $\vec{A} \times \vec{A} = 0$
٤. $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$
٥. $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$

الضرب الاتجاهي

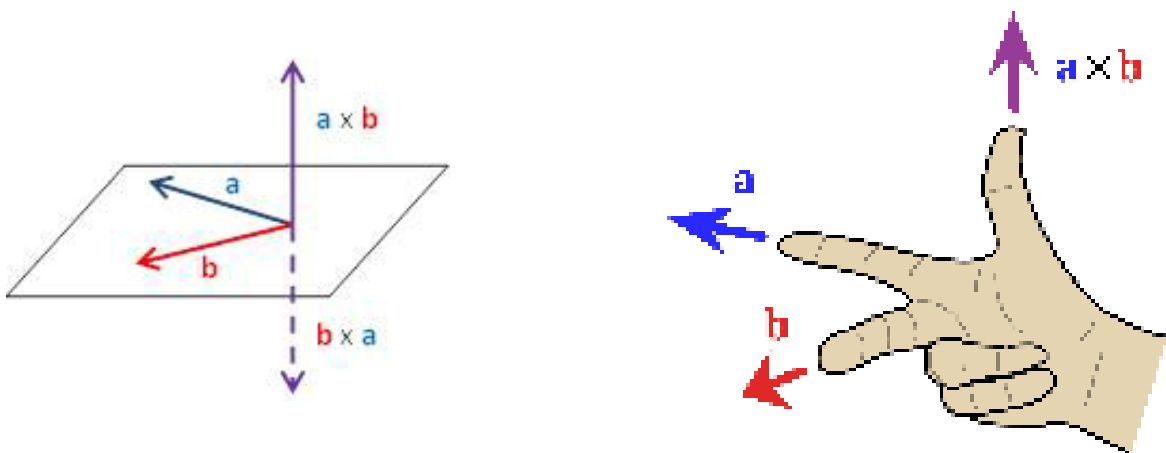
• يعرف الضرب الاتجاهي بين المتجهين
 $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

www.almanahj.com

$$\begin{aligned} C_x &= A_y B_z - A_z B_y \\ C_y &= -(A_x B_z - A_z B_x) \\ C_z &= A_x B_y - A_y B_x \end{aligned}$$

$$\vec{C} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{x} - (A_x B_z - A_z B_x) \hat{y} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{z}$$



سؤال:

• لتكن $\vec{A} = (1, 0, -2)$ و $\vec{B} = (3, 2, 1)$

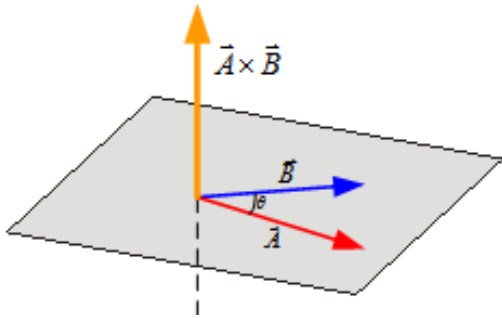
• أوجد $\vec{A} \times \vec{B}$

www.almanahj.com

الإجابة هي: $\vec{A} \times \vec{B} = 4\hat{x} - 7\hat{y} + 2\hat{z}$

الضرب الاتجاهي

• يمكن ملاحظة أن :

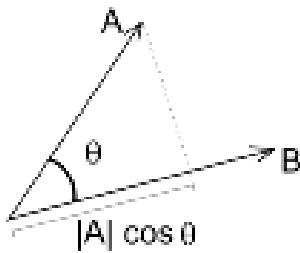
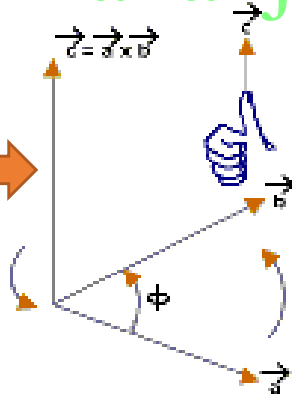
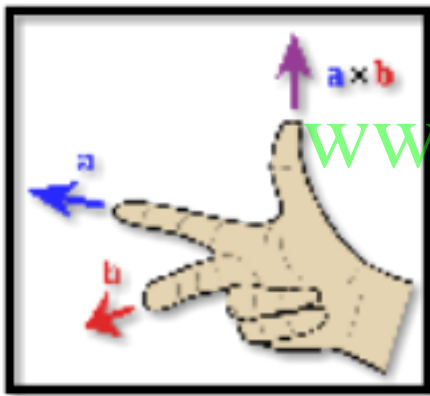


$$\begin{aligned}\hat{x} \times \hat{y} &= \hat{z} \\ \hat{y} \times \hat{z} &= \hat{x} \\ \hat{z} \times \hat{x} &= \hat{y}\end{aligned}$$

لإيجاد اتجاه المتجه \vec{C} حيث :

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

نستخدم قاعدة اليد اليمنى

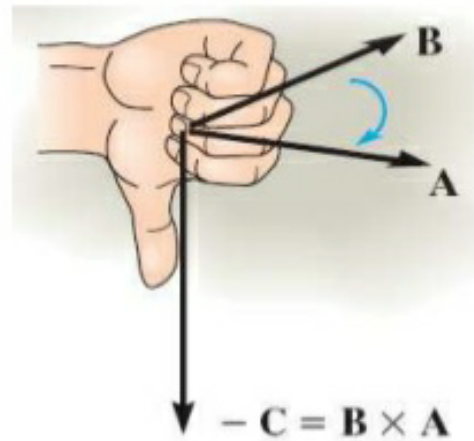
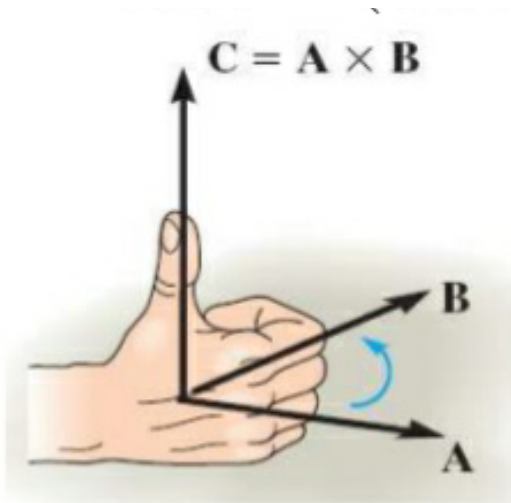


(a)



(b)

الشكل 1.25 التصير الهندسي للضرب
القياسي كمساحة (a) مسقط \vec{A} على \vec{B} .
(b) مسقط \vec{B} على \vec{A} .



www.almanahj.com

$$\hat{x} \times \hat{x} = \hat{0}$$

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$$

$$\hat{x} \times \hat{z} = -\hat{y}$$

$$\hat{y} \times \hat{y} = \hat{0}$$

$$\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$$

$$\hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z}$$

$$\hat{z} \times \hat{z} = \hat{0}$$

$$\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$$

$$\hat{z} \times \hat{y} = -\hat{x}$$

