كل ما يحتاجه الطالب في جميع الصفوف من أوراق عمل واختبارات ومذكرات، يجده هنا في الروابط التالية لأفضل مواقع تعليمي إماراتي 100 %

تطبيق المناهج الإماراتية	الاجتماعيات	الرياضيات
الصفحة الرسمية على التلغرام	الاسلامية	العلوم
الصفحة الرسمية على الفيسبوك	الانجليزية	
التربية الاخلاقية لجميع الصفوف	اللغة العربية	
التربية الرياضية		

مجموعات التلغرام.	مجموعات الفيسبوك	قنوات تلغرام	قنوات الفيسبوك
الصف الأول	الصف الأول	الصف الأول	الصف الأول
الصف الثاني	الصف الثاني	الصف الثاني	الصف الثاني
الصف الثالث	الصف الثالث	الصف الثالث	الصف الثالث
الصف الرابع	الصف الرابع	الصف الرابع	الصف الرابع
الصف الخامس	الصف الخامس	الصف الخامس	الصف الخامس
الصف السادس	الصف السادس	الصف السادس	الصف السادس
الصف السابع	الصف السابع	الصف السابع	الصف السابع
الصف الثامن	الصف الثامن	الصف الثامن	الصف الثامن
الصف التاسع عام	الصف التاسع عام	الصف التاسع عام	الصف التاسع عام
الصف التاسع متقدم	الصف التاسع متقدم	الصف التاسع متقدم	تاسع متقدم
الصف العاشر عام	الصف العاشر عام	الصف العاشر عام	عاشر عام
الصف العاشر متقدم	الصف العاشر متقدم	الصف العاشر متقدم	عاشر متقدم
الحادي عشر عام	الحادي عشر عام	الحادي عشر عام	حادي عشر عام
الحادي عشر متقدم	الحادي عشر متقدم	الحادي عشر متقدم	حادي عشر متقدم
ثاني عشر عام	الثاني عشر عام	الثاني عشر عام	الثاني عشر عام
ثاني عشر متقدم	الثاني عشر متقدم	ثاني عشر متقدم	ثاني عشر متقدم

الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربية والتعليم

عام التسامح

نسخة المعلم

2018 - 2019

McGraw-Hill Education

10

الرياضيات

المسار المتقدّم

نسخة الإمارات العربية المتحدة

دليل الطالب التفاعلي

McGraw Hill Education

مفتاح الإجابات

McGraw-Hill Education

الرياضيات

المسار المتقدّم

نسخة الإمارات العربية المتحدة

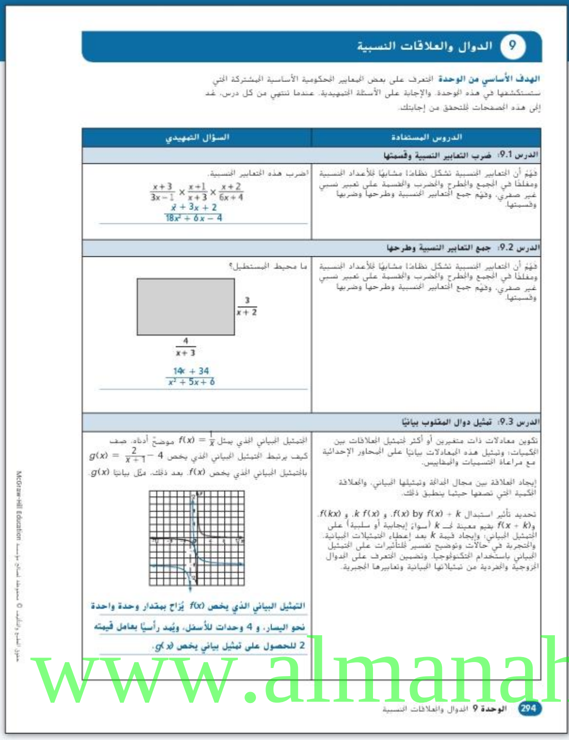
دليل الطالب التفاعلي

2018 - 2019

10

McGraw Hill Education

9 الهدف الأساسي من الوحدة



9 الدوال والعلاقات النسبية

الهدف الأساسي من الوحدة التعرف على بعض المعايير الحكومية الأساسية المشتركة التي ستستكشفها في هذه الوحدة، والإجابة على الأسئلة التمهيدية. عندما تنتهي من كل درس، عُد إلى هذه الصفحات للتحقق من إجابتك.

الدروس المستفادة	السؤال التمهيدي
الدرس 9.1: ضرب التعابير النسبية وقسمتها	
فَهْم أن التعابير النسبية تشكل نظامًا مشابهًا للأعداد النسبية ومغلقًا في الجمع والطرح والضرب والقسمة على تعبير نسبي غير صفري، وفهم جمع التعابير النسبية وطرحها وضربها وقسمتها.	اضرب هذه التعابير النسبية. $\frac{x+3}{3x-1} \times \frac{x+1}{x+3} \times \frac{x+2}{6x+4}$ $\frac{x^2+3x+2}{18x^2+6x-4}$
الدرس 9.2: جمع التعابير النسبية وطرحها	
فَهْم أن التعابير النسبية تشكل نظامًا مشابهًا للأعداد النسبية ومغلقًا في الجمع والطرح والضرب والقسمة على تعبير نسبي غير صفري، وفهم جمع التعابير النسبية وطرحها وضربها وقسمتها.	ما محيط المستطيل؟ $\frac{3}{x+2}$ $\frac{4}{x+3}$ $\frac{14x+34}{x^2+5x+6}$
الدرس 9.3: تمثيل دوال المقلوب بيانيًا	
تكوين معادلات ذات متغيرين أو أكثر لتمثيل العلاقات بين الكميات؛ وتمثيل هذه المعادلات بيانيًا على المحاور الإحداثية مع مراعاة التسميات والمقاييس. إيجاد العلاقة بين مجال الدالة وتمثيلها البياني، والعلاقة الكمية التي تصفها حيثما ينطبق ذلك. تحديد تأثير استبدال $f(x)$ by $f(x)+k$، و $k\,f(x)$، و $f(kx)$، و $f(x+k)$ بقيم معينة لـ k (سواء إيجابية أو سلبية) على التمثيل البياني؛ وإيجاد قيمة k بعد إعطاء التمثيلات البيانية. والتجربة في حالات وتوضيح تفسير للتأثيرات على التمثيل البياني باستخدام التكنولوجيا. وتضمين التعرف على الدوال الزوجية والفردية من تمثيلاتها البيانية وتعابيرها الجبرية.	التمثيل البياني الذي يمثل $f(x)=\frac{1}{x}$ موضحٌ أدناه. صف كيف يرتبط التمثيل البياني الذي يخص $g(x)=\frac{2}{x+1}-4$ بالتمثيل البياني الذي يخص $f(x)$. بعد ذلك، مثّل بيانيًا $g(x)$. التمثيل البياني الذي يخص $f(x)$ يُزاح بمقدار وحدة واحدة نحو اليسار، و 4 وحدات للأسفل، ويُمد رأسيًا بعامل قيمته 2 للحصول على تمثيل بياني يخص $g(x)$.

استخدام *دليل الطالب التفاعلي*

يمكن استخدام دليل الطالب التفاعلي مع كتاب *الرياضيات للصف العاشر المسار المتقدم.*

درس دليل الطالب التفاعلي	*الرياضيات للصف 10 – المسار المتقدم*
9.1	الدرس 9-1
9.2	الدرس 9-2
9.3	الدرس 9-3
9.4	الدرس 9-4
9.6	الدرس 9-6

نصيحة للتدريس — م.م.ر6

يقدّم السؤال التمهيدي للدرس 9.1 إلى الطلاب م. م. ر. 6 **(مراعاة الدقة)**. ابدأ بتكليف الطلاب بالبحث عن فرص لتحويل التعابير النسبية إلى أبسط صورة. أشر إلى الحدّين اللذين سيتم تقسيمهما:

$$\frac{\cancel{x+3}}{3x-1}\cdot\frac{x+1}{\cancel{x+3}}\cdot\frac{x+2}{6x+4}$$

ثم كلّف الطلاب باستخدام طريقة ضرب قوسين لضرب ثنائيات الحدود الموجودة في البسط والمقام.

نصيحة للتدريس — م.م.ر7

يقدّم السؤال التمهيدي للدرس 9.3 إلى الطلاب م. م. ر. 7 **(محاولة إيجاد البنية واستخدامها)**. تعرّف الطلاب في الوحدات السابقة على تحويلات أنواع أخرى من الدوال. فإذا كانت لديهم صعوبة في فهم طريقة تمثيل $g(x)$ بيانيًا، فاقترح عليهم إيجاد قيمة الدالة بدلالة قيم متعددة لـ x وتحديد موقع هذه النقاط حتى يتمكنوا من رؤية الطريقة التي ينبغي بها تمثيل الدالة بيانيًا.

نصيحة للتدريس
م.م.ر 6

يمكن أن يُستخدم السؤال التمهيدي للدرس 9.4 كفرصة لاستكشاف **م. م. ر. 6 (مراعاة الدقة)**. ابدأ بعمل جدول قيم للتعبير $\frac{1}{x}$. اكتب القيم على هيئة أعداد نسبية. وكلّف الطلاب بتحديد ما يحدث لتسلسل الأعداد كلما ازدادت قيمة x.

بعد ذلك اطلب منهم تحديد ما يحدث للتعبير النسبي عندما تكون قيم x كبيرة جدًا. أشر إلى أن كل تعبير نسبي له الحد $\frac{1}{x}$ في البسط والمقام.

نظرًا لأن هذه الحدود النسبية تقترب من الصفر عند قيم x الكبيرة؛ يتم تبسيط التعابير النسبية إلى $\frac{2}{4}$ و $\frac{4}{2}$.

الدروس المستفادة	السؤال التمهيدي
الدرس 9.4: التمثيل البياني للدوال النسبية	
مقارنة خصائص دالتين كل منهما ممثلة بطريقة مختلفة (جبريًا، أو في تمثيل بياني، أو رقميًا في جداول، أو بالوصف اللفظي). على سبيل المثال، بإعطائك تمثيل بياني لدالة تربيعية واحدة وتعبير جبري لدالة أخرى، تحديد أيهما لها حد أقصى أكبر. تكوين معادلات ذات متغيرين أو أكثر لتمثيل العلاقات بين الكميات؛ وتمثيل هذه المعادلات بيانيًا على المحاور الإحداثية مع مراعاة التسميات والمقاييس.	أي دالة تقترب من $y = 0.5$ بينما يقترب x من اللانهاية؟ اشرح. $A.\ f(x) = \frac{2-\frac{1}{x}}{4-\frac{2}{x}}$ $B.\ f(x) = \frac{4-\frac{1}{x}}{2-\frac{2}{x}}$ **A. بينما يزيد x في قيمته، تقترب قيمة الحد $\frac{1}{x}$ من الصفر.**
الدرس 9.6: حل المعادلات والمتباينات النسبية	
إيجاد حل المعادلات النسبية والجذرية البسيطة التي تحتوي على متغير واحد، وإعطاء أمثلة تبين كيف يمكن أن تظهر حلول دخيلة. تكوين معادلات ومتباينات بمتغير واحد ثم استخدامها في حل المسائل. شرح السبب في أن إحداثيات x لنقاط تقاطع المعادلتين $y = f(x)$ و $y = g(x)$ بالرسم البياني هي حلول المعادلة $f(x) = g(x)$؛ إيجاد الحلول تقريبيًا، على سبيل المثال استخدام التكنولوجيا لتمثيل الدوال بيانيًا، أو إنشاء جداول القيم، أو إيجاد التقريبات المتتابعة. تضمين حالات حيث يكون $f(x)$ و/أو $g(x)$ دالة خطية وكثيرة الحدود ونسبية وتمثل قيمة مطلقة وأسية ولوغاريتمية.	منطقة مساحتها A قُسّمت إلى كميتين كسريتين، حيث أحد الكسرين هو نصف الآخر. اكتب المعادلة النسبية التي يمثلها هذا الوصف. $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = A$ $\frac{2x+x}{2x^2} = A$ $\frac{3}{2x} = A$

9.1 ضرب التعابير النسبية وقسمتها

المعايير

معايير الممارسات الرياضية: 1, 2, 3, 4, 6, 7

المتطلبات الأساسية

- استيعاب تعريف الانغلاق
- ضرب التعابير النسبية وقسمتها
- جمع التعابير كثيرة الحدود وطرحها وضربها وقسمتها وتحليلها إلى العوامل

مثال 1

نصيحة للتدريس م.م.ر 6

أكد على أوجه التشابه بين العمليات التي تُجرى على كل من الأعداد النسبية والتعابير النسبية.

الأسئلة الداعمة

- هل المعلومات الواردة في مربع المفهوم الأساسي صحيحة لكل من التعابير النسبية والأعداد النسبية؟ اشرح. **نعم؛ فالأعداد النسبية عبارة عن تعابير نسبية.**
- كيف يمكن أن تكون مجموعة التعابير النسبية منغلقة في القسمة في حين قد يكون المقسوم عليه صفرًا، مما يجعل القسمة غير معرّفة؟ **تُحتسب عملية القسمة عندما يكون المقسوم عليه ليس صفرًا.**

9.1 ضرب التعابير النسبية وقسمتها

المعايير

التمارين: 1, 2, 3, 4, 6, 7 الاستخدام في الدرس 9-1

الأهداف

- فهْم أن التعابير النسبية تكون مغلقة ضمن عمليتي الضرب والقسمة.
- تحويل التعابير النسبية لأبسط صورة.
- ضرب التعابير النسبية وقسمتها

التعبير النسبي هو نسبة بين تعبيرين كثيري الحدود. والعمليات في الأعداد النسبية والتعابير النسبية متشابهة.

ضرب التعابير النسبية وقسمتها

لضرب تعبيرين نسبيين، اضرب البسوط واضرب المقامات.
بالنسبة لجميع التعابير النسبية $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ عندما تكون $b \neq 0$ و $d \neq 0$، $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

لقسمة تعبيرين نسبيين، اضربهما في المعكوس الضربي للمقسوم عليه.
بالنسبة لجميع التعابير النسبية $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ عندما تكون $b \neq 0$، $c \neq 0$ و $d \neq 0$، $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

مثال 1 استكشاف التعابير النسبية

الاستكشاف في هذا الاستكشاف، ستستكشف كيفية ضرب والتعابير النسبية وقسمتها.

a. **استخدام البنية** افترض أن $\frac{a}{b} = \frac{6}{x-2}$ و $\frac{c}{d} = \frac{3}{x+2}$. أوجد $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ هل النتيجة تعبير نسبي؟ اذكر القيد (القيود) الواجب وضعها على x ولماذا هي موجودة.
$\frac{18}{(x-2)(x+2)}$؛ ناتج الضرب هو تعبير نسبي. $x \neq 2$ و $x \neq -2$؛ إذا كان $x = 2$ أو $x = -2$ فسيكون تعبير واحد أو أكثر من التعابير النسبية غير مُعرّف

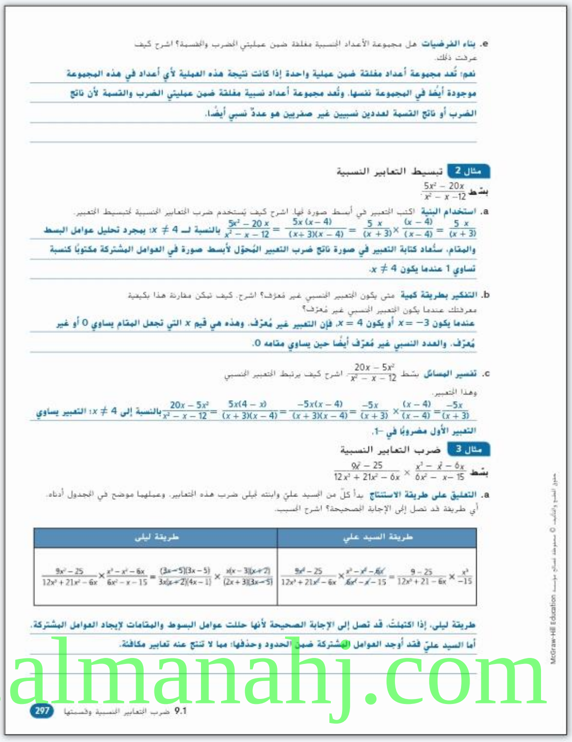
b. **استخدام البنية** افترض أن $\frac{a}{b} = \frac{6}{x-2}$ و $\frac{c}{d} = \frac{3}{x+2}$. أوجد $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ هل النتيجة تعبير نسبي؟ اذكر القيد (القيود) الواجب وضعها على x ولماذا هي موجودة.
$\frac{2(x+2)}{x-2}$؛ ناتج القسمة هو تعبير نسبي. $x \neq 2$ و $x \neq -2$؛ إذا كان $x = 2$ أو $x = -2$، فسيكون تعبير واحد أو أكثر من التعابير النسبية غير مُعرّف.

c. **التفكير بطريقة تجريدية** انظر إلى مربع المفهوم الأساسي أعلاه لضرب $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ هل النتيجة تعبير نسبي؟ ما الذي يشير إليه هذا بشأن إغلاق التعابير النسبية في عملية الضرب؟ اشرح.
نعم؛ تنطبق خاصية الإغلاق حيث إن ناتج الضرب هو أيضًا تعبير نسبي.

d. **التفكير بطريقة تجريدية** انظر إلى مربع المفهوم الأساسي أعلاه من أجل $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ هل النتيجة تعبير نسبي؟ ما الذي يشير إليه هذا بشأن إغلاق التعابير النسبية في عملية القسمة؟ اشرح.
نعم؛ تنطبق خاصية الإغلاق حيث إن ناتج القسمة هو أيضًا تعبير نسبي.

معلومات أساسية رياضية

سوف يجد الطلاب التعابير النسبية مستخدمة في العديد من التطبيقات في الفيزياء–القوة، السرعة المتجهة، السقوط الحر للأجسام. إذا سمح الوقت، تعاون مع معلمي مادة الفيزياء بالمدرسة لمعرفة متى سوف يدرسون المفاهيم التي تتضمن استخدام التعابير النسبية حتى يتسنى لك تقديم الدرس بالتزامن. سوف يساعد تقديم تطبيقات في الحياة اليومية الطلاب على تكوين روابط أكثر قوة بالمادة.



e. **بناء الفرضيات** هل مجموعة الأعداد النسبية مغلقة ضمن عمليتي الضرب والقسمة؟ اشرح كيف عرفت ذلك.

نعم؛ تُعد مجموعة أعداد مغلقة ضمن عملية واحدة إذا كانت نتيجة هذه العملية لأي أعداد في هذه المجموعة موجودة أيضًا في المجموعة نفسها. وتُعد مجموعة أعداد نسبية مغلقة ضمن عمليتي الضرب والقسمة لأن ناتج الضرب أو ناتج القسمة لعددين نسبيين غير صفريين هو عددٌ نسبي أيضًا.

مثال 2 تبسيط التعابير النسبية

بسّط $\frac{5x^2 - 20x}{x^2 - x - 12}$.

a. **استخدام البنية** اكتب التعبير في أبسط صورة لها. اشرح كيف يُستخدم ضرب التعابير النسبية لتبسيط التعبير.

$\frac{5x^2 - 20x}{x^2 - x - 12} = \frac{5x(x-4)}{(x+3)(x-4)} = \frac{5x}{(x+3)} \times \frac{(x-4)}{(x-4)} = \frac{5x}{(x+3)}$ بالنسبة لـ $x \neq 4$؛ بمجرد تحليل عوامل البسط والمقام، ستُعاد كتابة التعبير في صورة ناتج ضرب التعبير المُحوّل لأبسط صورة في العوامل المشتركة مكتوبًا كنسبة تساوي 1 عندما يكون $x \neq 4$.

b. **التفكير بطريقة كمية** متى يكون التعبير النسبي غير مُعرّف؟ اشرح. كيف تمكن مقارنة هذا بكيفية معرفتك عندما يكون التعبير النسبي غير مُعرّف؟

عندما يكون $x = -3$ أو يكون $x = 4$، فإن التعبير غير مُعرّف. وهذه هي قيم x التي تجعل المقام يساوي 0 أو غير مُعرّف. والعدد النسبي غير مُعرّف أيضًا حين يساوي مقامه 0.

c. **تفسير المسائل** بسّط $\frac{20x - 5x^2}{x^2 - x - 12}$. اشرح كيف يرتبط التعبير النسبي وهذا التعبير.

$\frac{20x - 5x^2}{x^2 - x - 12} = \frac{5x(4-x)}{(x+3)(x-4)} = \frac{-5x(x-4)}{(x+3)(x-4)} = \frac{-5x}{(x+3)} \times \frac{(x-4)}{(x-4)} = \frac{-5x}{(x+3)}$ بالنسبة إلى $x \neq 4$؛ التعبير يساوي التعبير الأول مضروبًا في -1.

مثال 3 ضرب التعابير النسبية

بسّط $\frac{9x^2 - 25}{12x^3 + 21x^2 - 6x} \times \frac{x^3 - x^2 - 6x}{6x^2 - x - 15}$

a. **التعليق على طريقة الاستنتاج** بدأ كلٌ من السيد عليّ وابنته ليلى ضرب هذه التعابير. وعملهما موضح في الجدول أدناه. أي طريقة قد تصل إلى الإجابة الصحيحة؟ اشرح السبب.

طريقة ليلى	طريقة السيد علي
$\frac{9x^2 - 25}{12x^3 + 21x^2 - 6x} \times \frac{x^3 - x^2 - 6x}{6x^2 - x - 15} = \frac{(3x-5)(3x-5)}{3x(x+2)(4x-1)} \times \frac{x(x-3)(x+2)}{(2x+3)(3x-5)}$	$\frac{9x^2 - 25}{12x^3 + 21x^2 - 6x} \times \frac{x^3 - x^2 - 6x}{6x^2 - x - 15} = \frac{9 - 25}{12x^3 + 21 - 6x} \times \frac{x^3}{-15}$

طريقة ليلى، إذا اكتملت، قد تصل إلى الإجابة الصحيحة لأنها حللت عوامل البسوط والمقامات لإيجاد العوامل المشتركة. أما السيد عليّ فقد أوجد العوامل المشتركة ضمن الحدود وحذفها؛ مما لا تنتج عنه تعابير مكافئة.

9.1 ضرب التعابير النسبية وقسمتها 297

التأكيد على معايير الممارسة الرياضية

تطلب م. م. ر 7 (محاولة إيجاد البنية واستخدامها) من الطلاب الملاحظة الدقيقة لتمييز نمط أو بنية. ويستخدم الطلاب هذه المهارة عند إعادة كتابة التعابير النسبية على هيئة تركيبة من العوامل، مثلما هو في **المثال 2a**، أو عندما يدركون أوجه التشابه بين الأعداد النسبية والتعابير النسبية، مثلما هو في **المثال 1**.

وهذا يمكن أن يعني أيضًا تراجع الطلاب خطوة لإلقاء نظرة عامة، مثلما هو في **المثالين 1c** و **1d**، لرؤية أنه عندما تكون الأجزاء التي يتم ضربها أو قسمتها تعابير نسبية، فإن النتيجة تضم تعبيرًا نسبيًا، وبالتالي يثبتون فهمهم لأن التعابير النسبية مغلقة تحت عمليتي الضرب والقسمة.

مثال 2

نصيحة للتدريس

م.م.ر8

عندما يبدأ الطلاب في تحويل التعابير النسبية لأبسط صورة، شدد على أهمية استخدام طريقة إيجاد العامل المشترك الأكبر بين البسط والمقام.

الأسئلة الداعمة

- ما الخطأ في العبارة $\frac{(x-2)}{(x+3)} \cdot \frac{1}{(x-2)} = \frac{1}{x+3}$

على الرغم من أن الطرف الأيمن من المعادلة هو التعبير "المحول لأبسط صورة"، يجب تحديد أن التساوي يكون قائمًا فقط عندما تكون $x \neq 2$. التعبير على الطرف الأيسر غير محدد عندما تكون $x = 2$ و $x = -3$ ولكن التعبير على الطرف الأيمن يكون غير محدد فقط عندما تكون $x = -3$.

- ما الذي يحتاجه تعبيران حتى يكونا متكافئين؟ وما القيم الخاصة التي يجب وضعها في الاعتبار عند النظر إلى تكافؤ تعبيرين نسبيين؟ **يكون التعبيران متكافئين عندما تكون لهما القيمة نفسها مع كل قيمة للمتغير. والقيم الخاصة التي يجب وضعها في الاعتبار عند تعيين التكافؤ بين التعابير النسبية هي القيم المستثناة، أو تلك القيم التي تجعل التعبير النسبي غير محدد.**

مثال 3

نصيحة للتدريس م.م.ر 3

ذكّر الطلاب بأن الحذف يمكن أن يحدث فقط مع كمية ما يمكن استبعادها تمامًا من البسط والمقام.

الأسئلة الداعمة

- ما الخطوة الأولى عند ضرب التعابير النسبية؟ **ينبغي أن تكون الخطوة الأولى تحليل البسوط والمقامات إلى العوامل لتحديد ما إذا كانت هناك عوامل مشتركة.**
- هل يمكن حذف عاملين مشتركين في البسوط؟ **لا. فقط العوامل المشتركة بين البسط والمقام.**

مثال 4

نصيحة للتدريس م.م.ر 8

بينما يوضح الطلاب طريقة لإيجاد قيمة الارتفاع في هذا المثال، ذكرهم بأنه من المفيد التفكير في الطريقة التي سوف يحلون بها المسألة نفسها إذا كان حجم القاعدة ومساحتها عددين نسبيين.

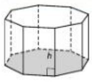
الأسئلة الداعمة

- اشرح لماذا ينتج عن اختزال العوامل المشتركة لجميع القيم التي لا تجعل العوامل تساوي صفرًا تعبيرًا متكافئًا. **يمكن كتابة العوامل المشتركة في البسط والمقام على هيئة نسبة تساوي 1 للقيم التي لا تجعل العامل يساوي صفرًا.**
- هل يؤدي ضرب المقسوم عليه في المعكوس الضربي للمقسوم في الإجابة نفسها مثل ضرب المقسوم في المعكوس الضربي للمقسوم عليه؟ **لا؛ حيث ينتج عنه المعكوس الضربي للإجابة الصحيحة.**

b. **الحساب بدقة** بسّط التعبير. اشرح السبب في أنك لن تضرب البسوط وتضرب المقامات بدون تحليل العوامل أولاً.

$$\frac{9x^2-25}{12x^3+21x^2-6x}\times\frac{x^3-x^2-6x}{6x^2-x-15}=\frac{(3x+5)(3x-5)}{3x(x+2)(4x-1)}\times\frac{x(x+2)(x-3)}{(2x+3)(3x-5)}=\frac{(3x+5)(x-3)}{3(4x-1)(2x+3)}$$

بالنسبة لكل من $x \neq 0$ و$x \neq -2$ و$x \neq \frac{5}{3}$. الضرب أولاً سيؤدي إلى كثيرات حدود كبيرة للغاية في البسوط والمقامات؛ مما يُصعّب تحليل العوامل المشتركة لاستبعادها.



مثال 4 قسمة التعابير النسبية

حجم المنشور الموضح هو $\frac{x^4-1}{x^3+27}$ ft³. مساحة قاعدة المنشور، B، هي $\frac{x^3+3x^2+x+3}{2x^3+11x^2+12x-9}$ ft²، وارتفاعها هو h.

صيغة إيجاد حجم أي منشور هي $V = Bh$.

a. **التخطيط للحل** اكتب تعبيرًا يربط حجم القاعدة ومساحتها بارتفاع المنشور. كيف تساعدك معرفة كيفية الحل لإيجاد قيمة مجهولة في صيغة تضم أعدادًا نسبية في هذا الموقف؟

$V \div B = h$. إذًا، $h = \frac{x^4-1}{x^3+27} \div \frac{x^3+3x^2+x+3}{2x^3+11x^2+12x-9}$ ft؛ عملية الحل لإيجاد متغير في الصيغة باستخدام الأعداد النسبية هي العملية ذاتها المستخدمة عند استخدام التعابير النسبية. وينبغي قسمة كلا طرفي المعادلة على B لعزل h.

b. **الحساب بدقة** أوجد ارتفاع المنشور. كيف تتشابه الطريقة التي استخدمتها لإيجاد ارتفاع المنشور الذي فيه B وV عددان نسبيان؟

$$h=\frac{x^4-1}{x^3+27}\div\frac{x^3+3x^2+x+3}{2x^3+11x^2+12x-9}=\frac{x^4-1}{x^3+27}\times\frac{2x^3+11x^2+12x-9}{x^3+3x^2+x+3}=\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x+3)(x^2-3x+9)}\times\frac{(2x-1)(x+3)^2}{(x+3)(x^2+1)}=\frac{(x-1)(x+1)(2x-1)}{x^2-3x+9}$$

بالنسبة إلى $x \neq -3$. في مجموعتي الأعداد، تغيرت القسمة إلى ضرب باستخدام المعكوس الضربي للمقسوم عليه.

c. **التواصل بدقة** هل يمكن لقيمة x أن تكون -3؟ -2؟ اشرح لم أو لم لا.

لا. عندما يكون x بقيمة -3، فمقام التعبير الأصلي للحجم يساوي صفرًا، أي غير مُعرّف. وعندما يكون x بقيمة -2، فمساحة القاعدة تصبح سالبة، وهو مستحيل في موقف من الحياة اليومية.

الكسر المركب هو تعبير نسبي له بسط و/أو مقام يُعد أيضًا تعبيرًا نسبيًا. بطريقة أخرى، الكسر المركب هو نتيجة قسمة تعبيرين نسبيين. ومن أجل تحويل الكسور المركبة لأبسط صورة، يمكن استخدام طريقة قسمة التعابير النسبية. ويتشابه ضرب الكسور المركبة وقسمتها مع ضرب التعابير النسبية وقسمتها. ولكن تحويل النتيجة لأبسط صورة قد يتم في عدة خطوات إضافية.

مثال 5 تبسيط الكسور المركبة

a. **التفكير بطريقة كمية** بالنسبة لأي قيم من a وb وc وd، يكون الكسر مركبًا $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ غير معرّف؟

$b = 0$، و$c = 0$ و$d = 0$

التدريس المتمايز

لمساعدة الطلاب على الاستعداد لضرب التعابير النسبية وقسمتها، اسمح لهم بالتحليل إلى العوامل الأنواع المختلفة من كثيرات الحدود.

ضع عدة تعابير من كثيرات حدود في أنحاء الحجرة واسمح للطلاب بالتجول في الأنحاء بهدف تحليل كثيرات الحدود إلى العوامل مع مقارنة النتائج مع زملاء آخرين. لمزيد من الفائدة، يمكنك تكليف الطلاب بتصنيف كثيرات الحدود التي تم تحليلها إلى العوامل في مجموعات تبين العوامل المشتركة.

b. **استخدام البنية** أعد كتابة الكسر المركب $\frac{\frac{w}{x}}{\frac{y}{z}}$ في صورة $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ وبسّطه.

$\frac{\frac{w}{x}}{\frac{y}{z}} = \frac{w}{x} \div \frac{y}{z} = \frac{w}{x} \times \frac{z}{y} = \frac{wz}{xy}$ بالنسبة إلى $z \neq 0$.

c. **استخدام البنية** بسّط $\frac{\frac{x+3}{x-1}}{\frac{x-2}{x^2-1}}$. كيف يمكن إعادة كتابة هذا في صورة $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$؟

$\frac{(x+3)(x+1)}{x-2} = \frac{\frac{x+3}{x-1}}{\frac{x-2}{x^2-1}}$؛ يمكن كتابتها في صورة $\frac{(x+3)}{(x-1)} \div \frac{x-2}{x^2-1}$

مثال 6 مجال تعبير نسبي مبسّط

يراجع كل من ليلى وكريم مسألة رياضيات تبدأ بهذا التعبير $\frac{x+1}{x^2-1}$. تزعم ليلى أن هذا التعبير يتساوى مع $\frac{1}{x-1}$.

a. **التعليق على طريقة الاستنتاج** لماذا تعتقد ليلى أن التعبيرين متساويان؟

التعبير الأول يمكن كتابته في أبسط صورة كما يلي $\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}$. الجزء $x+1$ من البسط والمقام يلغيان بعضهما، تاركين $\frac{1}{x-1}$.

b. **التعليق على طريقة الاستنتاج** هل ليلى محقة؟ هل التعبيران متساويان لكل قيم x؟

لا؛ بالرغم من أن التعبير الأول يتحول في أبسط صورة إلى التعبير الثاني، فهناك اختلاف عندما يكون $x = -1$. التعبير الأول غير مُعرّف عند $x = -1$، في حين أن التعبير الثاني بقيمة $-\frac{1}{2} = \frac{1}{-1-1}$ عندما يكون $x = -1$

c. **التعليق على طريقة الاستنتاج** ليلى تمثل بيانيًا $y = \frac{x+1}{x^2-1}$ و $y = \frac{1}{x-1}$ على حاسبة التمثيل البياني الخاصة بها. تزعم أن التمثيلين البيانيين متطابقان، ولهذا فالتعبيرين متطابقان. فكيف ترد على ليلى؟

يوجد حدّ أقصى لما يمكن عرضه على شاشة حاسبة صغيرة. التعبيران متساويان في كل نقطة باستثناء $x = -1$، إذًا من المنطقي التفكير في أن التمثيلين البيانيين سيبدوان متماثلين باستثناء في نقطة واحدة. وباستخدام وظيفة (التتبع) Trace يبدو أن التعبير الأول به قيمة غير مُعرّفة عند $x = -1$، في حين أن التعبير الثاني به قيمة $-\frac{1}{2}$ عند $x = -1$.

تدريب

استخدم المعلومات التالية للإجابة على التمرينين 1 و 2.

كريمة وعلياء يحلان لإيجاد قيمة x في $\frac{a^3-b^3}{4a^2-b^2}(x) = \frac{a^2+ab+b^2}{2a+b}$، حيث يمثل x التعبير النسبي الذي سيجعل العبارة صحيحة. وتذكر كريمة أن عليك ضرب كلا طرفي المعادلة فبالمعكوس الضربي لـ $\frac{a^2+ab+b^2}{2a+b}$. وتذكر علياء أنه عليك ضرب كلا الطرفين في المعكوس الضربي لـ $\frac{a^3-b^3}{4a^2-b^2}$.

1. **التعليق على طريقة الاستنتاج** بدون حل، حدد من طريقته صحيحة، كريمة أم علياء؟ اشرح كيف عرفت هذا.

طريقة علياء صحيحة. لعزل x، عليك قسمة كلا الطرفين على $\frac{a^3-b^3}{4a^2-b^2}$. للقسمة على تعبير نسبي، اضرب في معكوسه الضربي، $\frac{4a^2-b^2}{a^3-b^3}$.

9.1 ضرب التعابير النسبية وقسمتها 299

أخطاء شائعة

في بعض الأحيان، يعتقد الطلاب الذين يتعاملون مع التعابير النسبية أن بإمكانهم شطب الحدود المتشابهة في كثيرات الحدود. أكد على أنه في جميع التعابير النسبية، يمكن حذف العوامل المشتركة فقط الموجودة بتلك التعابير.

صحيح:	غير صحيح
$\frac{\cancel{(x+1)}(x+4)}{(x-2)\cancel{(x+1)}}$	$\frac{\cancel{x^2} - 2\cancel{x} - 15}{\cancel{x^2} - 2\cancel{x} - 35}$

مثال 5

نصيحة للتدريس

م.م.ر7

ذكّر الطلاب أن الكسور المركبة ليس مفهومًا جديدًا، وإنما هي ببساطة ترميز آخر لقسمة التعابير النسبية.

الأسئلة الداعمة

- ما ميزة كتابة الكسر المركب بالصورة $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$؟ **الإجابة النموذجية: يمكن أن تساعد كتابة الكسر بهذه الصورة الطلاب على رؤية بنية المسألة وذلك للضرب في المعكوس الضربي للمقسوم عليه بسهولة أكبر.**
- في الإجابة على **الجزء b**، لماذا يجب علينا تحديد أن z لا يمكن أن تكون صفرًا ولكن ليس x و y أيضًا؟ **من الواضح أن x و y ليسا صفرًا لأنهما واقعين في مقام الحل. الاستثناء هو z الذي يأتي من التعبير الأصلي. ويجب تحديد ذلك لأنه غير ممكن من خلال النظر إلى التعبير النهائي.**

مثال 6

نصيحة للتدريس

م.م.ر3

ذكّر الطلاب ما يعنيه تكافؤ تعبيرين في مجال محدد؛ أي أن لهما قيمة y نفسها لكلٍ من قيم x في المجال.

الأسئلة الداعمة

- ما مجال كل دالة في هذا المثال؟ **مجال الدالة الأولى هو جميع الأعداد الحقيقية التي لا تساوي -1 أو 1. ومجال الدالة الثانية هو جميع الأعداد الحقيقية التي لا تساوي 1.**
- هل $\frac{x+1}{x+1}$ تساوي 1 دائمًا؟ **لا، حيث قسمة أي عدد على نفسه تساوي 1 طالما أن هذا العدد ليس 0. بالنسبة إلى $x = -1$ فإن التعبير يكون $\frac{0}{0}$، وهو غير معرّف.**

تمرين

يطلب **التمرينان 1** و **2** من الطلاب التعليق بطريقة نقدية على طريقةٍ لقسمة التعابير النسبية، ثم استخدام الطريقة الصحيحة في حل مسألة.

في **التمرينين 3** و **4**، يجب على الطلاب العمل باستخدام قسمة التعابير النسبية لحل المسائل.

يستلزم **التمرين 5** من الطلاب قسمة التعابير النسبية.

يطلب **التمرين 6** من الطلاب تبسيط دالة نسبية ناتجة عن عملية ضرب والتفكير في مجالي الدالة الأصلية والدالة المبسطة.

2. **الحساب بدقة** أوجد قيمة x في المعادلة المعطاة. تحقق من إجابتك.

$\frac{a^3-b^3}{4a^2-b^2}(x) = \frac{a^2+ab+b^2}{2a+b}$، $\frac{a^3-b^3}{4a^2-b^2}\left(\frac{4a^2-b^2}{a^3-b^3}\right)(x) = \frac{a^2+ab+b^2}{2a+b}\left(\frac{4a^2-b^2}{a^3-b^3}\right)$، $x = \frac{a^2+ab+b^2}{2a+b}\left(\frac{4a^2-b^2}{a^3-b^3}\right)$

$x = \frac{a^2+ab+b^2}{2a+b}\left(\frac{(2a+b)(2a-b)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}\right)$؛ $x = \frac{2a-b}{a-b}$ التحقق: $\left(\frac{a^3-b^3}{4a^2-b^2}\right)\left(\frac{2a-b}{a-b}\right) = \left(\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(2a+b)(2a-b)}\right)$

$\left(\frac{2a-b}{a-b}\right) = \frac{a^2+ab+b^2}{2a+b}$

استخدم المعلومات التالية للإجابة على التمرينين 3 و 4.

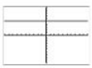
الزمن الذي يستغرقه إبراهيم لتجديف 9 km ضد التيار هو $\frac{9}{5-c}$، والزمن الذي يستغرقه لتجديف 9 km مع التيار هو $\frac{9}{5+c}$، حيث c هي سرعة التيار بكيلومترات في الساعة وحيث $0 \le c < 5$.

3. **تفسير المسائل** في أي اتجاه يتحرك إبراهيم أسرع، مع التيار أم ضده؟ اذكر سببين لإجابتك.
هو يتحرك مع التيار أسرع حيث إنه يتحرك باتجاه التيار وكل قيم c تجعل وقت تحركه ضد التيار أكبر من زمن تحركه مع التيار.

4. **الحساب بدقة** باستخدام إجابتك على **التمرين 3**، حدد كم يكون تحرك إبراهيم في الاتجاه السريع أسرع منه عن التحرك في الاتجاه البطيء. اشرح طريقتك.
اقسم السرعة الأعلى (مع التيار) على السرعة الأبطأ (ضد التيار) لتحصل على مقدار زيادة سرعة التحرك مع التيار عن السرعة ضد التيار. $\frac{9}{5+c} \div \frac{9}{5-c} = \frac{9}{5+c} \times \frac{5-c}{9} = \frac{5-c}{5+c}$، إذًا إبراهيم يتحرك مع التيار $\frac{5-c}{5+c}$ مرات أسرع مما يتحرك ضد التيار.

5. **التفكير بطريقة تجريدية** أثناء أسبوعها الأول في ممارسة الجري، استغرقت فاطمة t دقيقة لتجري كيلومترات واحدًا. بقياس الأميال في الساعة، سرعتها موضحة بواسطة $\frac{60}{t}$. تأمل فاطمة في الوصول بمتوسط توقيتها إلى $t - 2$ دقيقة في جريها مسافة ميل في أسبوعها الثاني من الجري. في المتوسط، تأمل فاطمة أن تجري مسافة كيلومترات أسرع بكمْ ضعف في أسبوعها الثاني مقارنة بأسبوعها الأول في الجري؟ اشرح كيف عرفت هذا.
بقسمة سرعة الأسبوع الثاني على سرعة الأسبوع الأول يمكنك تحديد ما المعدل الأسرع الذي تأمل أن تجري وفقًا له في المتوسط. $\frac{60}{t-2} \div \frac{60}{t} = \frac{60}{t-2} \times \frac{t}{60} = \frac{t}{t-2}$. تأملُ في الجري بمعدل $\frac{t}{t-2}$ أسرع أثناء أسبوعها الثاني من جريها في أثناء أسبوعها الأول.

6. **التعليق على طريقة الاستنتاج** مثلت فاطمة بيانيًا الدالة $y = \frac{5(x+1)(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ على حاسبة التمثيل البياني وتزعم أن النتيجة خط أفقي بسبب الرسم التالي. هل فاطمة محقة؟ اشرح استنتاجك.



سما تكاد تكون محقة. استنادًا إلى العوامل المشتركة، تكون الدالة في أبسط صورة وهي $y = 5$، وهي خط أفقي. ولكن مجال $y = 5$ كله أعداد حقيقية، في حين أن الدالة الأصلية غير مُعرّفة عند $x = -1$، وعند -2، وعند -3. فإذا كانت سما ستستخدم وظيفة التتبع "Trace"، فعند هذه القيم لـ x سترى أن الدالة غير مُعرّفة. والنتيجة تكاد تكون خطًا أفقيًا.

التأكيد على معايير الممارسة الرياضية

يتطلب م. م. ر 6 (مراعاة الدقة) من الطلاب حساب الكميات بدقة وتوصيل المفاهيم الرياضية وطرق التفكير إلى الآخرين بفعالية.

في **المثال 3b**، يوضح الطلاب طريقة تبسيط حاصل ضرب تعابير نسبية معطاة بشكل صحيح باستخدام المهارات والمعرفة الخاصة بتحليل كثيرات الحدود إلى العوامل. ويجب عليهم استخدام استنتاجهم الخاص لاستكشاف فائدة التحليل إلى العوامل قبل الضرب.

في **التمرينين 7 و 8**، يجب على الطلاب ضرب تعبيرين نسبيين في سياق من الحياة اليومية.

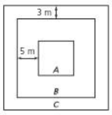
يطلب **التمرين 9** من الطلاب قسمة التعابير النسبية في شكل كسور مركبة.

تناول المعايير

التمرين	م. م. ر
1	3
2	6
3	1
4	6
5	2
6	3
7	4
8	2
9	7

استخدم المعلومات التالية للإجابة على التمرينين 7 و 8.

يتم تنسيق باحة منزل آية بشكل احترافي. ويتألف التصميم النهائي من نافورة قطرها x m في المربع A محاطة بمساحة عشبية بعرض 5 m في المربع B، وممشى من الحصى بعرض 3 m في المربع C الذي يحد المساحة العشبية. وستتمركز المساحات المربعة فوق بعضها البعض كما هو موضح في الرسم التخطيطي. وسيكون طول ضلع المربع $2x$ m.



7. **استخدام نموذج** ترغب آية في أن تكون أطوال أضلاع المربعات متناسبة. فلأي قيم من x، ستكون نسبة أطوال ضلع المربع C إلى ضلع من المربع B مساويةً لنسبة أطوال ضلع المربع B إلى ضلع من المربع A؟ اشرح استنتاجك. كم سيكون قطر النافورة؟

$C : B = \frac{(x+8)}{(x+5)}$، $B : A = \frac{(x+5)}{x}$ ؛ حتى تصبح هاتان النسبتان متساويتين، يجب أن $\frac{C}{B} \times \frac{A}{B}$ تساويا 1. وحتى تساويا 1، يجب أن يكون ناتج ضربهما ناتجًا عن تساوي البسط والمقام. إذًا، $\frac{x+8}{x+5} \times \frac{x}{x+5} = \frac{x^2+8x}{(x+5)^2}$ و $(x+5)(x+5) = x^2 + 8x$. الحل لإيجاد قيمة x يؤدي إلى $x = -12.5$. بما أن x لا يمكن أن يكون سالب القيمة، فليست هناك قيم لـ x ستجعل هذه النسب متساوية.

8. **التفكير بطريقة كمية** إذا غير مهندس تنسيق الحدائق عرض ممشى الحصى إلى 4 m وعرض المساحة العشبية إلى 2 m، فهل هناك قيمة لـ x ستجعل النسب الموصوفة في **التمرين 7** متساوية؟ اشرح استنتاجك. كم سيكون قطر النافورة؟

نعم؛ $C : B = \frac{x+6}{x+2}$، $B : A = \frac{x+2}{x}$ و $\frac{x+6}{x+2} \times \frac{x}{x+2} = \frac{x^2+6x}{(x+2)^2}$ حينما يكون $(x+2)(x+2) = x^2 + 6x$ و $x = 2$ يجب أن يكون طول ضلع المربع A بمقياس 4 m ويجب أن تكون النافورة بمقياس 2 m.

9. **استخدام البنية** بسّط الكسر المركب.

a. $\dfrac{\frac{(x^2-4)(x+1)}{x^2+x-12}}{\frac{(x-2)(x^2+1)}{(x+1)(x-3)}}$

$$\frac{\frac{(x^2-4)(x+1)}{x^2+x-12}}{\frac{(x-2)(x^2+1)}{(x+1)(x-3)}} = \frac{(x^2-4)(x+1)}{x^2+x-12} \div \frac{(x-2)(x^2+1)}{(x+1)(x-3)} = \frac{(x^2-4)(x+1)}{x^2+x-12} \times \frac{(x+1)(x-3)}{(x-2)(x^2+1)}$$

$$= \frac{(x+2)(x-2)(x+1)}{(x+4)(x-3)} \times \frac{(x+1)(x-3)}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{(x+2)(x+1)^2}{(x+4)(x^2+1)}$$ لكل $x \neq -1, 2, 3$

b. $\dfrac{x^2-x-6}{\left[\frac{2(x-3)}{x^2-1}\right]}$

$$\frac{x^2-x-6}{\left[\frac{2(x-3)}{x^2-1}\right]} = \frac{x^2-x-6}{1} \div \frac{2(x-3)}{x^2-1} = \frac{x^2-x-6}{1} \times \frac{x^2-1}{2(x-3)} = \frac{(x-3)(x+2)(x^2-1)}{2(x-3)} = \frac{(x+2)(x^2-1)}{2}$$

لكل $x \neq -1$، 1، 3.

c. $\dfrac{\left[\frac{x^2+5x+4}{x-3}\right]}{(x+1)(x+2)}$

$$\frac{\left[\frac{x^2+5x+4}{x-3}\right]}{(x+1)(x+2)} = \frac{x^2+5x+4}{x-3} \div \frac{(x+1)(x+2)}{1} = \frac{x^2+5x+4}{x-3} \times \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{(x+1)(x+4)}{x-3} \times \frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{(x+4)}{(x-3)(x+2)}$$ لكل $x \neq -1$.

أخطاء شائعة

في بعض الأحيان، يخلط الطلاب الذين يتعاملون مع الكسور المركبة بين الصيغتين $\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)}$ و $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c}$، مفترضين أن أبسط صورة لكليهما هي $\frac{ac}{b}$ أو $\frac{a}{bc}$ قد يكون مفيدًا للطلاب إعادة كتابة الكسر المركب باستخدام العدد 1 بدلاً من المقام المفقود. على سبيل المثال، $\frac{\left(\frac{x}{1}\right)}{\left(\frac{2}{x^2}\right)} = \frac{x}{\left(\frac{2}{x^2}\right)}$. قد يساعد ذلك على إعادة كتابة الكسر المركب على هيئة عملية ضرب.

9.2 جمع التعابير النسبية وطرحها

المعايير

معايير الممارسات الرياضية: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8

المتطلبات الأساسية

- جمع التعابير كثيرة الحدود وطرحها وضربها وقسمتها وتحليلها إلى العوامل
- جمع الأعداد النسبية وطرحها

مثال 1

نصيحة للتدريس
م.م.ر 7

إذا واجه أي طالب صعوبة في دمج التعابير النسبية، فاطلب منه اتباع مربع المفهوم الأساسي بتحديد a، وb، وc، وd ثم محاكاة النمط والحل الموضحين.

الأسئلة الداعمة

- هل الطريقة الموضحة في مربع المفهوم الأساسي هي الطريقة الوحيدة لدمج التعابير النسبية؟ **لا؛ حيث يمكن دمج تعبيرين نسبيين باستخدام أي مضاعف مشترك بين المقامين.**
- هل يتسم جمع التعابير النسبية بخاصية التبديل؟ هل يتسم الطرح بها؟ **يتسم جمع التعابير النسبية بخاصية التبديل بينما الطرح فلا.**

9.2 جمع التعابير النسبية وطرحها

الأهداف
- فهم أن التعابير النسبية مغلقة ضمن عمليتي الجمع والطرح.
- جمع التعابير النسبية وطرحها.

جمع التعابير النسبية وطرحها

لجمع تعابير نسبية مختلفة المقامات، أوجد المضاعف المشترك الأصغر. ثم أعد كتابة كل تعبير باستخدام المقام المشترك الأصغر. ثم اجمع.

في جمع $\frac{a}{b}$ و$\frac{c}{d}$ عندما تكون $b \neq 0$ و $d \neq 0$، $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$

لطرح تعابير نسبية مختلفة المقامات، أوجد المضاعف المشترك الأصغر. ثم أعد كتابة كل تعبير باستخدام المضاعف المشترك الأصغر. ثم اطرح.

في جمع $\frac{a}{b}$ $\frac{c}{d}$ عندما تكون $b \neq 0$ و $d \neq 0$، $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad - bc}{bd}$

مثال 1 استكشاف جمع التعابير النسبية وطرحها

الاستكشاف في هذا الاستكشاف، ستستكشف كيفية جمع التعابير النسبية وطرحها.

a. **استخدام البنية** افترض أن $A = \frac{2x}{x-3}$ و $B = \frac{x+1}{4x-1}$. أوجد وبسّط $A + B$. هل النتيجة تعبير نسبي؟

$$A + B = \frac{2x}{x-3} + \frac{x+1}{4x-1} = \frac{2x(4x-1)}{(x-3)(4x-1)} + \frac{(x+1)(x-3)}{(x-3)(4x-1)} = \frac{2x(4x-1) + (x+1)(x-3)}{(x-3)(4x-1)}$$

$$= \frac{8x^2 - 2x + x^2 - 2x - 3}{(x-3)(4x-1)} = \frac{9x^2 - 4x - 3}{(x-3)(4x-1)}$$ **النتيجة هي تعبير نسبي.**

b. **استخدام البنية** افترض أن $A = \frac{x+1}{x^2-2}$ و $B = \frac{3x}{x^2+3}$. أوجد وبسّط $A - B$. هل النتيجة تعبير نسبي؟

$$A - B = \frac{x+1}{x^2-2} - \frac{3x}{x^2+3} = \frac{(x+1)(x^2+3)}{(x^2-2)(x^2+3)} - \frac{(x^2-2)(3x)}{(x^2-2)(x^2+3)} = \frac{(x+1)(x^2+3) - (x^2-2)(3x)}{(x^2-2)(x^2+3)}$$

$$= \frac{x^3 + x^2 + 3x + 3 - 3x^3 + 6x}{(x^2-2)(x^2+3)} = \frac{-2x^3 + x^2 + 9x + 3}{(x^2-2)(x^2+3)}$$ **النتيجة هي تعبير نسبي.**

c. **التفكير بطريقة تجريدية** انظر إلى مربع المفهوم الأساسي أعلاه لجمع التعبيرين النسبيين $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$. هل تنطبق خاصية الإغلاق في الجمع على التعابير النسبية؟ اشرح.
نعم؛ تنطبق خاصية الإغلاق حيث إن المجموع هو أيضًا تعبير نسبي.

d. **التفكير بطريقة تجريدية** انظر إلى مربع المفهوم الأساسي أعلاه لطرح التعبيرين النسبيين $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$. هل تنطبق خاصية الإغلاق في الطرح على التعابير النسبية؟ اشرح.
نعم؛ تنطبق خاصية الإغلاق حيث إن الفرق هو أيضًا تعبير نسبي.

معلومات أساسية رياضية

تُستخدم الدوال النسبية لعمل نماذج للمعادلات المعقدة في العلوم والهندسة، بما فيها الكيمياء والديناميكا الهوائية وعلم البصريات والصوت. وتستخدم الرياضيات العليا الدوال النسبية، بما فيها على سبيل المثال لا الحصر الجبر التجريدي والتحليل العددي.

e. **بناء الفرضيات** هل مجموعة الأعداد النسبية مغلقة في الجمع والطرح؟ اشرح كيف عرفت ذلك.
نعم؛ تُعد مجموعة أعداد مغلقة ضمن عملية واحدة إذا كانت نتيجة هذه العملية لأي أعداد من هذه المجموعة موجودة أيضًا في المجموعة نفسها. وتُعد مجموعة أعداد نسبية مغلقة ضمن عمليتي الجمع والطرح لأن مجموع عددين نسبيين أو أكثر أو الفرق بينهما هو أيضًا عدد نسبي.

مثال 2 المقامات أحادية الحدود

بسّط $\frac{3x}{6y^3}+\frac{7z^2}{3x^2y}$ نفسه.

a. **التفكير بطريقة كمية** ما المضاعف المشترك الأصغر للمقام في $\frac{7z^2}{3x^2y}$ و $\frac{3x}{6y^3}$؟
$6x^2y^3$

b. **الحساب بدقة** بسّط التعبير باستخدام المضاعف المشترك الأصغر. اشرح كيف عرفت أن إجابتك في أبسط صورة.

$$\frac{7z^2}{3x^2y}+\frac{3x}{6y^3}=\frac{(7z^2)(2y^2)}{(3x^2y)(2y^2)}+\frac{(3x)(x^2)}{(6y^3)(x^2)}=\frac{(7z^2)(2y^2)}{6x^2y^3}+\frac{(3x)(x^2)}{6x^2y^3}$$

$$=\frac{(7z^2)(2y^2)+(3x)(x^2)}{6x^2y^3}=\frac{14y^2z^2+3x^3}{6x^2y^3}$$

الإجابة في أبسط صورة لأن البسط والمقام ليست بينهما أي عوامل مشتركة.

مثال 3 المقامات كثيرة الحدود

بسّط $\frac{3x}{x^2-4}-\frac{3}{2x-4}$ نفسه.

a. **الحساب بدقة** أوجد المضاعف المشترك الأصغر وبسّط التعبير. لماذا لا تحتوي الإجابة في أبسط صورها على المضاعف المشترك الأصغر كمقام لها؟

المقام المشترك الأصغر هو $2(x^2-4)$.

$$\frac{3x}{x^2-4}-\frac{3}{2x-4}=\frac{3x(2)}{2(x^2-4)}-\frac{3(x+2)}{(2x-4)(x+2)}=\frac{6x}{2(x^2-4)}-\frac{3x+6}{2(x^2-4)}=\frac{6x-(3x+6)}{2(x^2-4)}$$

$$=\frac{3x-6}{2(x^2-4)}=\frac{3(x-2)}{2(x+2)(x-2)}=\frac{3}{2(x+2)}$$

بالنسبة إلى $x \neq 2$.

عند التبسيط، كل العوامل المشتركة يتم تحليلها لاستبعادها. وبما أن أحد العوامل في المضاعف المشترك الأصغر يظهر في البسط، فيكون مُلغًى.

b. **التفكير بطريقة كمية** كيف سيختلف التبسيط بالنسبة للتعبير $\frac{3x}{4-x^2}-\frac{3}{4-2x}$؟ أوجد المقام المشترك الأصغر، وحول هذا التعبير لأبسط صورة. كيف يرتبط بالتعبير الأصلي؟ ولماذا يُعتبر هذا صحيحًا؟

المقام المشترك الأصغر هو $2(4-x^2)$.

$$\frac{3x}{4-x^2}-\frac{3}{4-2x}=\frac{3x(2)}{2(4-x^2)}-\frac{3(2+x)}{(4-2x)(2+x)}=\frac{6x}{2(4-x^2)}-\frac{6+3x}{2(4-x^2)}=\frac{6x-(6+3x)}{2(4-x^2)}=\frac{3x-6}{2(4-x^2)}$$

$$=\frac{3(x-2)}{2(2-x)(2+x)}=\frac{-3(2-x)}{2(2-x)(2+x)}=-\frac{3}{2(2+x)}$$

بالنسبة إلى $x \neq 2$. الإجابة هي القيمة السالبة للإجابة من الجزء a. وهذا صحيح لأن كل حد في التعبير هو القيمة السالبة للحدود المناظرة من الجزء a.

التأكيد على معايير الممارسة الرياضية

في م. م. ر 7 **(محاولة إيجاد البنية واستخدامها)**، يستطيع الطلاب النظر إلى نواتج الجمع أو الطرح المعقدة للتعابير النسبية باعتبارها تعابير منفردة أو تركيب لتعبيرين أو أكثر. وعند تبسيط جمع التعابير النسبية أو طرحها، قد يتعين على الطلاب تناول الأجزاء المختلفة في التعبير قبل أن يستطيعوا التأكد من أنهم قد حوّلوا المجموع أو الفارق إلى أبسط صورة. وبتحليل كل مقام إلى العوامل، سيتمكنون من إيجاد المضاعف المشترك وكتابة كل تعبير. وبعد إجراء الجمع أو الطرح، قد لا تزال هناك حاجة لتحليل النتيجة إلى العوامل من أجل تبسيط التعبير النسبي بشكل كامل.

مثال 2

نصيحة للتدريس
م.م.ر 6

راجع جمع/طرح الكسور ذات المقامات المختلفة إذا لزم لضمان قدرة الطلاب على إيجاد المضاعف المشترك الأصغر للمقامات.

الأسئلة الداعمة

- فيم يتم ضرب التعبير النسبي لتتم إعادة كتابته على هيئة تعبير نسبي متكافئ له مقام مختلف؟ اضرب مثالاً على ذلك. **يتم ضربه في 1 على هيئة تعبير نسبي.** $\frac{3x}{4y}\cdot\left(\frac{x+2}{x+2}\right)=\frac{3x(x+2)}{4y(x+2)}$
- هل من الضروري تقديم مجموع تعبيرين نسبيين أو الفارق بينهما في أبسط صورة للحدود؟ **إذا ذكرت التوجيهات ذلك، فنعم. وإلا يعتمد على ما إذا كانت الحدود في أبسط صورة لها أكثر فائدة للحالة المقدمة أم لا.**

مثال 3

نصيحة للتدريس
م.م.ر 6

في بعض الأحيان يلزم تحليل المقام إلى العوامل من أجل إيجاد المضاعف المشترك الأصغر ودائمًا ما ينجح التوصل إلى مضاعف مشترك عن طريق ضرب المقامات. ولكن قد يتطلب ذلك المزيد من التبسيط في النهاية.

الأسئلة الداعمة

- ما العامل (العوامل) المشتركة بين x^2-4 و $2x-4$؟ **$(x-2)$**
- إذا لم تجد أي عوامل مشتركة، فماذا يمكنك فعله للتوصل إلى مضاعف مشترك؟ **ضرب المقامين معًا للحصول على $(x^2-4)(2x-4)$.**

مثال 4

نصيحة للتدريس

م.م.ر 7

شجّع الطلاب على التركيز على كل خطوة منفصلة في العملية لهذه المسألة. وبمجرد أن يكتبوا الكسر المركّب، اطلب منهم التركيز على البسط والمقام كل على حدة. بهذه الطريقة يتمكنون من تقليل صعوبة المسألة

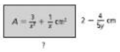
الأسئلة الداعمة

- ما المضاعف المشترك الأصغر بالمعادلة الذي يحدد العرض؟ $5y$
- ما المضاعف المشترك الأصغر لجميع المقامات؟ $5x^2y$
- كيف تقارن المضاعف المشترك الأصغر لجميع المقامات بالمقامات المشتركة الصغرى للمعادلات الفردية؟ $5x^2y = x^2 \cdot 5y$

يمكن أن يكون للكسر المركب مجموع تعابير نسبية أو فرقها موجود في البسط و/أو المقام. وإحدى طرق تحويل كسر مركب لأبسط صورة من هذه الصيغة هي تحويل البسط والمقام لأبسط صورة بشكل منفصل. وهناك طريقة أخرى لتحويل كسر مركب لأبسط صورة من هذه الصيغة، وهي إيجاد المقام المشترك الأصغر لكل المقامات، ثم استخدام المقام المشترك الأصغر لإعادة كتابة الكسر المركب وتبسيطه.

مثال 4 طريقتان لتبسيط الكسور المركبة

أوجد طول الأبعاد المجهولة في الشكل المستطيل الموضح.



a. **استخدام نموذج** اكتب كسرًا مركبًا يمثل طول البعد المجهول. اشرح كيف أوجدت الكسر المركب. هل هناك أي قيود على القيم لكلٍ من x و y؟ اشرح.

$\frac{\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x}}{2-\frac{4}{5y}}$؛ بما أن $A = w\ell$، إذًا $\ell = \frac{A}{w}$. إذًا فالبعد المجهول طوله $\frac{\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x}}{2-\frac{4}{5y}}\ cm$. هناك قيم مقيّدة لأن المقامات لا يمكن أن تساوي صفرًا وينبغي أن يكون الطول والعرض موجبين. إذًا، $x > 0$ و $y > 0$ و $y > \frac{2}{5}$.

b. **استخدام البنية** قم بتبسيط البسط والمقام بشكل منفصل. اكتب الحل هنا.

البسط هو $\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x} = \frac{3}{x^2}+\frac{x}{x^2} = \frac{3+x}{x^2}$.

المقام هو $2-\frac{4}{5y} = \frac{2(5y)}{5y}-\frac{4}{5y} = \frac{10y-4}{5y}$. إذًا $\frac{\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x}}{2-\frac{4}{5y}} = \frac{\frac{3+x}{x^2}}{\frac{10y-4}{5y}}$.

c. **الحساب بدقة** ما البعد المجهول في أبسط صورة؟ كيف تساعدك معرفة كيفية ضرب التعابير النسبية وقسمتها؟

$\frac{15y+5xy}{10x^2y-4x^2}\ cm$ بالنسبة إلى $x > 0$، و $y > 0$، و $y > \frac{2}{5}$؛ لتحويل التعبير في الجزء b إلى أبسط صورة، عليك إعادة كتابة المسألة كمسألة ضرب عن طريق ضرب كلا طرفي المعادلة في المعكوس الضربي للمقام.

d. **وَصفُ طريقة الحل** أوجد المضاعف المشترك الأصغر لكل المقامات في الكسر المركب الأصلي من **الجزء a**. استخدم هذا المضاعف المشترك الأصغر لتبسيط المعادلة. اشرح ما يحدث في المقامات.

المقام المشترك الأصغر هو $5x^2y$.

$\frac{\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x}}{2-\frac{4}{5y}} = \frac{\frac{3(5y)}{5x^2y}+\frac{5xy}{5x^2y}}{\frac{2(5x^2y)}{5x^2y}-\frac{4(x^2)}{5x^2y}} = \frac{\frac{15y+5xy}{5x^2y}}{\frac{10x^2y-4x^2}{5x^2y}} = \frac{15y+5xy}{5x^2y} \div \frac{10x^2y-4x^2}{5x^2y} = \frac{15y+5xy}{5x^2y} \cdot \frac{5x^2y}{10x^2y-4x^2}$

$= \frac{15y+5xy}{10x^2y-4x^2}$ بالنسبة إلى $x > 0$، و $y > 0$، و $y > \frac{2}{5}$.

حُذفت كل المقامات بالضرب في المضاعف المشترك الأصغر المشترك بين كل المقامات.

التأكيد على معايير الممارسة الرياضية

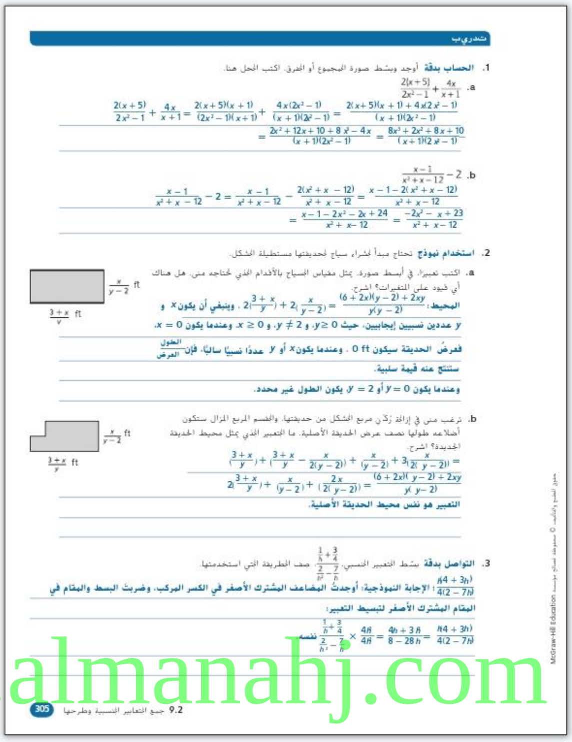
في **م. م. ر 6 (مراعاة الدقة)**، يحاول الطلاب توصيل المعلومات بدقة للآخرين. سوف يستخدمون تعريفات واضحة مع الآخرين إلى جانب استنتاجهم الخاص. وعند حل الكسور المركبة، يمكن للطلاب استخدام إحدى طريقتين. سيتمكن الطلاب من مناقشة الأسباب التي تجعلهم يفضلون طريقة لمسألة محددة مع ذكر الأسباب الخاصة لذلك. قد يُضمّنون إيجاد المضاعف المشترك الأصغر، و/أو التحليل إلى العوامل و/أو الضرب في المعكوس الضربي كأسباب لاختيار طريقة عن الأخرى في تبسيط الكسور المركبة.

تمرين

في **التمرين 1**، يجب على الطلاب جمع التعابير النسبية وطرحها.

يطلب **التمرين 2** من الطلاب جمع التعابير النسبية وطرحها في سياق الحياة اليومية.

في **التمرين 3**، يجب على الطلاب تبسيط الكسر المركب، وهي عملية تتضمن جمع تعابير نسبية وطرحها وقسمتها.



تدريب

1. **الحساب بدقة** أوجد وبسّط صورة المجموع أو الفرق. اكتب الحل هنا.

a. $\frac{2(x+5)}{2x^2-1}+\frac{4x}{x+1}$

$$\frac{2(x+5)}{2x^2-1}+\frac{4x}{x+1}=\frac{2(x+5)(x+1)}{(2x^2-1)(x+1)}+\frac{4x(2x^2-1)}{(x+1)(2x^2-1)}=\frac{2(x+5)(x+1)+4x(2x^2-1)}{(x+1)(2x^2-1)}$$
$$=\frac{2x^2+12x+10+8x^3-4x}{(x+1)(2x^2-1)}=\frac{8x^3+2x^2+8x+10}{(x+1)(2x^2-1)}$$

b. $\frac{x-1}{x^2+x-12}-2$

$$\frac{x-1}{x^2+x-12}-2=\frac{x-1}{x^2+x-12}-\frac{2(x^2+x-12)}{x^2+x-12}=\frac{x-1-2(x^2+x-12)}{x^2+x-12}$$
$$=\frac{x-1-2x^2-2x+24}{x^2+x-12}=\frac{-2x^2-x+23}{x^2+x-12}$$

2. **استخدام نموذج** تحتاج مبدأ لشراء سياج لحديقتها مستطيلة الشكل.

$\frac{x}{y-2}$ ft

$\frac{3+x}{y}$ ft

a. اكتب تعبيرًا، في أبسط صورة، يمثل مقياس السياج بالأقدام الذي تحتاجه منى. هل هناك أي قيود على المتغيرات؟ اشرح.

المحيط: $2(\frac{3+x}{y})+2(\frac{x}{y-2})=\frac{(6+2x)(y-2)+2xy}{y(y-2)}$ **، وينبغي أن يكون x و y عددين نسبيين إيجابيين، حيث $y \geq 0$، و $y \neq 2$، و $x \geq 0$. وعندما يكون $x = 0$،**

فعرضُ الحديقة سيكون 0 ft . وعندما يكون x أو y عددًا نسبيًا سالبًا، فإن $\frac{\text{الطول}}{\text{العرض}}$ ستنتج عنه قيمة سلبية.

وعندما يكون $y = 0$ أو $y = 2$، يكون الطول غير محدد.

$\frac{x}{y-2}$ ft

$\frac{3+x}{y}$ ft

b. ترغب منى في إزالة رُكن مربع الشكل من حديقتها. والقسم المربع المزال ستكون أضلاعه طولها نصف عرض الحديقة الأصلية. ما التعبير الذي يمثل محيط الحديقة الجديدة؟ اشرح.

$$(\frac{3+x}{y})+(\frac{3+x}{y}-\frac{x}{2(y-2)})+(\frac{x}{y-2})+3(\frac{x}{2(y-2)})=$$
$$2(\frac{3+x}{y})+(\frac{x}{y-2})+(\frac{2x}{2(y-2)})=\frac{(6+2x)(y-2)+2xy}{y(y-2)}$$

التعبير هو نفس محيط الحديقة الأصلية.

3. **التواصل بدقة** بسّط التعبير النسبي، $\frac{\frac{1}{h}+\frac{3}{4}}{\frac{2}{h^2}-\frac{7}{h}}$. صف الطريقة التي استخدمتها.

$\frac{h(4+3h)}{4(2-7h)}$ **؛ الإجابة النموذجية: أوجدتُ المضاعف المشترك الأصغر في الكسر المركب، وضربتُ البسط والمقام في المقام المشترك الأصغر لتبسيط التعبير:**

$$\frac{\frac{1}{h}+\frac{3}{4}}{\frac{2}{h^2}-\frac{7}{h}}\times\frac{4h^2}{4h^2}=\frac{4h+3h^2}{8-28h}=\frac{h(4+3h)}{4(2-7h)}$$ **نفسه.**

أخطاء شائعة

إحدى الأخطاء الشائعة هي التحليل إلى العوامل بشكل خاطئ عندما تبدو العوامل متشابهة ولكنها مختلفة. مثل $\frac{(2-x)}{(x-2)}$ عادة ما يساوي الطلاب هذا النوع من التعابير بالعدد 1. اقترح عليهم التعويض عن x بقيمة ما حتى يروا أن التعبير لا يساوي 1 فعلاً وأن البسط والمقام في الحقيقة معكوسان جمعيان (مجموعهما 0) لبعضهما البعض. اطلب من الطلاب الاستعانة بخاصية التوزيع واستخدامها لتحليل البسط (أو المقام) إلى العوامل لإيجاد العامل المشترك. على سبيل المثال، $\frac{(2-x)}{(x-2)}=\frac{-1(x-2)}{(x-2)}=-1$.

يتطلب **التمرين 4** من الطلاب جمع ثلاثة تعابير نسبية لإيجاد متوسطهم.

في **التمرين 5**، يجب على الطلاب تبسيط كسر مركب مستخدم لتمثيل المقاومة عن طريق جمع التعابير النسبية.

في **التمرين 6**، يجب على الطلاب جمع التعابير النسبية في سياق من الحياة اليومية.

4. **الحساب بدقة** حدد متوسط الأعداد الثلاثة النسبية التي تمثلها هذه التعابير النسبية: $\frac{1}{x}$، $\frac{1}{x-3}$ و $\frac{1}{2x}$، بالنسبة إلى $x \neq 3$، و $x \neq 0$. اشرح كيف أوجدت المتوسط.

المتوسط هو مجموع الأعداد المعطاة مقسومًا على عدد هذه الأعداد.

إذًا، أوجد متوسط $\frac{1}{x}$، $\frac{1}{x-3}$ **و** $\frac{1}{2x}$ **هو** $\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{2x}}{3} = \frac{\frac{1(2)(x-3)}{x(2)(x-3)}+\frac{1(2)(x)}{(x-3)(2)(x)}+\frac{1(x-3)}{2x(x-3)}}{3}$

$= \frac{\frac{2(x-3)}{2x(x-3)}+\frac{2x}{2x(x-3)}+\frac{x-3}{2x(x-3)}}{3} = \frac{\frac{2(x-3)+2x+x-3}{2x(x-3)}}{3}$

$= \frac{2(x-3)+2x+x-3}{6x(x-3)} = \frac{5x-9}{6x(x-3)}$ **بالنسبة إلى** $x \neq 0$ **و** $x \neq 3$.

5. المقاوم هو مكوّن كهربي يقلل تدفق التيار الكهربي خلال الدائرة. ويتصل المقاوم بالتوازي حين يتصل كلا طرفيه بكلي طرفي مقاوم مجاور. وعند توصيل ثلاثة مقاومات بالتوازي فإن المقاومة الإجمالية، R_T تكون موضحة بالصيغة $R_T = \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}}$

a. **التفكير بطريقة تجريدية** بسّط الكسر المركب. اشرح كيف عرفت أن نتيجتك محولة لأبسط صورة ممكنة.

$\frac{R_1R_2R_3}{R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2}$؛ **بسبب عدم وجود عوامل مشتركة بين البسط والمقام يمكن حذفها بالتحليل إلى العوامل، فإن نتيجتي مُحولة لأبسط صورة.**

b. **تقييم منطقية النتائج** أوجد تامر هذه الصيغة للمقاومة الإجمالية، $\frac{1}{R_T}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}$، وقال إن هذه الصيغة مكافئة للصيغة الأصلية.. هل تامر محق؟ اشرح.

نعم؛ حيث $R_T = \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}} = \frac{R_1R_2R_3}{R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2}$، $\frac{1}{R_T} = \frac{R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2}{R_1R_2R_3}$

$= \frac{R_2R_3}{R_1R_2R_3}+\frac{R_1R_3}{R_1R_2R_3}+\frac{R_1R_2}{R_1R_2R_3} = \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}$.

6. **التخطيط للحل** تُنشئ مدرسة ثانوية محلية حديقة متنزه محلي. يمكن لخالد زرع حوض زهور في 3 ساعات. ويمكن لكامل أن يزرع حوض زهور بالحجم نفسه في 4 ساعات. باستخدام t، الزمن بالساعات، اكتب تعبيرًا يمثل عدد أحواض الزهور التي سيكملانها في عدد t من الساعات بالعمل معًا. اشرح استنتاجك.

في ساعة واحدة، سيزرع خالد $\frac{1}{3}$ **من حوض الزهور، أو** $\frac{t}{3}$ **أحواض زهور في غضون** t **ساعات. وفي ساعة واحدة سيزرع كامل** $\frac{1}{4}$ **من حوض الزهور، أو** $\frac{t}{4}$ **أحواض زهور في غضون** t **ساعات. وبجمع التعبيرين،** $\frac{t}{3}+\frac{t}{4}=\frac{7t}{12}$.

إذًا، $\frac{7t}{12}$ **يمثل عدد أحواض الزهور التي ستتم زراعتها في** t **ساعات.**

تلميح تقني

يمكن استخدام حاسبة التمثيل البياني للتحقق من صحة الإجابات عند جمع التعابير النسبية وطرحها في أحد المتغيرات. أدخل التعبير الأصلي إلى Y_1 والحل إلى Y_2. اجعل الحاسبة ترسم التمثيل البياني لكلا الدالتين في نافذة العرض نفسها. إذا تطابق التمثيلان البيانيان فيمكنك استنتاج صحة الحل.

في **التمرين 7**، يتعين على الطلاب قسمة الطول إلى أربعة أجزاء متساوية باستخدام جمع التعابير النسبية.

يطلب **التمرين 8** من الطلاب تبسيط التعابير النسبية الناتجة عن عمليات الجمع.

تناول المعايير

التمرين	م. م. ر
1	6
2	4
3–4	6
5	2, 8
6–7	1
8	2

7. التخطيط للحل حدد ثلاثة أعداد حقيقية تقسم خط الأعداد الحقيقية بين $\frac{x}{6}$ و $\frac{x}{2}$ ($x \neq 0$) إلى أربعة أجزاء متساوية. اشرح استنتاجك.

الأعداد الثلاثة هي $\frac{x}{4}$، $\frac{x}{3}$ و $\frac{5x}{12}$ لكل $x \neq 0$. إذا كان m هو العدد الأوسط بين $\frac{x}{6}$ و $\frac{x}{2}$، إذًا $m = \left(\frac{x}{6} + \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{4x}{12} = \frac{x}{3}$. إذا كان n هو العدد الأوسط بين $\frac{x}{6}$ و $\frac{x}{3}$، إذًا $n = \left(\frac{x}{6} + \frac{x}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3x}{12} = \frac{x}{4}$. إذا كان p هو العدد الأوسط بين $\frac{x}{3}$ و $\frac{x}{2}$، إذًا $p = \left(\frac{x}{3} + \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{5x}{12}$.

8. التفكير بطريقة كمية فكّر في التعبير $\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$.

a. بسّط التعبير.

$\frac{x}{x+1} = 1\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{1}{\frac{x+1}{x}} = \frac{1}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$، $x \neq 0$.

b. استخدم ما أجريته من **الجزء a** لتبسيط ما يلي $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}$.

$\frac{x+1}{2x+1} = 1\left(\frac{x+1}{2x+1}\right) = \frac{1}{\frac{2x+1}{x+1}} = \frac{1}{\frac{x+1+x}{x+1}} = \frac{1}{\frac{x+1}{x-1}+\frac{x}{x+1}} = \frac{1}{1+\frac{x}{x+1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}$، $x \neq 0$، -1.

c. استخدم ما أجريته من **الجزء b** لتبسيط ما يلي $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}}$.

$\frac{2x+2}{3x+2} = 1\left(\frac{2x+2}{3x+2}\right) = \frac{1}{\frac{3x+2}{2x+1}} = \frac{1}{\frac{(2x+1)+(x+1)}{2x+1}} = \frac{1}{\frac{2x+1}{2x+1}+\frac{x+1}{2x+1}} = \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}}$، $x \neq 0$، -1، $-\frac{1}{2}$.

d. استخدم ما أجريته من **الجزء c** لتبسيط ما يلي $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}}}$.

$\frac{3x+2}{5x+3} = 1\left(\frac{3x+2}{5x+3}\right) = \frac{1}{\frac{5x+3}{3x+2}} = \frac{1}{\frac{(3x+2)+(2x+1)}{3x+2}} = \frac{1}{\frac{3x+2}{3x+2}+\frac{2x+2}{3x+2}} = \frac{1}{1+\frac{2x+2}{3x+2}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}}}$،

$x \neq 0$، -1، $\frac{1}{2}$، أو $-\frac{2}{3}$.

e. بالنسبة إلى $x = 1$. أوجد قيم كل التعابير الأربعة.

بالنسبة إلى $x = 1$، $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} = \frac{x}{x+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$؛ $\frac{2}{3} = \frac{1+1}{2+1} = \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}$؛ $\frac{(2x+1)}{(3x+2)} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}}$؛

$\frac{3}{5} = \frac{2+1}{3+2}$ ؛ $\frac{5}{8} = \frac{3+2}{5+3} = \frac{3x+2}{5x+3} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}}}$.

f. تعتبر أرقام فيبوناتشي متتالية مشهورة تبدأ بالحدين 1 و 1. حيث يمكن إيجاد الحد التالي بجمع الحدين الأوليين. إذًا فمتتالية فيبوناتشي هي 34 ,21 ,13 ,8 ,5 ,3 ,2 ,1 ,1، ... فما الذي يبدو مشتركًا بين إجاباتك من **الجزء e**؟ ما تخمينك للقيمة التالية في النمط من **الجزء e**؟

يبدو أن القيم هي نسب من عددي فيبوناتشي متتاليين. فينبغي أن تكون القيمة التالية هي $\frac{8}{13}$.

التأكيد على معايير الممارسة الرياضية

في **م. م. ر 1 (فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها)**، يبدأ الطلاب بشرح معنى المسألة إلى أنفسهم والبحث عن مداخل إلى الحل. بإمكان الطلاب ربط عملية جمع التعابير النسبية وطرحها بجمع الأعداد النسبية وطرحها في الصيغة الكسرية. ويعد فهم أهمية الحصول على مقام مشترك، ومعرفة طريقة تحليل كثيرات الحدود إلى العوامل لإيجاد المقام المشترك الأصغر، والتحلي بمهارة إعادة كتابة التعابير النسبية في تعابير متكافئة قبل إجراء العمليات عليها، كل ذلك مهارات لازمة لتبسيط التعابير النسبية.

9.3 التمثيل البياني لدوال المقلوب

المعايير

معايير الممارسات الرياضية: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8

المتطلبات الأساسية

- فهم معدل التغير والميل
- فهم التعابير النسبية

9.3 تمثيل دوال المقلوب بيانيًا

الأهداف

- تكوين دالة عكسية وتمثيلها بيانيًا وتفسير ميزات أساسية للتمثيل البياني.
- حساب متوسط معدل التغيير لدالة على مدار فترة وتفسيره.

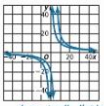
مثال 1 إنشاء دالة وتمثيلها بيانيًا

الاستكشاف إن جرد *الغابات* هو إحصاء للأشجار وصفاتها. وغالبًا ما يستخدم الباحثون قطعة *أرض ثابتة المساحة* لتحليل الأشجار ضمن منطقة محددة المساحة. ويحلل جرد الغابات الحالي قطع أراضٍ مستطيلة مساحتها $100\ m^2$.

a. **استخدام نموذج** إحدى قطع الأراضي طولها x أمتار وعرضها y أمتار. اكتب معادلة لـ y في صورة x لتوضيح كيف يرتبط x و y بمساحة قطعة الأرض.
$xy = 100$؛ $y = \frac{100}{x}$

b. **تفسير المسائل** افترض أن قطعة أرض أخرى ستتألف من طول أقل بخمسة أمتار من القطعة الأولى. اكتب معادلة تمثل عرض y_2 قطعة الأرض الثانية بدلالة x، وهو طول القطعة الأولى.
$y_2 = \frac{100}{x-5}$؛ $y_2x_2 = 100$، حيث $x_2 = x - 5$ بحيث يكون $y_2(x-5) = 100$.

c. **استخدام نموذج** مثّل بيانيًا المعادلات التي تخص y و y_2 على المستوى الإحداثي.



d. **التفكير بطريقة كمية** ما المجال المناسب للدوال، مع وضع السياق الذي تُستخدم فيه هذه الدوال في الاعتبار؟ اشرح.
$D = \{x | x > 0\}$؛ يمكن لطول قطعة الأرض أن يكون أي عدد حقيقي موجب.

e. **التواصل بدقة** كيف يقارن التمثيل البياني الذي يخص y_2 بالتمثيل البياني الذي يخص y؟ اشرح التغيير في التمثيل البياني بناءً على السياق.
التمثيل البياني الذي يخص y_2 هو التمثيل البياني نفسه الذي يخص y ولكنه مُزاح بمقدار 5 وحدات إلى اليمين. وعرض قطعة الأرض الثانية محدد وفقًا لطول أقل من طول قطعة الأرض الأولى بمقدار 5 m. إذا كان عرض قطعة الأرض الأولى هو w عندما يكون الطول هو x، فيكون عرض قطعة الأرض الثانية بمقدار w عندما يكون الطول هو $x + 5$.

f. **التفكير بطريقة كمية** ما الذي يحدث للتمثيلات البيانية حينما يصبح x كبيرًا بقيمة بالغة ($x \to \infty$)؟ ما السبب في أن هذا منطقي؟
y و y_2 تقتربان من 0 ($y \to 0$ و $y_2 \to 0$)؛ وهذا منطقي لأنه عندما يكون الطول كبيرًا للغاية، ينبغي أن يكون العرض صغيرًا للغاية حتى تكون المساحة $100\ m^2$.

مثال 1

نصيحة للتدريس م.م.ر 4

شجع الطلاب على رسم عدة مستطيلات وكتابة الأبعاد التي ينتج عنها مساحة $100\ m^2$. بإمكان الطلاب بعد ذلك تحويل هذا العمل إلى جدول من الأزواج المرتبة واستخدام الجدول لمساعدتهم على تمثيل الدالة بيانيًا.

الأسئلة الداعمة

- لأي قيم x تكون الدالة $y = \frac{100}{x}$ معرفة؟ **الدالة معرفة مع جميع قيم x، عدا $x = 0$.**
- هل تمس التمثيلات البيانية المحور x أبدًا؟ لِمَ أو لِمَ لا؟ **لا؛ فلو مست التمثيلات البيانية المحور x، فسوف تكون قيمة y أو y_2 تساوي 0 وهذا غير ممكن. تقترب التمثيلات البيانية للغاية من محور x ولكنها لا تمسه.**

معلومات أساسية رياضية

دالة المقلوب الأم هي $f(x) = \frac{1}{x}$. نظرًا لأن $x \times f(x) = 1$. يمكن اعتبار هذه الدالة على أنها الدالة التي تصل بالرسم كل عدد حقيقي غير صفري بمعكوسه الضربي.

تتسم الدالة بخاصية مميزة، وهي أنها معكوس نفسها. ويمكن رؤية ذلك في التمثيل البياني للدالة عن طريق تماثلها على الخط $y = x$. ويمكن عرض ذلك جبريًا أيضًا؛ $f(f(x)) = f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{1/x} = x$ لجميع القيم عدا $x \neq 0$. بعبارة أخرى، الدالة $f(x)$ "تلغي" نفسها. ولذلك $f(x)$ هي معكوس نفسها.

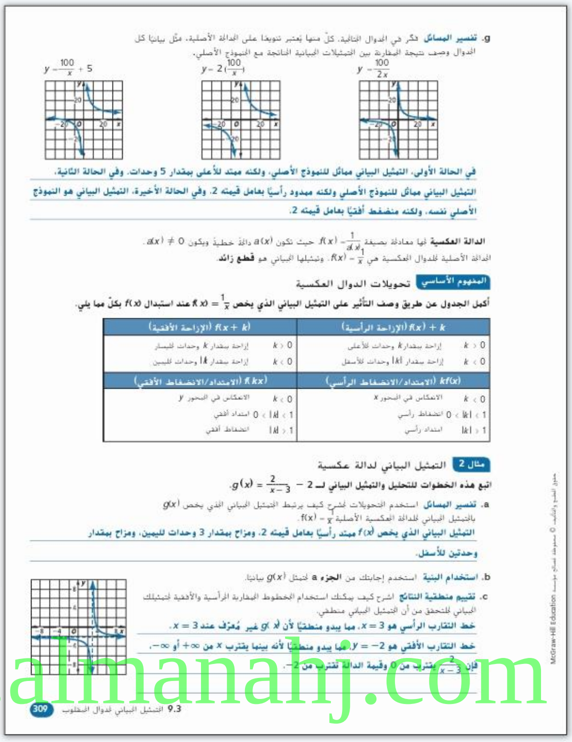
مثال 2

نصيحة للتدريس م.م.ر 1

يطلب هذا المثال من الطلاب تمثيل دالة بيانيًا. وعندما يواجه الطلاب مثل هذه المهام، ينتقلون مباشرة إلى عملية تحديد مواقع النقاط ورسم المنحنيات. ولكن قد يوضح **الجزء a** من هذا المثال قيمة التفكير في الدالة أولاً. بمجرد أن يفهم الطلاب طريقة تكوّن الدالة، سيصبح رسم تمثيلها البياني أكثر وضوحًا.

الأسئلة الداعمة

- قبل تمثيل الدالة بيانيًا، هل تعتقد سيكون لها خط تقارب رأسي؟ إذا كان كذلك، فأين تتوقع وجوده؟ **نعم. فالدالة غير معرّفة عند النقطة $x = 3$، لذا ينبغي أن يكون الخط $x = 3$ خط تقارب رأسيًا.**
- هل للتمثيل البياني نقطة تقاطع مع المحور x؟ إذا كان له، فما هي ولماذا يعد وجودها أمرًا منطقيًا؟ **نعم؛ $x = 4$. ووجودها أمر منطقي لأن $g(4) = \frac{2}{4-3} - 2 = 0$.**
- ما أوجه الشبه والاختلاف بين هذا التمثيل البياني وذلك الذي يُرسم إذا كانت الدالة $g(x) = \frac{2}{x-3} + 2$؟ **كان الشكل ليكون واحدًا ولكن مع إزاحة هذا التمثيل البياني بمقدار 2 وحدة أعلى الدالة الأم.**



g. **تفسير المسائل** فكر في الدوال التالية. كلٌ منها يُعتبر تنويعًا على الدالة الأصلية. مثّل بيانيًا كل الدوال وصف نتيجة المقارنة بين التمثيلات البيانية الناتجة مع النموذج الأصلي.

$y = \frac{100}{x} + 5$ $\quad$ $y = 2\left(\frac{100}{x}\right)$ $\quad$ $y = \frac{100}{2x}$

في الحالة الأولى، التمثيل البياني مماثل للنموذج الأصلي، ولكنه ممتد للأعلى بمقدار 5 وحدات. وفي الحالة الثانية، التمثيل البياني مماثل للنموذج الأصلي ولكنه ممدود رأسيًا بعامل قيمته 2. وفي الحالة الأخيرة، التمثيل البياني هو النموذج الأصلي نفسه، ولكنه منضغط أفقيًا بعامل قيمته 2.

الدالة العكسية لها معادلة بصيغة $f(x) = \frac{1}{a(x)}$ حيث تكون $a(x)$ دالة خطية ويكون $a(x) \neq 0$. الدالة الأصلية للدوال العكسية هي $f(x) = \frac{1}{x}$. وتمثيلها البياني هو **قطع زائد**.

المفهوم الأساسي تحويلات الدوال العكسية

أكمل الجدول عن طريق وصف التأثير على التمثيل البياني الذي يخص $f(x) = \frac{1}{x}$ عند استبدال $f(x)$ بكلٍّ مما يلي.

$f(x) + k$ (الإزاحة الرأسية)		$f(x + k)$ (الإزاحة الأفقية)	
$k > 0$	إزاحة بمقدار k وحدات للأعلى	$k > 0$	إزاحة بمقدار k وحدات لليسار
$k < 0$	إزاحة بمقدار $\lvert k \rvert$ وحدات للأسفل	$k < 0$	إزاحة بمقدار $\lvert k \rvert$ وحدات لليمين
$kf(x)$ (الامتداد/الانضغاط الرأسي)		**$f(kx)$ (الامتداد/الانضغاط الأفقي)**	
$k < 0$	الانعكاس في المحور x	$k < 0$	الانعكاس في المحور y
$1 > \lvert k \rvert > 0$	انضغاط رأسي	$1 > \lvert k \rvert > 0$	امتداد أفقي
$\lvert k \rvert > 1$	امتداد رأسي	$\lvert k \rvert > 1$	انضغاط أفقي

مثال 2 التمثيل البياني لدالة عكسية

اتبع هذه الخطوات للتحليل والتمثيل البياني لـ $g(x) = \frac{2}{x-3} - 2$.

a. **تفسير المسائل** استخدم التحويلات لشرح كيف يرتبط التمثيل البياني الذي يخص $g(x)$ بالتمثيل البياني للدالة العكسية الأصلية $f(x) = \frac{1}{x}$.

التمثيل البياني الذي يخص $f(x)$ ممتد رأسيًا بعامل قيمته 2، ومزاح بمقدار 3 وحدات لليمين، ومزاح بمقدار وحدتين للأسفل.

b. **استخدام البنية** استخدم إجابتك من **الجزء a** لتمثيل $g(x)$ بيانيًا.

c. **تقييم منطقية النتائج** اشرح كيف يمكنك استخدام الخطوط المقاربة الرأسية والأفقية لتمثيلك البياني للتحقق من أن التمثيل البياني منطقي.

خط التقارب الرأسي هو $x = 3$، مما يبدو منطقيًا لأن $g(x)$ غير مُعرّف عند $x = 3$.

خط التقارب الأفقي هو $y = -2$، مما يبدو منطقيًا لأنه بينما يقترب x من $+\infty$ أو $-\infty$، فإن $\frac{2}{x-3}$ يقترب من 0 وقيمة الدالة تقترب من -2.

309 9.3 التمثيل البياني لدوال المقلوب

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

التأكيد على معايير الممارسة الرياضية

يقدم المثال 2 فرصة لتناول **م. م. ر 7 (محاولة إيجاد البنية واستخدامها)**. بإمكان الطلاب – على الأخص – استخدام إستراتيجية البحث عن بنية والحل بترتيب عكسي لتمثيل دالة معطاة بيانيًا. على سبيل المثال، الدالة $g(x) = \frac{2}{x-3} - 2$ تتخذ الصورة $g(x) = [\text{دالة}] - 2$. لذلك يجب أن يكون تمثيلها البياني مماثلاً للتمثيل البياني للدالة بين القوسين ولكن بإزاحتها وحدتين لأسفل. الدالة بين القوسين هي $h(x) = \frac{2}{x-3}$. إذا كان الطلاب على معرفة بطريقة تمثيل الدالة $h(x)$ بيانيًا، فكل ما عليهم هو رسم تمثيلها البياني ولكن بإزاحته وحدتين إلى أسفل. وإذا كانوا يجهلون طريقة تمثيل الدالة $h(x)$ بيانيًا، فبإمكانهم تطبيق العملية نفسها ومواصلة "التعديل العكسي" للدالة حتى يصلوا إلى دالة ذات تمثيل بياني مألوف.

مثال 3

نصيحة للتدريس
م.م.ر1

ساعد الطلاب على فهم التمثيلات البيانية بأن تقترح عليهم التركيز على خطوط التقارب. واطلب منهم التفكير في تحويل التمثيل البياني لـ f(x) إلى التمثيل البياني لـ h(x). واسألهم عن كيفية تغير كل خط تقارب. قد يُسهّل ذلك على الطلاب تحديد حالات الإزاحة ذات الصلة.

الأسئلة الداعمة

- هل من الممكن أن يرتبط h(x) بـ f(x) عن طريق إزاحة أفقية فقط أو إزاحة رأسية فقط؟ كيف تعلم ذلك؟ **لا؛ فقد تغير كل من خطي التقارب الأفقي والرأسي، ويجب أن تشتمل الإزاحات على إزاحة أفقية وإزاحة رأسية.**
- كيف يمكنك التحقق من صحة المعادلة التي كتبتها؟ **الإجابة النموذجية: بإيجاد قيمة الدالة عند قيمة واحدة أو قيمتين لـ x والتحقق من أن قيمة الدالة تطابق التمثيل البياني.**

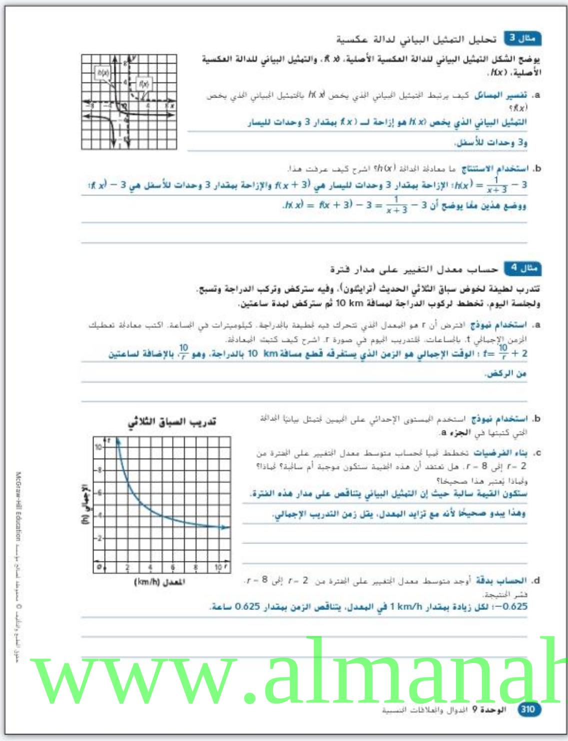
مثال 4

نصيحة للتدريس
م.م.ر4

بالنسبة **للجزء a**، اقترح على الطلاب كتابة الدالة أولاً على هيئة [الوقت الكلي] = [مدة قيادة الدراجة] + [مدة الركض]. يمكنهم بعد ذلك استبدال الكميات بين الأقواس بالتعابير الصحيحة.

الأسئلة الداعمة

- ما العلاقة التي تربط بين الزمن والمسافة والمعدل الذي قاد به مجيد الدراجة؟ $t = \frac{d}{r}$ **أو** $d = rt$
- ما الكمية الثابتة في هذه العلاقة؟ **المسافة**
- ما خط التقارب الأفقي للتمثيل البياني، إن وُجد؟ $y = 2$



مثال 3 تحليل التمثيل البياني لدالة عكسية

يوضح الشكل التمثيل البياني للدالة العكسية الأصلية، $f(x)$، والتمثيل البياني للدالة العكسية الأصلية، $h(x)$.

a. **تفسير المسائل** كيف يرتبط التمثيل البياني الذي يخص $h(x)$ بالتمثيل البياني الذي يخص $f(x)$؟
التمثيل البياني الذي يخص $h(x)$ هو إزاحة لـ $f(x)$ بمقدار 3 وحدات لليسار و3 وحدات للأسفل.

b. **استخدام الاستنتاج** ما معادلة الدالة $h(x)$؟ اشرح كيف عرفت هذا.
$h(x) = \frac{1}{x+3} - 3$**؛ الإزاحة بمقدار 3 وحدات لليسار هي $f(x+3)$ والإزاحة بمقدار 3 وحدات للأسفل هي $f(x) - 3$؛ ووضع هذين معًا يوضح أن** $h(x) = f(x+3) - 3 = \frac{1}{x+3} - 3$.

مثال 4 حساب معدل التغيير على مدار فترة

تتدرب لطيفة لخوض سباق الثلاثي الحديث (ترايثلون)، وفيه ستركض وتركب الدراجة وتسبح. ولجلسة اليوم، تخطط لركوب الدراجة لمسافة 10 km ثم ستركض لمدة ساعتين.

a. **استخدام نموذج** افترض أن r هو المعدل الذي تتحرك فيه لطيفة بالدراجة، كيلومترات في الساعة. اكتب معادلة تعطيك الزمن الإجمالي t، بالساعات، للتدريب اليوم في صورة r. اشرح كيف كتبت المعادلة.
$t = \frac{10}{r} + 2$**؛ الوقت الإجمالي هو الزمن الذي يستغرقه قطع مسافة 10 km بالدراجة، وهو $\frac{10}{r}$، بالإضافة لساعتين من الركض.**

b. **استخدام نموذج** استخدم المستوى الإحداثي على اليمين لتمثل بيانيًا الدالة التي كتبتها في **الجزء a**.

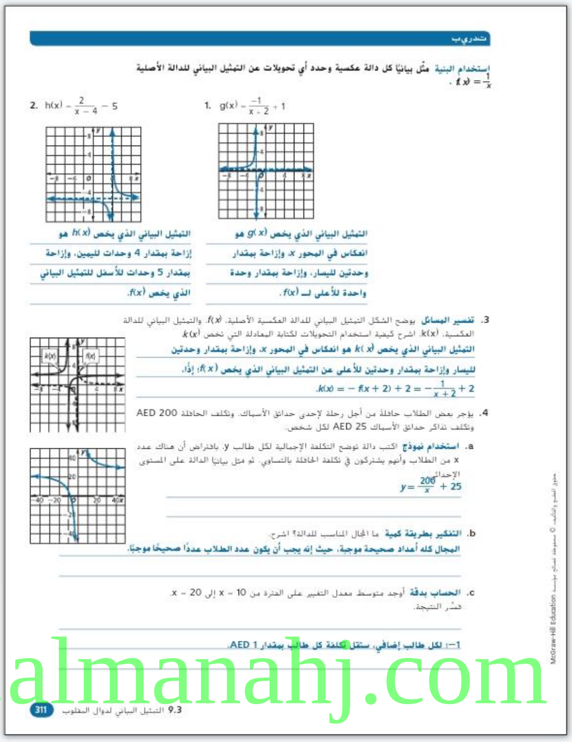
c. **بناء الفرضيات** تخطط لمىا لحساب متوسط معدل التغيير على الفترة من $r = 2$ إلى $r = 8$. هل تعتقد أن هذه القيمة ستكون موجبة أم سالبة؟ لماذا؟ ولماذا يُعتبر هذا صحيحًا؟
ستكون القيمة سالبة حيث إن التمثيل البياني يتناقص على مدار هذه الفترة. وهذا يبدو صحيحًا لأنه مع تزايد المعدل، يقل زمن التدريب الإجمالي.

d. **الحساب بدقة** أوجد متوسط معدل التغيير على الفترة من $r = 2$ إلى $r = 8$. فسّر النتيجة.
-0.625؛ لكل زيادة بمقدار 1 km/h في المعدل، يتناقص الزمن بمقدار 0.625 ساعة.

310 الوحدة 9 الدوال والعلاقات النسبية

التدريس المتمايز

قد يكون من الأسهل لبعض الطلاب استيعاب **المثال 4** إذا كانوا قادرين على استكشاف جدول بالقيم. كلّف الطلاب بإدخال الدالة $t = \frac{10}{r} + 2$ على أنها Y_1 في حاسبات التمثيل البياني الخاصة بهم وعرض جدول بقيم الدالة. من خلال التمرير لأسفل الجدول، سيرى الطلاب أن قيم y تتناقص دائمًا وتزداد قربًا من 2 لكن دون أن تصل إلى هذه القيمة أبدًا. سيلاحظ الطلاب أيضًا أن معدل التناقص يتباطأ كلما قاموا بالتمرير لأسفل الجدول. تتوافق هذه الملاحظات مع خط التقارب الأفقي للتمثيل البياني. أي أن المنحنى يقترب من الخط الأفقي $y = 2$ ولكن لا يتقاطع معه، ثم يصبح المنحنى مستويًا كلما اقترب من هذا الخط.



تدريب

استخدام البنية مثّل بيانيًا كل دالة عكسية وحدد أي تحويلات عن التمثيل البياني للدالة الأصلية $f(x)=\frac{1}{x}$.

1. $g(x)=\frac{-1}{x+2}+1$

التمثيل البياني الذي يخص $g(x)$ هو انعكاس في المحور x، وإزاحة بمقدار وحدتين لليسار، وإزاحة بمقدار وحدة واحدة للأعلى لـ $f(x)$.

2. $h(x)=\frac{2}{x-4}-5$

التمثيل البياني الذي يخص $h(x)$ هو إزاحة بمقدار 4 وحدات لليمين، وإزاحة بمقدار 5 وحدات للأسفل للتمثيل البياني الذي يخص $f(x)$.

3. **تفسير المسائل** يوضح الشكل التمثيل البياني للدالة العكسية الأصلية، $f(x)$، والتمثيل البياني للدالة العكسية، $k(x)$. اشرح كيفية استخدام التحويلات لكتابة المعادلة التي تخص $k(x)$.

التمثيل البياني الذي يخص $k(x)$ هو انعكاس في المحور x، وإزاحة بمقدار وحدتين لليسار وإزاحة بمقدار وحدتين للأعلى عن التمثيل البياني الذي يخص $f(x)$؛ إذًا، $k(x)=-f(x+2)+2=-\frac{1}{x+2}+2$.

4. يؤجر بعض الطلاب حافلة من أجل رحلة لإحدى حدائق الأسماك. وتكلف الحافلة AED 200 وتكلف تذاكر حدائق الأسماك AED 25 لكل شخص.

a. **استخدام نموذج** اكتب دالة توضح التكلفة الإجمالية لكل طالب y، بافتراض أن هناك عدد x من الطلاب وأنهم يشتركون في تكلفة الحافلة بالتساوي. ثم مثل بيانيًا الدالة على المستوى الإحداثي.

$y=\frac{200}{x}+25$

b. **التفكير بطريقة كمية** ما المجال المناسب للدالة؟ اشرح.

المجال كله أعداد صحيحة موجبة، حيث إنه يجب أن يكون عدد الطلاب عددًا صحيحًا موجبًا.

c. **الحساب بدقة** أوجد متوسط معدل التغيير على الفترة من $x=10$ إلى $x=20$. فسّر النتيجة.

-1؛ لكل طالب إضافي، ستقل تكلفة كل طالب بمقدار AED 1.

9.3 التمثيل البياني لدوال المقلوب 311

McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف محفوظة لصالح مؤسسة

التأكيد على معايير الممارسة الرياضية

استخدم **التمرين 4** لتناول **م. م. ر 4 (استخدام نماذج الرياضيات)**. بعد أن يكتب الطلاب المعادلة ويمثلونها بيانيًا، يمكن أن يوضح إجراء متابعة قصيرة للصف للطلاب مدى فعالية هذا النموذج. قد يستخدم الطلاب المعادلة أو التمثيل البياني للإجابة على بعض الأسئلة الإضافية عن الرحلة. على سبيل المثال، كم عدد الطلاب الذين يتعين عليهم الذهاب إلى الرحلة لكي تكون التكلفة الإجمالية لكل طالب أقل من AED 30؟ بإمكان الطلاب حل المتباينة $\frac{200}{x}+25<30$، أو يمكنهم استخدام حاسباتهم للاطلاع على جدول قيم للدالة. يمكنك أيضًا استغراق بضع دقائق لمناقشة القصور في النموذج. مثلاً، يكون النموذج واقعيًا فقط على الأرجح حتى عدد معين من الطلاب، وبتجاوز هذا العدد سيتعين عليهم استئجار حافلة أخرى.

تمرين

يوفر **التمرينان 1** و **2** للطلاب تدريبًا إضافيًا على تمثيل دوال المقلوب بيانيًا بناء على التحويلات.

يطلب **التمرين 3** من الطلاب تحديد التحويلات التي أجريت على دالة المقلوب الأم بدلالة تمثيلها البياني.

في **التمرين 4**، يجب على الطلاب كتابة معادلة لتمثيل الموقف. وبعد ذلك يوضح الطلاب مجال الدالة ويعملون على إيجاد متوسط معدل التغير في فترة معطاة.

تناول المعايير

التمرين	م. م. ر
1–2	7
3	1
4	2, 4, 6

أخطاء شائعة

في **التمرين 3**، قد يحدد الطلاب خط الإزاحة الأفقية بشكل صحيح ولكن يكتبون معادلة $k(x)$ بشكل خاطئ. قد يحدد الطلاب الإزاحة الأفقية بأنها "وحدتان إلى اليسار" لكن يقومون بتطبيقها في الدالة بالصورة $f(x-2)$ بدلاً من $f(x+2)$. إذا كتب الطلاب $k(x)=-\frac{1}{x-2}+2$، فاقترح أن يتحققوا من قيمة أو قيمتين لـ x في المعادلة لرؤية ما إذا كانت قيم الدالة الناتجة تتطابق مع التمثيل البياني أم لا. ثم كلّف الطلاب بمراجعة حلّهم والانتباه بشكل خاص إلى الإزاحة الأفقية.

9.4 التمثيل البياني للدوال النسبية

المعايير

معايير الممارسات الرياضية: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

المتطلبات الأساسية

- تحليل كثيرات الحدود إلى العوامل
- تمثيل الدوال بيانيًا
- تحديد القيم التي يكون عندها تعبير ما غير معرّف

مثال 1

نصيحة للتدريس م.م.ر 7

بينما يستكشف الطلاب التمثيلات البيانية لمجموعة مختلفة من الدوال النسبية، أكّد على أنهم بفهم بنية التعبير النسبي يمكنهم التنبؤ بالسمات الأساسية للتمثيل البياني للدالة، بما فيها الأصفار وخطوط التقارب والسلوك الطرفي. ومن الضروري تذكر أن مجال الدالة النسبية دائمًا ما يكون محصورًا على القيم التي تجعل المقام غير صفري وذلك لفهم خطوط التقارب ونقاط الانفصال.

9.4 التمثيل البياني للدوال النسبية

الأهداف

- تمثيل الدوال والعلاقات النسبية بيانيًا.
- مقارنة خواص الدوال والعلاقات النسبية، بما فيها الأصفار وخطوط التقارب.
- فهم كيف تؤثر القيود المفروضة على مجال الدالة النسبية على تمثيلها البياني.

الدالة النسبية لها معادلة بصيغة $f(x)=\frac{a(x)}{b(x)}$ حيث تكون $a(x)$ و $b(x)$ دالتين كثيرتي الحدود و $b(x) \neq 0$

المفهوم الأساسي **الأصفار وخطوط التقارب الرأسية**

بافتراض أن الدالة النسبية $f(x)=\frac{a(x)}{b(x)}$ حيث لا تكون بين $a(x)$ و $b(x)$ عوامل مشتركة بخلاف الرقم 1.

$f(x)$ به صفر في كل قيم x التي فيها $a(x) = 0$

إذًا، التمثيل البياني الذي يخص $f(x)$ به تقاطع المحور x في كل قيم x التي فيها $a(x) = 0$

$f(x)$ غير معرّف في كل قيم x التي فيها $b(x) = 0$

إذًا التمثيل البياني الذي يخص $f(x)$ **خط تقارب رأسي** في كل قيم x التي فيها $b(x) = 0$.

مثال 1 **استكشاف المجال والأصفار وخطوط التقارب الرأسية**

a. **استخدام البنية** فكر في الدالة $f(x)=\frac{x^3}{2x+2}$. صف أي قيود على مجالها، وحدد أصفارها وخطوط التقارب الرأسية فيها. اشرح إجاباتك.

المجال هو $\{x \mid x \neq -1\}$، لأنه حين يتساوى مقام الدالة $x = -1$ مع الصفر. وللدالة خط تقارب رأسي عند $x = -1$.

وللدالة صفر عند $x = 0$، لأن البسط يساوي الصفر عندما يكون $x = 0$

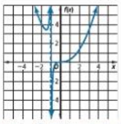
b. **استخدام البنية** قارن الدالة $g(x)=\left(\frac{x^3}{2x+2}\right)\left(\frac{x}{x-1}\right)$ مع $f(x)$ من **الجزء a**. فيم تتشابه وفيم تختلف مجالاتهما وأصفارهما وخطوط التقارب الرأسية الخاصة بهما وسلوكياتهما الطرفية؟ تذكّر أن السلوك الطرفي يتضمن تحليل قيم الدالة عند اقتراب x من اللانهاية الموجبة واللانهاية السالبة.

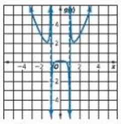
مجال $g(x)$، مثل مجال $f(x)$، ويستثني $x = -1$، ومجال $g(x)$ يستثني أيضًا $x = 1$، الذي يجعل مقام العامل الثاني مساويًا للصفر. إذًا $g(x)$ لها خط تقارب رأسي عند كلٍّ من $x = -1$ و $x = 1$. مثل $f(x)$، فإن $g(x)$ لها صفر واحد فقط عند $x = 0$. السلوك الطرفي لـ $f(x)$ هو $f(x) \to \infty$ عندما $x \to -\infty$ و $f(x) \to \infty$ عندما $x \to \infty$. وبالمثل، السلوك الطرفي لـ $g(x)$ هو $g(x) \to \infty$ عندما $x \to -\infty$ و $g(x) \to \infty$ عندما $x \to \infty$.

معلومات أساسية رياضية

توفر دراسة الدوال النسبية بعض التهيئة المهمة لحساب التفاضل والتكامل. فهي تقدم مفهوم خط التقارب وفكرة الاقتراب من قيمة ما دون الوصول إليها بالضرورة، وهو ما يرتبط بفكرة الحدود. بالإضافة لذلك، يؤدي تكامل الدالة النسبية إلى تقديم تعريف للوغاريتم الطبيعي والأساس الطبيعي. وفي حساب التفاضل والتكامل الأكثر تقدمًا، يمكن استخدام الدوال النسبية لتمثيل سلوك الدوال الأخرى الأكثر تعقيدًا والظواهر الطبيعية.

c. التواصل بدقة استخدم مزايا التمثيل البياني المحددة في **الجزأين a و b** لتمثيل كلّ من $g(x)$ و $f(x)$ بيانيًا على الشبكات الموضحة. أي مزايا التمثيلين البيانيين يمكنك التنبؤ بها من المعادلات، وأيها احتجت إلى جدول القيم لإيجادها؟





تم التنبؤ بخطوط التقارب والأصفار والمجال والسلوك الطرفي من المعادلات. وكانت هناك حاجة إلى جدول من القيم لإيجاد موضع تزايد الدالة أو تناقصها.

d. استخدام البنية التمثيل البياني الذي يخص $g(x)$ يبدو متماثلاً في المحور y. تحقق من هذا باستخدام القيم $x = 2$ و $x = -2$ و $x = 3$ و $x = -3$. لماذا من المنطقي بناءً على المعادلة أن يتواجد هذا التماثل؟

$g(2) = \left(\frac{8}{6}\right)\left(\frac{2}{1}\right) = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$، $g(-2) = \left(\frac{-8}{-2}\right)\left(\frac{-2}{-3}\right) = \frac{8}{3}$، $g(3) = \left(\frac{27}{8}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{81}{16}$، $g(-3) = \left(\frac{-27}{-4}\right)\left(\frac{-3}{-4}\right) = \frac{81}{16}$.

إذًا $g(2) = g(-2)$، و $g(3) = g(-3)$. التماثل منطقي لأن الدالة تتحول لأبسط صورة لتصبح $\left(\frac{x^3}{2x+2}\right)\left(\frac{x}{x-1}\right)$

$\frac{x^4}{2(x^2-1)} = \frac{x^4}{2(x+1)(x-1)} = \frac{x^4}{(2x+2)(x-1)} =$ لأن قُوى x زوجية. فتعويض قيمة وسالب هذه القيمة سيؤدي للنتيجة نفسها.

بالإضافة إلى خطوط التقارب الرأسية، يمكن للتمثيل البياني لدالة نسبية أن يكون به خط تقارب أفقي بصيغة $y = c$، أو خط تقارب مائل ليس برأسي ولا أفقي.

المفهوم الأساسي **خطوط التقارب الأفقية والمائلة**

الدالة النسبية $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ يمكن أن يكون بها على الأقل خط تقارب أفقي واحد أو خط تقارب مائل واحد على الأكثر. لا يمكنها أن تحتوي على الاثنين. ويمكن تحديد عدد خطوط التقارب هذه عن طريق مقارنة درجة بسط الدالة ومقامها.

خطوط التقارب الأفقية:

إذا كانت درجة $a(x)$ أقل من درجة $b(x)$، فسيكون خط التقارب الأفقي هو $y = 0$

إذا كانت درجة $a(x)$ تتساوى مع درجة $b(x)$ فخط التقارب الأفقي هو

$y = \frac{\text{المعامل الرئيسي لـ } b(x)}{\text{المعامل الرئيسي لـ } a(x)}$

إذا كانت درجة $a(x)$ أكبر من درجة $b(x)$، فلا يوجد خط تقارب أفقي.

خطوط التقارب مائلة:

إذا كانت درجة $a(x)$ أكبر بدرجة واحدة من درجة $b(x)$، فخط التقارب المائل هو $y = \frac{a(x)}{b(x)}$ دون الباقي.

وإلا، فليس هناك خط تقارب مائل.

المثال 1 (يُتبع)

الأسئلة الداعمة

- كيف يمكنك تبسيط التعبير $g(x)$؟ **أوجد حاصل ضرب بسطي العاملين وحاصل ضرب مقامي هذين العاملين.**
- هل هناك حدود على عدد خطوط التقارب الأفقية التي يمكن أن تكون لدالة نسبية؟ هل يجب أن تحتوي الدالة النسبية على خط تقارب واحد على الأقل؟ **لا؛ ليس هناك حدود على عدد خطوط التقارب وليس بالضرورة أن يكون واحدًا.**

التدريس المتمايز

قد يستفيد الطلاب الذين على معرفة بالفرضيات المفاهيمية من النظر إلى النمط العام المتضمن في قواعد تحديد خطوط التقارب الأفقية والمائلة. وقد يتعرفون عليه على هيئة $x \to \infty$، حيث تقترب قيمة التعبير كثير الحدود من قيمة حدّه الرئيسي. ولذلك، تقترب قيمة التعبير النسبي من نسبة الحدود الرئيسية بالبسط والمقام.

وبالتالي، عندما تكون درجة المقام أكبر، تقترب الدالة من 0 (فينشأ خط تقارب أفقي عند $y = 0$). عندما يكون للبسط والمقام الدرجة نفسها، تقترب الدالة من نسبة معاملات الحدود الرئيسية. وعندما تكون درجة البسط أكبر، تزداد الدالة أو تتناقص حيث $x \to \infty$، وبالتالي لن يكون هناك خط تقارب أفقي.

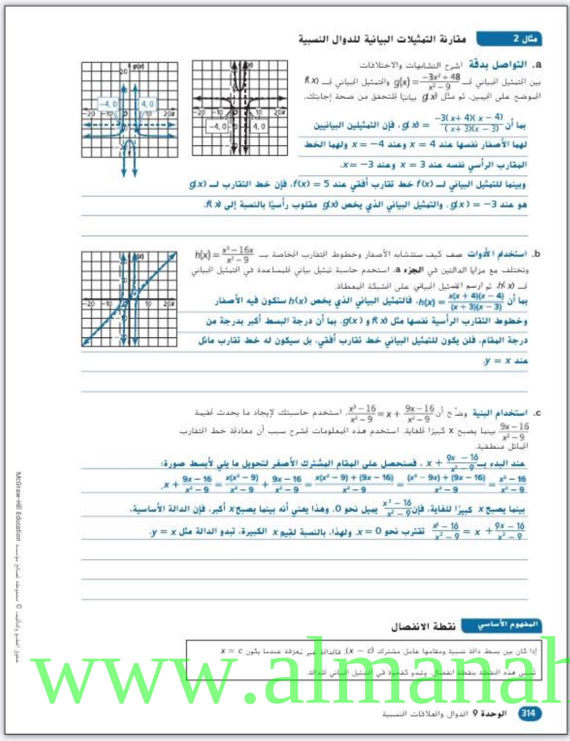
مثال 2

نصيحة للتدريس م.م.ر1

ناقش الصورتين المستخدمتين لكتابة معظم الدوال النسبية؛ صورة التوزيع وصورة التحليل إلى العوامل. تسمح كل صورة بالاطلاع على بعض سمات التمثيل البياني. فصورة التوزيع تساعد في الكشف عن خط التقارب أو خط التقارب المائل، إذا وُجِد، وتبسيط عملية حساب نقطة التقاطع مع المحور y. أما صورة التحليل إلى العوامل فيفيد في تحديد أي خطوط تقارب رأسية وأصفار وفجوات.

الأسئلة الداعمة

- ما الذي يخبرك به العامل $3-$ الموجود في بسط الدالة $g(x)$ عن تمثيلها البياني؟ **يشير إلى أن التمثيل البياني سوف ينقلب رأسيًا بالنسبة إلى دالة ذات صلة دون وجود عامل سالب.**
- عند قسمة البسط على المقام لتحديد خط تقارب مائل، لماذا يمكنك إهمال الباقي؟ **بينما $x \to +\infty$ أو $x \to -\infty$، سوف تقترب قيمة الباقي من الصفر. وتعكس هذه القيمة الفجوة المتضائلة بين الدالة وخط التقارب.**



مثال 2 مقارنة التمثيلات البيانية للدوال النسبية

a. **التواصل بدقة** اشرح التشابهات والاختلافات بين التمثيل البياني لـ $g(x) = \frac{-3x^2+48}{x^2-9}$ والتمثيل البياني لـ $f(x)$ الموضح على اليمين. ثم مثّل $g(x)$ بيانيًا للتحقق من صحة إجابتك.

بما أن $g(x) = \frac{-3(x+4)(x-4)}{(x+3)(x-3)}$، فإن التمثيلين البيانيين لهما الأصفار نفسها عند $x = 4$ وعند $x = -4$ ولهما الخط المقارب الرأسي نفسه عند $x = 3$ وعند $x = -3$. وبينما للتمثيل البياني لـ $f(x)$ خط تقارب أفقي عند $f(x) = 5$، فإن خط التقارب لـ $g(x)$ هو عند $g(x) = -3$. والتمثيل البياني الذي يخص $g(x)$ مقلوب رأسيًا بالنسبة إلى $f(x)$.

b. **استخدام الأدوات** صف كيف ستتشابه الأصفار وخطوط التقارب الخاصة بـ $h(x) = \frac{x^3-16x}{x^2-9}$ وتختلف مع مزايا الدالتين في **الجزء a**. استخدم حاسبة تمثيل بياني للمساعدة في التمثيل البياني لـ $h(x)$ ثم ارسم التمثيل البياني على الشبكة المعطاة.

بما أن $h(x) = \frac{x(x+4)(x-4)}{(x+3)(x-3)}$، فالتمثيل البياني الذي يخص $h(x)$ ستكون فيه الأصفار وخطوط التقارب الرأسية نفسها مثل $f(x)$ و $g(x)$. بما أن درجة البسط أكبر بدرجة من درجة المقام، فلن يكون للتمثيل البياني خط تقارب أفقي، بل سيكون له خط تقارب مائل عند $y = x$.

c. **استخدام البنية** وضّح أن $\frac{x^3-16}{x^2-9} = x + \frac{9x-16}{x^2-9}$ استخدم حاسبتك لإيجاد ما يحدث لقيمة $\frac{9x-16}{x^2-9}$ بينما يصبح x كبيرًا للغاية. استخدم هذه المعلومات لشرح سبب أن معادلة خط التقارب المائل منطقية.

عند البدء بـ $x + \frac{9x-16}{x^2-9}$، فسنحصل على المقام المشترك الأصغر لتحويل ما يلي لأبسط صورة:

$$x + \frac{9x-16}{x^2-9} = \frac{x(x^2-9)}{x^2-9} + \frac{9x-16}{x^2-9} = \frac{x(x^2-9)+(9x-16)}{x^2-9} = \frac{(x^3-9x)+(9x-16)}{x^2-9} = \frac{x^3-16}{x^2-9}$$

بينما يصبح x كبيرًا للغاية، فإن $\frac{x^3-16}{x^2-9}$ يميل نحو 0. وهذا يعني أنه بينما يصبح x أكبر، فإن الدالة الأساسية $\frac{x^3-16}{x^2-9} = x + \frac{9x-16}{x^2-9}$ تقترب نحو $x = 0$. ولهذا، بالنسبة لقيم x الكبيرة، تبدو الدالة مثل $y = x$.

المفهوم الأساسي نقطة الانفصال

إذا كان بين بسط دالة نسبية ومقامها عامل مشترك $(x - c)$، فالدالة غير مُعرّفة عندما يكون $x = c$. تسمى هذه النقطة بنقطة انفصال، وتبدو كفجوة في التمثيل البياني للدالة.

314 الوحدة 9 الدوال والعلاقات النسبية

التأكيد على معايير الممارسة الرياضية

في **المثال 3**، يجب على الطلاب تحليل التعابير النسبية ذات العامل المشترك بين كل من البسط والمقام وتفسيرها.

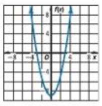
ويجب عليهم فهم أن العامل المشترك يمثل نقطة انقطاع، وإدراك أنه من الممكن تجاهله عند تحديد نقاط التقاطع أو خطوط التقرب بالتمثيل البياني. وفي الحقيقة، فإن العامل المشترك لا تأثير له على شكل المنحنى أو اتجاهه. مع ذلك، يجب على الطلاب تذكر أنه يمثل فجوة في التمثيل البياني ولذلك لا يمكن تجاهله كليًا. وبتحليل بنية صورة العوامل المحللة والصورة الموزعة للدالة النسبية، يمكنهم استخلاص نتائج عن الجوانب المختلفة للتمثيل البياني. بالاستفادة من **م. م. ر 7**.

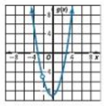
مثال 3 تمثيل الدوال بيانيًا بنقاط الانفصال

a. **استخدام البنية** ما مجال $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 9x - 18}{x + 2}$؟ كيف يرتبط التمثيل البياني لـ $f(x)$ بالتمثيل البياني لـ $g(x) = x^2 - 9$؟ مثّل الدالتين بيانيًا على الشبكات المعطاة.

المجال هو $\{x \mid x \neq -2\}$. بما أن $f(x) = \frac{(x+3)(x-3)(x+2)}{(x+2)}$، وإلغاء العامل $(x + 2)$ ينتج عنه $g(x) = x^2 - 9$.

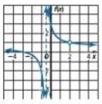
ولكن، بما أن $f(x)$ غير مُعرّفة عندما يكون $x + 2 = 0$، فإن تمثيلها البياني له نقطة انفصال عند $x = -2$. ولتمثيل $f(x)$ بيانيًا، مثّل $g(x)$ بيانيًا وأزل $(-2, -5)$ من التمثيل البياني.





b. **استخدام البنية** ما قيم x المستثناة من مجال $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{2x^2 - 3x - 2}$؟ كيف تُوضّح هذه القيم المستثناة على التمثيل البياني لـ $f(x)$؟

أوجد الدالة التي تنتج عند إزالتك لعامل مشترك من البسط والمقام الخاصين بـ $f(x)$ وحدد التقاطعات وخطوط التقارب الخاصة بالدالة في أبسط صورها. ثم استخدم هذه المعلومات لتمثيل $f(x)$ بيانيًا.

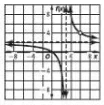


بما أن $f(x) = \frac{(x+3)(x-2)}{(2x+1)(x-2)}$، فإن القيمتين $x = -\frac{1}{2}$ و $x = 2$ مُستثنتين من المجال.

وسيكون للتمثيل البياني خط تقارب رأسي عند $x = -\frac{1}{2}$ ونقطة انفصال عند $x = 2$. وإلغاء $(x - 2)$ ينتج عنه $g(x) = \frac{x+3}{2x+1}$. كلٌ من $g(x)$ و $f(x)$ له خط تقارب أفقي عند $y = \frac{1}{2}$.

وتقاطع مع المحور x بقيمة -3، وتقاطع مع المحور y بقيمة 3.

c. **استخدام البنية** صف مزايا التمثيل البياني المبين. وحدد دالة يمثلها هذا التمثيل البياني.



الإجابة النموذجية: التمثيل البياني به صفر عند $x = 0$، وخط تقارب رأسي عند $x = 3$،

وخط تقارب أفقي عند $y = 2$. والتمثيل البياني له نقطة انفصال عند

$x = 6$. والدالة التي لها هذه المزايا هي $f(x) = \frac{2x^2 - 12x}{x^2 - 9x + 18} = \frac{2x(x - 6)}{(x-3)(x-6)}$.

d. **التعليق على طريقة الاستنتاج** يزعم هاني أن الدالة $y = \frac{(2x)(x-6)^2}{(x-3)(x-6)^2}$ ستستوفي أيضًا شروط التمثيل البياني. هل هاني مُحق؟ هل دالته تماثل دالتك؟

هاني محق. فأُس 2 على حدود $(x - 6)$ لا يؤثر على شكل التمثيل البياني. في هذه الحالة، لا تزال هناك فجوة في التمثيل البياني عند $x = 6$ ولأن القوة زادت بنفس الكمية في البسط والمقام، فخطوط التقارب لا تتأثر. الإجابة النموذجية: نعم؛ دالته هي نفسها دالتي.

مثال 3

نصيحة للتدريس

م.م.ر 7

نظرًا لأن الحاسبات والبرمجيات قد لا تعرض نقاط الانفصال، فذكّر الطلاب بإضافة تلك النقاط إلى تمثيلاتهم البيانية.

الأسئلة الداعمة

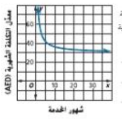
- كيف يمكنك تأكيد أن نقطة ما تمثل نقطة انقطاع؟ **بالتعويض عن الإحداثي x للنقطة في المعادلة الأصلية. فإذا تساوت الدالة مع $\frac{0}{0}$ فإن النقطة نقطة انقطاع.**
- كيف تؤثر نقطة الانقطاع على مكان أية نقاط تقاطع أو خطوط تقارب بالتمثيل البياني؟ **إذا كانت نقطة الانقطاع على المحور، فلا يمكن أن تحتوي نقاط التقاطع بالدالة على تلك القيمة. وإلا فإن نقطة الانفصال لا تؤثر على مكان نقاط التقاطع أو خطوط التقارب أو شكل التمثيل البياني أو اتجاهه.**

تلميح تقني

يمكن أن تساعد حاسبة التمثيل البياني أو برمجيات الحاسوب الطلاب على تصور التمثيلات البيانية للدوال النسبية والتحقق من دقة حلولهم. ينبغي على الطلاب معرفة أهمية إعداد نافذة عرض صحيحة. وقد يحتاجون إلى تكبير النافذة أو تصغيرها للحصول على رؤية أفضل لسلوك التمثيل البياني بالإضافة لمواقع الأصفار المتعددة وخطوط التقارب.

تدريب

1. **استخدام نموذج** تكلف شركة تلفزيون كابليّ عملاءها برسوم تركيب بقيمة AED 60 بالإضافة إلى AED 30 في الشهر مقابل الخدمة. اكتب ومثّل بيانيًا دالة تمثل متوسط التكلفة الشهرية كدالة لعدد شهور الخدمة. اشرح معنى خط التقارب الأفقي في سياق المسألة.



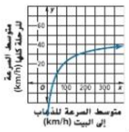
الدالة التي يمكن استخدامها كنموذج لهذا الموقف هي $f(x) = \frac{60 + 30x}{x}$، مع تقييد المجال إلى $x > 0$. يشير خط التقارب الأفقي إلى أن متوسط التكلفة الشهرية سيقترب من AED 30 عندما يحتفظ العميل بالخدمة لفترة أطول من الزمن.

2. **بناء الفرضيات** تمثّل إسراء بيانيًا $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 3x - 4}$ وتستبعد $(x - 4)$ باستخدام التحليل إلى العوامل من البسط والمقام. ثم ترسمُ التمثيل البياني لـ $g(x) = \frac{x - 2}{x + 1}$ في إجابتها. هل هي محقة؟ اشرح إجابتك من ناحية مجال $f(x)$.

إسراء ليست محقة. فالعامل الذي أزالته يتوافق مع نقطة انفصال، ودالتها لها مجال مكون كله من أعداد حقيقية باستثناء $x = -1$، ولكن مجال $f(x)$ يستثني أيضًا $x = 4$. إذًا $g(x)$ ليست الدالة نفسها مثل $f(x)$. وسيكون التمثيل البياني لـ $f(x)$ مطابقًا تقريبًا لتمثيلها البياني ولكن سيحتوي على فجوة عند $(4, 0.4)$.

3. في رحلة بالسيارة لزيارة كلية قريبة، تقطع عائلة محمد في المتوسط 40 km/hr.

a. **تفسير المسائل** حدّد ومثّل بيانيًا دالة تمثل متوسط السرعة للرحلة بكاملها، من ناحية متوسط السرعة في رحلة العودة. (تلميح: اكتب أولاً تعبيرًا لمتوسط السرعة من ناحية المسافة ومدتي رحلة الذهاب ورحلة العودة. ثم عبّر عن الزمن من ناحية السرعة والمسافة.)



السرعة المتوسطة $= \frac{2}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} = \frac{2d}{\frac{d}{r_1} + \frac{d}{r_2}} = \frac{2d}{t_1 + t_2}$، حيث يكون r_1 و t_1 هما متوسط السرعة والزمن في اتجاه واحد ويكون r_2 و t_2 هما متوسط السرعة والزمن في رحلة العودة. والتبسيط والتعويض عن 40 بـ r_1 وعن x بـ r_2 يؤدي إلى $f(x) = \frac{80x}{x + 40}$.

b. **استخدام نموذج** إذا قطعت العائلة في المتوسط 60 km/hr في رحلة العودة، فهل يساوي متوسط السرعة للرحلة بالكامل 50 km/hr؟ لم أو لم لا؟ ما خط التقارب الأفقي، وما الذي يمثله في سياق هذه المسألة؟

عندما يكون $x = 60$، فإن $f(x) = 48$. إذًا فمتوسط الرحلة بالكامل أقل من 50 km/h. وهذا بسبب قضاء وقت أكثر في القيادة على سرعة 40 km/h من القيادة على سرعة 60 km/h. خط التقارب الأفقي هو $f(x) = 80$. وهو يمثل متوسطًا عامًا للسرعة الذي لا يمكن للعائلة تحقيقه؛ حيث كان سينبغي عليهم السفر إلى المنزل بسرعة لانهائية والعودة دون انقضاء أي زمن.

تمرين

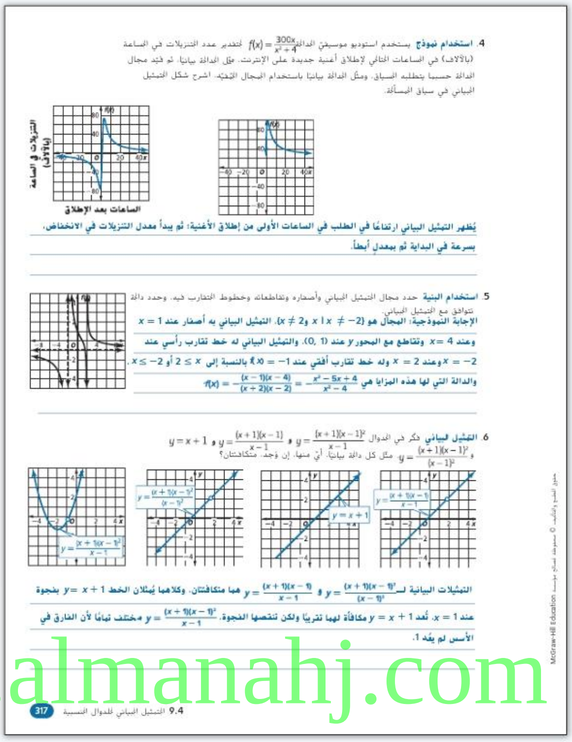
تطلب التمارين 1 و 3 و 4 من الطلاب تمثيل دالة نسبية بيانيًا وتفسير إحدى السمات الأساسية بالتمثيل البياني بدلالة الكميات المتضمنة. وتلك مهارات مهمة في **م. م. ر 4**، والذي يتطلب منهم توضيح العلاقات المهمة باستخدام التمثيلات البيانية وتحليل تلك العلاقات رياضيًا لاستخلاص النتائج.

في **التمرين 2**، يجب على الطلاب تحديد الفرق بين مجال كل دالة والطريقة التي يرتبط بها بالتمثيلات البيانية لهاتين الدالتين.

يطلب **التمرين 3** من الطلاب كتابة معادلة وتمثيلها بيانيًا. ويجب على الطلاب بعد ذلك تفسير سمات التمثيل البياني في السياق المقدم.

أخطاء شائعة

عند تحليل دالة أو تمثيل بياني، قد يجد الطلاب صعوبة في التمييز بين الأصفار ونقاط التقاطع وخطوط التقارب الأفقية أو الرأسية ونقاط الانقطاع بالتمثيل البياني. وعندما يكونون في حيرة ذكّرهم بالتفكير في أهمية الصفر الذي قد يظهر في بسط الدالة أو مقامها، الصفر في المقام يعني أن الدالة غير معرّفة، بينما في البسط (مع مقام غير صفري) فيعني أن قيمة الدالة تساوي صفرًا. اقترح على الطلاب إنشاء خريطة مفاهيم تلخص الطريقة التي تؤثر بها العلاقة بين درجة البسط والمقام على خط التقارب الأفقي أو خط التقارب المائل.


4. **استخدام نموذج** يستخدم استوديو موسيقى الدالة $f(x)=\frac{300x}{x^2+4}$ لتقدير عدد التنزيلات في الساعة (بالآلاف) في الساعات التالي لإطلاق أغنية جديدة على الإنترنت. مثّل الدالة بيانيًا، ثم قيّد مجال الدالة حسبما يتطلبه السياق، ومثّل الدالة بيانيًا باستخدام المجال المقيّد. اشرح شكل التمثيل البياني في سياق المسألة.

يُظهر التمثيل البياني ارتفاعًا في الطلب في الساعات الأولى من إطلاق الأغنية؛ ثم يبدأ معدل التنزيلات في الانخفاض، بسرعة في البداية ثم بمعدلٍ أبطأ.

5. **استخدام البنية** حدد مجال التمثيل البياني وأصفاره وتقاطعاته وخطوط التقارب فيه. وحدد دالة تتوافق مع التمثيل البياني.

الإجابة النموذجية: المجال هو $\{x \mid x \neq -2$ و $x \neq 2\}$. التمثيل البياني به أصفار عند $x = 1$ وعند $x = 4$ ويتقاطع مع المحور y عند $(0, 1)$. والتمثيل البياني له خط تقارب رأسي عند $x = -2$ وعند $x = 2$ وله خط تقارب أفقي عند $f(x) = -1$ بالنسبة إلى $x \leq 2$ أو $x \leq -2$. والدالة التي لها هذه المزايا هي $f(x) = -\frac{(x-1)(x-4)}{(x+2)(x-2)} = -\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}$

6. **التمثيل البياني** فكر في الدوال $y=\frac{(x+1)(x-1)^2}{x-1}$ و $y=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$ و $y=x+1$ و $y=\frac{(x+1)(x-1)^2}{(x-1)^2}$. مثّل كل دالة بيانيًا. أيّ منها، إن وُجد، متكافئتان؟

التمثيلات البيانية لـ $y=\frac{(x+1)(x-1)^2}{(x-1)^2}$ و $y=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$ هما متكافئتان، وكلاهما يُمثلان الخط $y = x + 1$ بفجوة عند $x = 1$. تُعد $y = x + 1$ مكافأة لهما تقريبًا ولكن تنقصها الفجوة. $y=\frac{(x+1)(x-1)^2}{x-1}$ مختلف تمامًا لأن الفارق في الأس لم يعُد 1.

يتطلب **التمرين 4** من الطلاب تقييد مجال الدالة بناءً على السياق المقدم وتفسير شكل التمثيل البياني وفقًا لما يمثله.

في **التمرين 5**، يجب على الطلاب تحديد السمات الأساسية للتمثيل البياني لتحديد دالة تمثل ذلك التمثيل البياني. وخلال هذه العملية، يتعين على الطلاب أيضًا الربط بين مجال الدالة وتمثيلها البياني.

في **التمرين 6**، يرسم الطلاب تمثيلاً بيانيًا لمعادلات أربع دوال نسبية مختلفة ولكن مترابطة، والمقارنة بين التمثيلات البيانية.

تناول المعايير

التمرين	م. م. ر
1	4
2	3
3	1,4
4	4
5	7
6	7

التأكيد على معايير الممارسة الرياضية

يتطلب م. م. ر 2 من الطلاب أن يكونوا قادرين على الربط بين الكميات الموضحة رياضيًا والسياق. وفي **التمرين 3** يجب على الطلاب ربط القيم الواردة في التمثيل البياني بالعلاقات التي تمثلها في الحياة اليومية.

يجب أن يشرح الطلاب لماذا متوسط السرعة ليس هو متوسط السرعة في كل مرحلة من الرحلة. ويجب عليهم أن يشرحوا أهمية خط التقارب الأفقي.

9.6 حل المعادلات والمتباينات النسبية

المعايير

معايير الممارسات الرياضية: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

المتطلبات الأساسية

- إيجاد المقام المشترك الأصغر
- إجراء العمليات على التعابير النسبية
- تمثيل الدوال النسبية بيانيًا وتحليلها

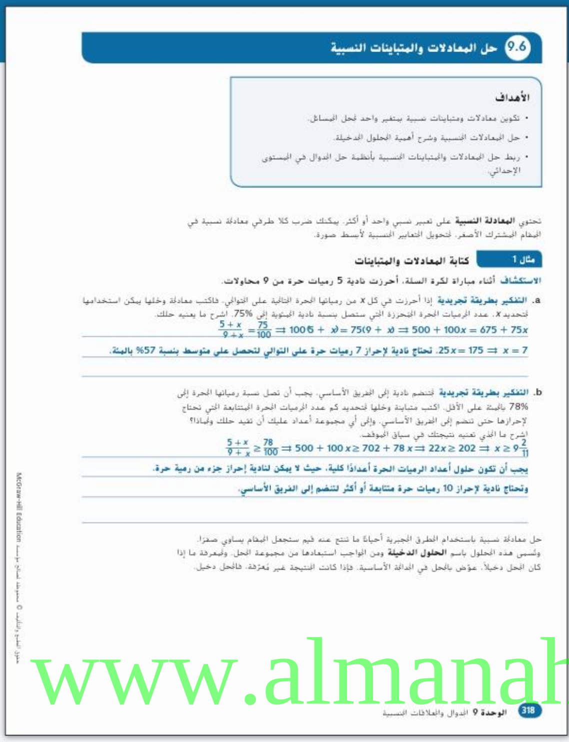
مثال 1

نصيحة للتدريس

إذا واجه الطلاب صعوبة في كتابة م.م.ر 2 **للجزء a**، فاطلب منهم التفكير في مسألة أكثر مباشرة: إيجاد النسبة المئوية إذا أحرز ممدوح هدفًا في كل رمية من الرميات الحرة الأربع التالية. يمكن للطلاب استخدام البنية في هذه المسألة الأكثر مباشرة لكتابة المعادلة باستخدام متغير.

الأسئلة الداعمة

- لماذا يجب أن يكون عدد الرميات الحرة المحرزة متتاليًا في هذه الدالة؟ **إذا تم الإخفاق في بعض محاولات الرميات الحرة، فإن المتغيرات في البسط والمقام ستختلف.**
- هل $9\frac{2}{11}$ حل منطقي في سياق هذه المسألة؟ **لا، لأنه من غير الممكن وجود كسور للرمية الحرة.**



9.6 حل المعادلات والمتباينات النسبية

الأهداف

- تكوين معادلات ومتباينات نسبية بمتغير واحد لحل المسائل.
- حل المعادلات النسبية وشرح أهمية الحلول الدخيلة.
- ربط حل المعادلات والمتباينات النسبية بأنظمة حل الدوال في المستوى الإحداثي.

تحتوي **المعادلة النسبية** على تعبير نسبي واحد أو أكثر. يمكنك ضرب كلا طرفي معادلة نسبية في المقام المشترك الأصغر، لتحويل التعابير النسبية لأبسط صورة.

مثال 1 كتابة المعادلات والمتباينات

الاستكشاف أثناء مباراة لكرة السلة، أحرزت نادية 5 رميات حرة من 9 محاولات.

a. **التفكير بطريقة تجريدية** إذا أحرزت في كل x من رمياتها الحرة التالية على التوالي، فاكتب معادلة وحلها يمكن استخدامها لتحديد x، عدد الرميات الحرة المحرزة التي ستصل بنسبة نادية المئوية إلى 75%. اشرح ما يعنيه حلك.

$\frac{5+x}{9+x}=\frac{75}{100} \Rightarrow 100(5+x)=75(9+x) \Rightarrow 500+100x=675+75x$

$25x=175 \Rightarrow x=7$. تحتاج نادية لإحراز 7 رميات حرة على التوالي لتحصل على متوسط بنسبة 75% بالمئة.

b. **التفكير بطريقة تجريدية** لتنضم نادية إلى الفريق الأساسي، يجب أن تصل نسبة رمياتها الحرة إلى 78% بالمئة على الأقل. اكتب متباينة وحلها لتحديد كم عدد الرميات الحرة المتتابعة التي تحتاج لإحرازها حتى تنضم إلى الفريق الأساسي. وإلى أي مجموعة أعداد عليك أن تقيد حلك ولماذا؟ اشرح ما الذي تعنيه نتيجتك في سياق الموقف.

$\frac{5+x}{9+x}\geq\frac{78}{100} \Rightarrow 500+100x\geq 702+78x \Rightarrow 22x\geq 202 \Rightarrow x\geq 9\frac{2}{11}$

يجب أن تكون حلول أعداد الرميات الحرة أعدادًا كلية، حيث لا يمكن لنادية إحراز جزء من رمية حرة.

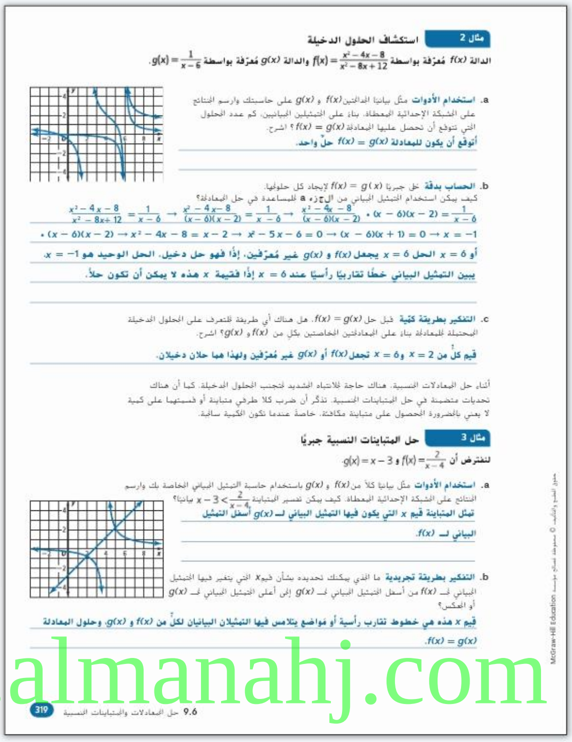
وتحتاج نادية لإحراز 10 رميات حرة متتابعة أو أكثر لتنضم إلى الفريق الأساسي.

حل معادلة نسبية باستخدام الطرق الجبرية أحيانًا ما تنتج عنه قيم ستجعل المقام يساوي صفرًا. وتسمى هذه الحلول باسم **الحلول الدخيلة** ومن الواجب استبعادها من مجموعة الحل. ولمعرفة ما إذا كان الحل دخيلاً، عوّض بالحل في الدالة الأساسية. فإذا كانت النتيجة غير مُعرّفة، فالحل دخيل.

معلومات أساسية رياضية

تحتوي المعادلات النسبية على تعبير نسبي واحد أو أكثر، ويكون الحل الأسهل لها عن طريق إيجاد المقام المشترك الأصغر وضرب طرفي المعادلة فيه. تؤدي هذه الطريقة إلى تبسيط الكسور، ولكن قد ينتج عنها حلول دخيلة. في التعابير النسبية، يجب استبعاد القيم التي تجعل المقام (أو المقامات) تساوي صفرًا من مجموعة الحل.

نهج آخر لحل المعادلات النسبية هو تمثيل كل طرف من المعادلة بيانيًا كأنه دالة، ورؤية مكان تقاطعهما. في هذه الطريقة، سيكون الإحداثي x لنقطة التقاطع هو الحل لأنه يؤدي إلى قيمة الناتج نفسها لكلا طرفي المعادلة. وتفيد هذه الطريقة في رؤية أي القيم تكون دخيلة لأنها لا تظهر في الرسم البياني.



مثال 2 استكشاف الحلول الدخيلة

الدالة $f(x)$ مُعرّفة بواسطة $f(x)=\frac{x^2-4x-8}{x^2-8x+12}$ والدالة $g(x)$ مُعرّفة بواسطة $g(x)=\frac{1}{x-6}$.

a. **استخدام الأدوات** مثّل بيانيًا الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ على حاسبتك وارسم النتائج على الشبكة الإحداثية المعطاة. بناءً على التمثيلين البيانيين، كم عدد الحلول التي تتوقع أن تحصل عليها المعادلة $f(x)=g(x)$؟ اشرح.

أتوقع أن يكون للمعادلة $f(x)=g(x)$ حلٌ واحد.

b. **الحساب بدقة** حُل جبريًا $f(x)=g(x)$ لإيجاد كل حلولها.
كيف يمكن استخدام التمثيل البياني من الجزء a للمساعدة في حل المعادلة؟

$\frac{x^2-4x-8}{x^2-8x+12}=\frac{1}{x-6} \rightarrow \frac{x^2-4x-8}{(x-6)(x-2)}=\frac{1}{x-6} \rightarrow \frac{x^2-4x-8}{(x-6)(x-2)} \cdot (x-6)(x-2)=\frac{1}{x-6}$

$\cdot (x-6)(x-2) \rightarrow x^2-4x-8=x-2 \rightarrow x^2-5x-6=0 \rightarrow (x-6)(x+1)=0 \rightarrow x=-1$

أو $x=6$ الحل $x=6$ يجعل $f(x)$ و $g(x)$ غير مُعرّفين، إذًا فهو حل دخيل. الحل الوحيد هو $x=-1$.

يبين التمثيل البياني خطًا تقاربيًا رأسيًا عند $x=6$ إذًا فقيمة x هذه لا يمكن أن تكون حلاً.

c. **التفكير بطريقة كمّية** قبل حل $f(x)=g(x)$. هل هناك أي طريقة للتعرف على الحلول الدخيلة المحتملة للمعادلة بناءً على المعادلتين الخاصتين بكلٍ من $f(x)$ و $g(x)$؟ اشرح.

قيم كلٍّ من $x=2$ و $x=6$ تجعل $f(x)$ أو $g(x)$ غير مُعرّفين ولهذا هما حلان دخيلان.

أثناء حل المعادلات النسبية، هناك حاجة للانتباه الشديد لتجنب الحلول الدخيلة. كما أن هناك تحديات متضمنة في حل المتباينات النسبية. تذكّر أن ضرب كلا طرفي متباينة أو قسمتهما على كمية لا يعني بالضرورة الحصول على متباينة مكافئة، خاصةً عندما تكون الكمية سالبة.

مثال 3 حل المتباينات النسبية جبريًا

لنفترض أن $f(x)=\frac{2}{x-4}$ و $g(x)=x-3$.

a. **استخدام الأدوات** مثّل بيانيًا كلاً من $f(x)$ و $g(x)$ باستخدام حاسبة التمثيل البياني الخاصة بك وارسم النتائج على الشبكة الإحداثية المعطاة. كيف يمكن تفسير المتباينة $x-3<\frac{2}{x-4}$ بيانيًا؟

تمثل المتباينة قيم x التي يكون فيها التمثيل البياني لـ $g(x)$ أسفل التمثيل البياني لـ $f(x)$.

b. **التفكير بطريقة تجريدية** ما الذي يمكنك تحديده بشأن قيم x التي يتغير فيها التمثيل البياني لـ $f(x)$ من أسفل التمثيل البياني لـ $g(x)$ إلى أعلى التمثيل البياني لـ $g(x)$ أو العكس؟

قيم x هذه هي خطوط تقارب رأسية أو مواضع يتلامس فيها التمثيلان البيانيان لكلٍّ من $f(x)$ و $g(x)$، وحلول المعادلة $f(x)=g(x)$.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

319 9.6 حل المعادلات والمتباينات النسبية

مثال 2

نصيحة للتدريس

م.م.ر 3

قد يكون من المفيد تكليف الطلاب بتحليل مقام الدالة $f(x)$ إلى العوامل عند حل $f(x)=g(x)$ في **الجزء b**.

الأسئلة الداعمة

- في بعض الأحيان، يكون إيجاد أصفار الدالة مطلوبًا. كيف يمكن كتابة حل $f(x)=g(x)$ على هيئة مسألة تتضمن إيجاد أصفار دالة ما؟ **إن حل $f(x)=g(x)$ مكافئ لإيجاد أصفار الدالة $f(x)-g(x)$.**
- هل $\frac{x^2-4x-8}{(x-6)(x-2)}=\frac{1}{x-6}$ مكافئ لـ $x^2-4x-8=x-2$؟ **لا. حل المعادلة الثانية هو $x=6$ ولكن المعادلة الأولى غير معرّفة عند هذه القيمة. ولكن بإضافة العبارة "$x\neq 6$" عندما تكون بعد المعادلة الثانية يجعل المعادلتين متكافئتين.**

التأكيد على معايير الممارسة الرياضية

يمكن أن يكون لمراعاة الدقة (م.م.ر 6) صورًا عدة في الرياضيات، وتشمل نقل الأفكار والمفاهيم بوضوح، وتفسير التعريفات والنظريات واستخدامها بشكل صحيح، والانتباه إلى التفاصيل عن طريق كتابة الرموز واستخدامها بطريقة ملائمة.

عند حل المعادلات، يجب على الطلاب مراعاة الدقة لتجنب الأخطاء الناتجة عن التهاون في تناول المعادلة. ويمكن أن يساعد التحقق من صحة الحلول عن طريق التعويض بها داخل المعادلة أو التحقق بأكثر من قيمة واحدة واردة بفترة الحل الطلاب على تحقيق الدقة في أجوبتهم. إذا فشل الطلاب في حذف القيم الدخيلة من مجموعة الحل في **المثال 2**، فاطلب منهم التحقق من بعض قيم x الإضافية للتوصل إلى فترات مجموعة الحل الصحيحة.

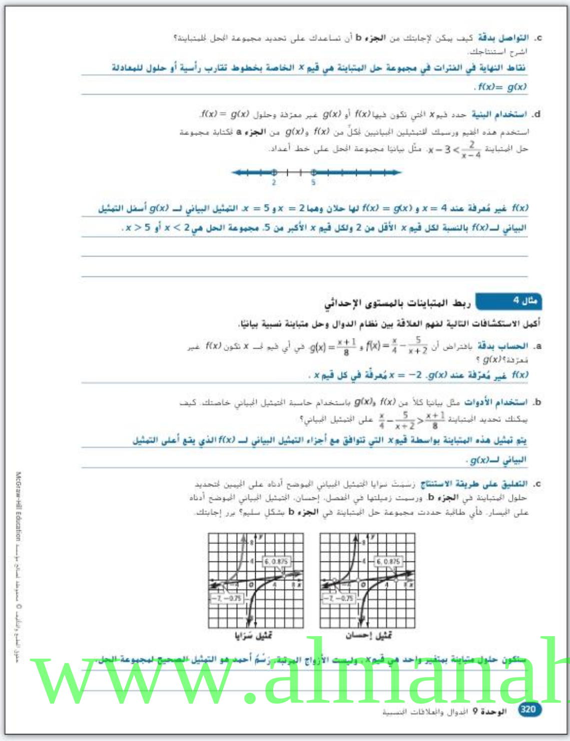
مثال 3

نصيحة للتدريس م.م.ر 2

بالنسبة **للجزء b**، كلّف الطلاب بدراسة التمثيلات البيانية للدوال والتفكير فيما يجب حدوثه لإحدى الدوال حتى تتغير وتصبح أسفل أو أعلى دالة أخرى. واسألهم إذا كان من الممكن لدالة ما أن "تقفز" فوق دالة أخرى أو إلى أسفلها. تعد هذه طريقة ملائمة لتذكير الطلاب أن الدوال النسبية يمكن أن يكون لها نقاط انفصال أو خطوط تقارب رأسية فقط، وليس انفصال قفزي.

الأسئلة الداعمة

- هل من الضروري استخدام المساعدة التي يقدمها التمثيل البياني لحل المتباينة؟ **لا. يمكن استخدام قيم x عندما تكون أي من الدالتين غير معرّفة، أو حلول الدالة $f(x) = g(x)$ لتقسيم خط الأعداد إلى فترات. وباستخدام التمثيل البياني، يتم اختبار كل فترة ببساطة، إلا أنه يمكن اختبار كل فترة جبريًا لتحديد ما إذا كانت تحقق المتباينة أم لا.**
- إذا كان مطلوب حل متباينة لها الصورة $f(x) < g(x)$، فهل ستكون حلول المعادلة $f(x) = g(x)$ متضمنة في مجموعة الحل؟ **لا. لن تكون قيم x هذه متضمنة لأن المتباينة تامة.**


c. **التواصل بدقة** كيف يمكن لإجابتك من **الجزء b** أن تساعدك على تحديد مجموعة الحل للمتباينة؟ اشرح استنتاجك.

نقاط النهاية في الفترات في مجموعة حل المتباينة هي قيم x الخاصة بخطوط تقارب رأسية أو حلول للمعادلة $f(x)= g(x)$.

d. **استخدام البنية** حدد قيم x التي تكون فيها $f(x)$ أو $g(x)$ غير معرّفة وحلول $f(x) = g(x)$. استخدم هذه القيم ورسمك للتمثيلين البيانيين لكلٍّ من $f(x)$ و$g(x)$ من **الجزء a** لكتابة مجموعة حل المتباينة $\frac{2}{x-4} < x - 3$. مثّل بيانيًا مجموعة الحل على خط أعداد.

$f(x)$ غير مُعرفة عند $x = 4$ و $f(x) = g(x)$ لها حلان وهما $x = 2$ و $x = 5$. التمثيل البياني لـ $g(x)$ أسفل التمثيل البياني لـ $f(x)$ بالنسبة لكل قيم x الأقل من 2 ولكل قيم x الأكبر من 5. مجموعة الحل هي $x < 2$ أو $x > 5$.

مثال 4 ربط المتباينات بالمستوى الإحداثي

أكمل الاستكشافات التالية لفهم العلاقة بين نظام الدوال وحل متباينة نسبية بيانيًا.

a. **الحساب بدقة** بافتراض أن $f(x) = \frac{x}{4} - \frac{5}{x+2}$ و $g(x) = \frac{x+1}{8}$، في أي قيم لـ x تكون $f(x)$ غير معرّفة؟ $g(x)$؟

$f(x)$ غير مُعرّفة عند $x = -2$. $g(x)$ مُعرفّة في كل قيم x.

b. **استخدام الأدوات** مثّل بيانيًا كلاً من $f(x)$ و$g(x)$ باستخدام حاسبة التمثيل البياني خاصتك. كيف يمكنك تحديد المتباينة $\frac{x}{4} - \frac{5}{x+2} > \frac{x+1}{8}$ على التمثيل البياني؟

يتم تمثيل هذه المتباينة بواسطة قيم x التي تتوافق مع أجزاء التمثيل البياني لـ $f(x)$ الذي يقع أعلى التمثيل البياني لـ $g(x)$.

c. **التعليق على طريقة الاستنتاج** رسمت سرايا التمثيل البياني الموضح أدناه على اليمين لتحديد حلول المتباينة في **الجزء b**. ورسمت زميلتها في الفصل، إحسان، التمثيل البياني الموضح أدناه على اليسار. فأي طالبة حددت مجموعة حل المتباينة في **الجزء b** بشكلٍ سليم؟ برر إجابتك.

تمثيل سرايا

تمثيل إحسان

ستكون حلول متباينة بمتغير واحد هي قيم x، وليست الأزواج المرتبة. رَسمُ أحمد هو التمثيل الصحيح لمجموعة الحل.

تلميح تقني

من المهم أن يدخل الطلاب البسوط والمقامات بحرص مستخدمين الأقواس حسب الاقتضاء، وذلك حتى تتمكن الحاسبة من تفسير الدالة بالشكل الصحيح. بالإضافة إلى استخدام ميزة INTERSECT في حاسبة التمثيل البياني، تأكد من معرفة الطلاب لطريقة تغيير نافذة العرض أو كيفية الاطلاع على الجدول إذا لم تكن إحدى نقطة التقاطع واضحة في البداية. بإمكانهم أيضًا تغيير دقة القيم الواردة بالجدول عن طريق تحرير ميزة TABLE SET.

d. **الحساب بدقة** استخدم التمثيل البياني لمساعدتك على كتابة الفترات التي تتوافق مع حلول المتباينة في **الجزء b**. اشرح السبب في وجود دائرة مفتوحة عند $x = -2$.
$-7 < x < -2,\ x > 6$؛ خط التقارب عند -2 يحذف -2 من المجال.

مثال 5 **القوى في المتباينات النسبية**

أوجد حل المتباينة $\frac{(x+1)(x-1)^2(x+2)}{(x-1)(x+3)^2(x-2)^3} < 0$.

a. **التفكير بطريقة تجريدية** فكّر في العامل $x + 1$. متى يكون هذا العامل 0؟ متى يكون موجبًا؟ متى يكون سالبًا؟
$x + 1 = 0$ عندما يكون $x = -1$. فهو موجب بالنسبة إلى $x > -1$، وسالب بالنسبة إلى $x < -1$.

b. **التفكير بطريقة تجريدية** فكّر في العامل $(x + 3)^2$. متى يكون هذا العامل 0؟ متى يكون موجبًا؟ متى يكون سالبًا؟
$(x + 3)^2 = 0$ عندما يكون $x = -3$. وبخلاف هذا، فهي دائمًا موجبة.

c. **التفكير بطريقة تجريدية** ما هي كل النقاط التي يكون فيها أي عامل صفرًا؟
بالإضافة إلى $x = -1$ وإلى $x = -3$، هناك أيضًا $x = -2$ (من $x + 2$)، و $x = 1$ (من $x - 1$)، و $x = 2$ (من $x - 2$).

d. **التفكير بطريقة تجريدية** فكّر في كل العوامل الأخرى، واملأ الجدول أدناه بإشارة + أو −.

	$x < -3$	$-3 < x < -2$	$-2 < x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x < 2$	$x > 2$
$x + 1$	−	−	−	+	+	+
$(x - 1)^2$	+	+	+	+	+	+
$x + 2$	−	−	+	+	+	+
$x - 1$	−	−	−	−	+	+
$(x + 3)^2$	+	+	+	+	+	+
$(x - 2)^3$	−	−	−	−	−	+

e. **التفكير بطريقة تجريدية** بافتراض أن الدالة هي ناتج ضرب وناتج قسمة كل العوامل أعلاه، فأكمل الجدول أدناه.

	$x < -3$	$-3 < x < -2$	$-2 < x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x < 2$	$x > 2$
$\frac{(x+1)(x-1)^2(x+2)}{(x-1)(x+3)^2(x-2)^3}$	+	+	−	+	−	+

f. **التفكير بطريقة تجريدية** باستخدام الجدول من **الجزء e**، دوّن حل المتباينة الأصلية $\frac{(x+1)(x-1)^2(x+2)}{(x-1)(x+3)^2(x-2)^3} < 0$ اشرح استنتاجك.
$-2 < x < -1$ أو $1 < x < 2$؛ الإجابة النموذجية: وفقًا للجدول، المكان الوحيد الذي تكون الدالة النسبية فيه هو عندما يكون $-2 < x < -1$ أو $1 < x < 2$. لا تُضمّن نقاط النهاية لأن المتباينة الأصلية أقل بكثير.

التأكيد على معايير الممارسة الرياضية

عند التعليق بطريقة نقدية على الاستنتاج الرياضي للآخرين (**م.م.ر 3**). فمن غير الكافي أن يذكر الطلاب ببساطة ما إذا كان يوافق على الاستنتاج أم يختلف معه، ولكن عليه أن يقدم حُجة أو تبريرًا لوجهة نظره. تأكد من شرح الطلاب لسبب خطأ إحدى مجموعات الحل الواردة في **الجزء c** من **المثال 4** وكيف يمكن إثبات ذلك. شجع الطلاب على مناقشة مواطن القوة والضعف في استنتاج كل من سلّام وأحمد حتى يشكّلوا رابطًا قويًا بالمعيار **م.م.ر 3**.

مثال 4

نصيحة للتدريس م.م.ر 6

نظرًا لأهمية الدقة الدائمة في الجبر، يتطلب حل المتباينات باستخدام المستوى الإحداثي الانتباه إلى التفاصيل والرموز. بالنسبة إلى **الجزء b**، كلّف الطلاب بإيجاد قيمة الدوال عند إحدى قيم x المختارة لكي يبحثون عن علاقة بين المتباينة والتمثيلات البيانية للدوال. والدقة مطلوبة في **الجزء c** لأن الرسم الظاهر على جهة اليمين يبين بوضوح المكان الذي تقع فيه الدالة $g(x)$ فوق $f(x)$ إلا أن هذه النقاط ليست هي الحلول. ذكّر الطلاب بأن حلول المتباينات ذات متغير واحد يتم تمثيلها بيانيًا على خط الأعداد.

الأسئلة الداعمة

- كيف يختلف حل المتباينة عن حل المعادلة؟ **قد يتضمن حل المتباينة على فترات من الحلول الصحيحة.**
- لماذا يجب عليك إيجاد أية قيم مستبعدة بالإضافة إلى نقاط التقاطع لدالتين ممثلتين بيانيًا؟ **لأن هذه القيم هي النقاط الحدودية للفترات التي تضم الحلول.**

مثال 5 م.م.ر 2

نصيحة للتدريس

قد يحتاج الطلاب إلى المساعدة لبحث متى يكون كل عامل سالبًا أو موجبًا ولماذا يهم ذلك عند حل المتباينة الأصلية.

الأسئلة الداعمة

- لماذا يمكننا التأكد من أن علامات $x + 1$ تتغير مرة واحدة فقط؟ **$y = x + 1$ عبارة عن خط مائل، ولذا فإنه يقطع المحور x مرة واحدة فقط عند النقطة $x = -1$.**
- كيف يمكنني أن أحدد سريعًا على المخطط ما إذا كانت الدالة النسبية النهائية موجبة أم سالبة في فترة محددة؟ **بالنسبة لتلك الفترة، كل ما أحتاجه هو إحصاء عدد العلامات السالبة في المخطط. فإذا كان العدد زوجيًا، فإن العلامات السالبة تقترن في ثنائيات معًا عند الضرب لنحصل على قيمة موجبة. أما إذا كان فرديًا، فهناك إذًا قيمة سالبة إضافية، وبالتالي تكون النتيجة سالبة.**

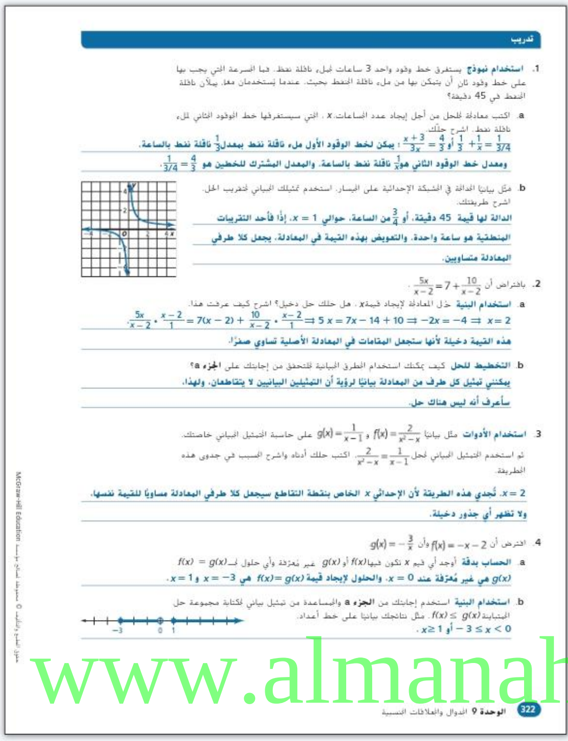
تمرين

يطلب **التمرين 1** من الطلاب كتابة معادلة لحل مسألة من الحياة اليومية. يجب على الطلاب أيضًا حل المعادلة بيانيًا بالتعرف على نقطة التقاطع باعتبارها حل المعادلة.

في **التمرين 2**، يجب على الطلاب حل معادلة نسبية والتحقق من عدم وجود حلول دخيلة.

يتطلب **التمرين 3** أن يحل الطلاب معادلة نسبية بتمثيل كل طرف من طرفي التعبير بيانيًا بشكل منفصل وإيجاد نقطة تقاطع.

يطلب **التمرين 4** من الطلاب حل متباينة نسبية.



تدريب

1. **استخدام نموذج** يستغرق خط وقود واحد 3 ساعات لملء ناقلة نفط. فما السرعة التي يجب بها على خط وقود ثانٍ أن يتمكن بها من ملء ناقلة النفط بحيث، عندما يُستخدمان معًا، يملآن ناقلة النفط في 45 دقيقة؟

a. اكتب معادلة للحل من أجل إيجاد عدد الساعات x، التي سيستغرقها خط الوقود الثاني لملء ناقلة نفط. اشرح حلّك.

$\frac{1}{3/4} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}$ أو $\frac{4}{3} = \frac{x+3}{3x}$؛ يمكن لخط الوقود الأول ملء ناقلة نفط بمعدل $\frac{1}{3}$ ناقلة نفط بالساعة. ومعدل خط الوقود الثاني هو $\frac{1}{x}$ ناقلة نفط بالساعة. والمعدل المشترك للخطين هو $\frac{4}{3} = \frac{1}{3/4}$.

b. مثّل بيانيًا الدالة في الشبكة الإحداثية على اليسار. استخدم تمثيلك البياني لتقريب الحل. اشرح طريقتك.

الدالة لها قيمة 45 دقيقة، أو $\frac{3}{4}$ من الساعة، حوالي $x = 1$. إذًا فأحد التقريبات المنطقية هو ساعة واحدة، والتعويض بهذه القيمة في المعادلة، يجعل كلا طرفي المعادلة متساويين.

2. بافتراض أن $\frac{5x}{x-2} = 7 + \frac{10}{x-2}$.

a. **استخدام البنية** حُل المعادلة لإيجاد قيمة x. هل حلك حل دخيل؟ اشرح كيف عرفت هذا.

$\frac{5x}{x-2} \cdot \frac{x-2}{1} = 7(x-2) + \frac{10}{x-2} \cdot \frac{x-2}{1} \Rightarrow 5x = 7x - 14 + 10 \Rightarrow -2x = -4 \Rightarrow x = 2$.

هذه القيمة دخيلة لأنها ستجعل المقامات في المعادلة الأصلية تساوي صفرًا.

b. **التخطيط للحل** كيف يمكنك استخدام الطرق البيانية للتحقق من إجابتك على **الجزء a**؟

يمكنني تمثيل كل طرف من المعادلة بيانيًا لرؤية أن التمثيلين البيانيين لا يتقاطعان، ولهذا، سأعرف أنه ليس هناك حل.

3. **استخدام الأدوات** مثّل بيانيًا $f(x) = \frac{2}{x^2 - x}$ و $g(x) = \frac{1}{x-1}$ على حاسبة التمثيل البياني خاصتك. ثم استخدم التمثيل البياني لحل $\frac{1}{x-1} = \frac{2}{x^2 - x}$. اكتب حلك أدناه واشرح السبب في جدوى هذه الطريقة.

$x = 2$. تُجدي هذه الطريقة لأن الإحداثي x الخاص بنقطة التقاطع سيجعل كلا طرفي المعادلة مساويًا للقيمة نفسها، ولا تظهر أي جذور دخيلة.

4. افترض أن $f(x) = -x - 2$ وأن $g(x) = -\frac{3}{x}$

a. **الحساب بدقة** أوجد أي قيم x تكون فيها $f(x)$ أو $g(x)$ غير مُعرّفة وأي حلول لـ $f(x) = g(x)$

$g(x)$ هي غير مُعرّفة عند $x = 0$. والحلول لإيجاد قيمة $f(x) = g(x)$ هي $x = -3$ و $x = 1$.

b. **استخدام البنية** استخدم إجابتك من **الجزء a** والمساعدة من تمثيل بياني لكتابة مجموعة حل المتباينة $f(x) \le g(x)$. مثّل نتائجك بيانيًا على خط أعداد.

$-3 \le x < 0$ أو $x \ge 1$.

322 الوحدة 9 الدوال والعلاقات النسبية

أخطاء شائعة

عندما يحل الطلاب متباينات نسبية، فقد يحاولون حلّها مثلما يحلون معادلة نسبية. وقد يتذكرون أن ضرب أو قسمة طرفي متباينة ما في كمية سالبة يغير اتجاه المتباينة. إلا أن متغير مثل x قد يظهر كمية موجبة بسبب عدم وجود علامة السالب. عند ارتكاب هذا الخطأ، كلّف الطلاب باختبار مجموعة الحل الخاص بهم بيانيًا. فذلك سيمكنهم من التعرف على بعض الأخطاء المرتكبة في عملية الحل الخاصة بهم.

في **التمرين 5**، يجب على الطلاب كتابة متباينة لتمثيل مسألة من الحياة اليومية. ويتعين على الطلاب بعد ذلك حل المتباينة بيانيًا.

يتطلب **التمرين 6** أن يعلق الطلاب على حل طلاب آخرين، وذلك لحاجتهم إلى فهم طريقة حل معادلة نسبية.

يطلب **التمرين 7** من الطلاب التعليق على حل طلاب آخرين في حل متباينة نسبية. ويجب على الطلاب فهم طريقة حل المتباينة بشكل صحيح للإجابة عن السؤال.

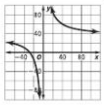
تناول المعايير

التمرين	م.م.ر
1	4
2	1, 7
3	5
4	6, 7
5	5, 6
6-7	3

c. **التواصل بدقة** اشرح السبب في أن كل قيمة من **الجزء a** يجب تضمينها أو استبعادها من مجموعة حل المتباينة.
القيمتان $x = -3$ و $x = 1$ متضمنتان لأنهما تُحققان $f(x) \leq g(x)$. القيمة $x = 0$ مستبعدة لأنها تجعل $g(x)$ غير مُعرّفة.

5. تنفق لجنة التخرج AED 1000 للمكان ولمنسق الأغاني بالإضافة إلى AED 35 مقابل كل وجبة يُقدمة. كم عدد الطلاب اللازم حضورهم للتخرج للحفاظ على سعر التذكرة أقل من AED 60؟

a. **التواصل بدقة** اكتب متباينة تصف هذا الموقف. اشرح كل حد في متباينتك.
$\frac{1000 + 35x}{x} \leq 60$؛ تكلفة المكان ومنسق الأغاني هي AED 1000، وتكلفة الوجبات هي $35x$ AED. ومجموع هذين الاثنين هو إجمالي تكلفة التخرج. بالقسمة على عدد الطلاب، x، تنتج عنها التكلفة لكل طالب. نرغب في تحديد عدد الطلاب اللازم حضورهم ليصبح متوسط التكلفة أقل من أو يساوي AED 60.



b. **استخدام الأدوات** التمثيل البياني للدالة التي تمثل نموذجًا عن متوسط تكلفة تذكرة التخرج موضح على اليسار. فاستخدمه لتقريب الإجابة عن هذه المسألة. اشرح طريقتك.
يهبط التمثيل البياني أسفل $y = 60$ عندما يكون $x = 40$، لذا فيلزم على الأقل حضور 40 طالبًا في التخرج.

6. **التعليق على طريقة الاستنتاج** استخدم محمود الدالة النسبية $f(x)$ $\frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 2x - 3}$ لتحديد حلول $f(x) = 0$. وقد وجد أن x يمكن أن تكون 3 أو -4. تحقق من عمل محمود أدناه واذكر إذا ما كنت تتفق أو تختلف مع حلوله ولماذا.

عمل محمود:
$\frac{(x^2 + x - 12)}{(x^2 - 2x - 3)} = 0$
$\frac{(x^2 + x - 12)}{(x^2 - 2x - 3)} \cdot (x^2 - 2x - 3) = 0 \cdot (x^2 - 2x - 3)$
$x^2 + x - 12 = 0$
$(x - 3)(x + 4) = 0$
$x = 3$ أو $x = -4$

الإجابة النموذجية: أتفق مع عمل محمود، ولكن يجب استبعاد حله بقيمة 3، لأنه سيجعل مقام $f(x)$ يساوي صفرًا. القيمة -4 فقط تُمثل حلاً.

7. **التعليق على طريقة الاستنتاج** يحاول طالب حل المتباينة $\frac{1}{x} < 2$ ووجد أن مجموعة الحل هي $x > \frac{1}{2}$. عمل الطالب موضح أدناه. فحدد ما إذا كنت تتفق أو تختلف مع مجموعة الحل الخاصة به ولماذا. ما الطريقة التي كان بوسع هذا الطالب استخدامها للتحقق من صحة عمله؟

عمل الطالب:
$\frac{1}{x} < 2$
$\frac{1}{x} \cdot x < 2 \cdot x$
$1 < 2x$
$\frac{1}{2} < x$

الإجابة النموذجية: أختلف مع مجموعة حله. فضرب كلا طرفي المتباينة في x لا يؤدي إلى متباينة مكافئة إذا كان x سالبًا. وعمله صحيح فقط بالنسبة لقيم x الموجبة. وكان بمقدوره أن يُمثل بيانيًا المعادلتين $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = 2$ وتنظر إلى قيم x التي يكون فيها التمثيل البياني لـ $f(x)$ أسفل التمثيل البياني لـ $g(x)$.

التأكيد على معايير الممارسة الرياضية

تبين المسألتان اللتان تستخدمان التمثيل بالنماذج (**التمرينان 1** و **5**) بقسم التمارين للطلاب كيف يمكن استخدام المعادلات والمتباينات النسبية لحل المسائل المتعلقة بالحياة اليومية والمجتمع ومكان العمل، حسبما يقتضي **م.م.ر 4**.

تحدَّ الطلاب للخروج بأمثلة أخرى يمكن حلها بطريقة مشابهة لتعزيز مدى فائدة المعادلات النسبية. بالإضافة لذلك، كلّف الطلاب بمناقشة الافتراضات التي يطرحونها عند وضع معادلات بدلالة قدر محدود من المعلومات. على سبيل المثال، اسألهم عن مدى واقعية وجود خطوط للوفود بسرعات مختلفة أو إذا ما سيكون هناك تكاليف أخرى لحفل التخرج.

9 مهمة تقويم الأداء

التكلفة على حساب الزمن

سوف يستخدم الطلاب تمثيل الدوال النسبية لاستكشاف التكلفة السنوية لمصباح على حساب فترة صلاحيته.

المعايير

معايير الممارسات الرياضية: تدعم مهمة تقويم الأداء بالوحدة 9 الممارسات الرياضية **م.م.ر 1**، و **م.م.ر 2**، و **م.م.ر 3**، و **م.م.ر 4**.

بداية سريعة

تبدأ المهمة بسؤال مهم وصعب، ومن المرجح أن العديد من الطلاب سيشعرون بالقلق أو الحيرة حيال طريقة البدء فيه. قد يقدم ما يلي المساعدة.

- كلّف الطلاب باستخدام جدول لتسجيل التعابير التي تمثل التكلفة السنوية بعد عام وعامين و 3 أعوام و 4 أعوام
$\frac{(50 + 12 \cdot 1)}{1}$; $\frac{(50 + 12 \cdot 2)}{2}$; $\frac{(50 + 12 \cdot 3)}{3}$; $\frac{(50 + 12 \cdot 4)}{4}$
- كلف الطلاب بوضع خط أسفل التغيرات التي تطرأ على التعبير في كل سطر.

مهمة تقويم الأداء

التكلفة على حساب الزمن

قدّم حلاً واضحًا للمسألة، وتأكد من توضيح كل خطواتك، وتضمين جميع الرسومات ذات الصلة، وتبرير إجاباتك.

يحتاج رامي إلى مصباح جديد، وقلّص خياراته إلى الخيارات الموضحة في الجدول.

استخدام النماذج	السعر المبدئي	تكلفة الطاقة
A	50	AED 12/سنة
B	70	AED 15/سنة
C	80	AED 9/سنة
D	85	AED 12/سنة

الجزء A

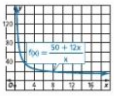
رامي يعجبه فعلاً شكل النموذج A، وسعره المبدئي ممتاز. وبافتراض أن التكاليف الوحيدة المرتبطة بالمصباح هي الشراء المبدئي وتكاليف الطاقة. فما التكلفة السنوية للنموذج A كدالة للسنوات x؟ اشرح استنتاجك.

التأكيد على معايير الممارسة الرياضية

تتواءم مهمة تقويم الأداء هذه بشكل وثيق مع **م.م.ر 4 (استخدام نماذج الرياضيات)**. وينص هذا المعيار على أن الطلاب المتفوقين في الرياضيات "يفهمون أن النماذج تعتبر طريقة للتفكير بطريقة كمية وتجريدية (القدرة على الربط بالسياق والفصل عن السياق)". وصُممت هذه المهمة بحيث يقوم الطلاب بعمل نموذج مبدئيًا باستخدام الرموز، وبعد ذلك يتبعونه بعمل نموذج بياني، وأخيرًا يقومون بربط النموذج كله بالسياق مع المقارنة بين التمثيلات البيانية. وبالنظر إلى الطريقة التي تُبنى بها المهام على سابقاتها، فمن الضروري أن يصيب الطلاب في الدالة الأولية.

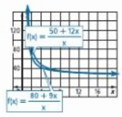
الجزء B

ارسم التمثيل البياني للدالة التي أوجدتها في **الجزء A**. اشرح المجال وأي أصفار أو خطوط تقارب.



الجزء C

قرر رامي أنه سيشتري إما النموذج A أو النموذج C. استخدم الشبكة أدناه لرسم تمثيل بياني لكلا النموذجين. ثم ناقش أي نموذج كنت ستفضله. باستخدام الميزات الأساسية للتمثيل البياني لتبرير إجابتك.



نصيحة للتدريس

م.م.ر 3

تقدم هذه المهمة فرصًا متعددة لتناول **م.م.ر 3 (بناء فرضية عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين)**. وينص هذا المعيار على أن الطلاب المتفوقين في الرياضيات "يبررون استنتاجاتهم، وينقلونها للآخرين، ويردّون على فرضيات الآخرين". بالنسبة **للجزأين B** و **C**، اقترح على الطلاب مناقشة طرق تفكيرهم واستنتاجاتهم مع أحد الزملاء أو في مجموعات صغيرة.

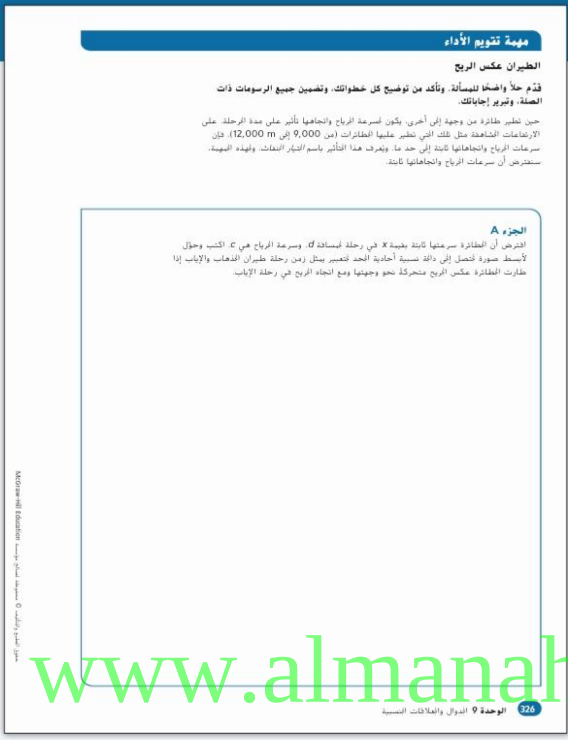
أخطاء شائعة

قد يفكر الطلاب أن القيد $x \neq 0$ على المجال سينتج عنه فجوة في التمثيل البياني. ذكّر الطلاب أنه ينبغي وجود خط تقارب لأن الدالة لا تحتوي على عامل مشترك.

معايير رصد الدرجات

الجزء	أقصى النقاط	إجابة تستحق الدرجة الكاملة
A	2	$f(x) = \frac{50 + 12x}{x}$ يجب قسمة التكلفة الأولية وتكلفة الطاقة السنوية على عدد الأعوام الإجمالي للحصول على التكلفة السنوية.
B	4	انظر دليل الطالب التفاعلي للاطلاع على التمثيلات البيانية. ينبغي أن يكون المجال $x > 0$ ليس بسبب وجود خط تقارب عند 0 فحسب، وإنما لأن سياق الموقف لا يسمح إلا بأعوام غير سالبة أيضًا. يحدث خط التقارب الرأسي عند $x = 0$، وهي القيمة التي تجعل مقام الدالة يساوي صفرًا. ويحدث خط التقارب الأفقي عند 12 لأنه كلما كان المصباح قديمًا، كان لتكلفة الطاقة أثر أكبر على التكلفة الإجمالية. لا يوجد أصفار في مجال الدالة.
C	4	انظر دليل الطالب التفاعلي للاطلاع على التمثيلات البيانية. الإجابة النموذجية: إذا كان من المحتمل أن يستمر المصباح 10 أعوام، فسوف أختار النموذج C. تمر التمثيلات البيانية بنقطة 10 أعوام، وهي النقطة التي تتساوى عندها التكلفة السنوية. وبعد ذلك، يكون النموذج C أقل تكلفة.
الإجمالي	10	

9 مهمة تقويم الأداء


مهمة تقويم الأداء

الطيران عكس الريح

قدّم حلاً واضحًا للمسألة، وتأكد من توضيح كل خطواتك، وتضمين جميع الرسومات ذات الصلة، وتبرير إجاباتك.

حين تطير طائرة من وجهة إلى أخرى، يكون لسرعة الرياح واتجاهها تأثير على مدة الرحلة. على الارتفاعات الشاهقة مثل تلك التي تطير عليها الطائرات (من 9,000 إلى 12,000 m)، فإن سرعات الرياح واتجاهاتها ثابتة إلى حد ما. ويُعرف هذا التأثير باسم *التيار النفاث*. ولهذه المهمة، ستفترض أن سرعات الرياح واتجاهاتها ثابتة.

الجزء A

افترض أن الطائرة سرعتها ثابتة بقيمة x في رحلة لمسافة d. وسرعة الرياح هي c. اكتب وحوّل لأبسط صورة لتصل إلى دالة نسبية أحادية الحد لتعبير يمثل زمن رحلة طيران الذهاب والإياب إذا طارت الطائرة عكس الريح متحركةً نحو وجهتها ومع اتجاه الريح في رحلة الإياب.

326 الوحدة 9 الدوال والعلاقات النسبية

التحليق عكس الرياح

سيستخدم الطلاب معرفتهم بجمع وطرح التعابير النسبية لكتابة المعادلات لوصف سرعة الطائرات التي تحلق خلال الرياح المقابلة والرياح الخلفية.

المعايير

معايير الممارسات الرياضية: تدعم مهمة تقويم الأداء بالوحدة 9 الممارسات الرياضية **م.م.ر 3** و**م.م.ر 7**.

بداية سريعة

قد يساعد ما يلي الطلاب على البدء.

- ما المعادلة التي تربط بين المسافة والسرعة والزمن؟ **السرعة × الزمن = المسافة**
- بالنسبة للمعدلات والمسافات المختلفة، كيف نعبر عن الزمن الإجمالي؟ **نجمع التعابير الدالة على المسافة/السرعة.**

التأكيد على معايير الممارسة الرياضية

تتواءم مهمة تقويم الأداء هذه بشكل وثيق مع **م.م.ر 7 (محاولة إيجاد البنية واستخدامها)**. يقلل التعبير المبسط الذي يتوصل إليه الطلاب في **الجزء A** مقدار الجبر المطلوب استخدامه في أقسام أخرى بدرجة كبيرة. قد يشعر الطلاب براحة أكبر عند استخدام الفكرة الأولية وهي جمع كل من تعابير "المسافة/المعدل" في كل مرة. وبينما لا يوجد بالتأكيد أي شيء خاطئ أو غير مقبول حول هذا النهج، فإنه يخدم الطلاب أيضًا لإدراك أن وجود تعبير نسبي أحادي الحد ومبسط يتم استخدامه عند الحاجة أفضل من حيث الكفاءة، وأيضًا من حيث تقليل الخطأ المحتمل.

نصيحة للتدريس

م.م.ر 3

يبدأ الطلاب هذه المهمة من خلال إنشاء معادلة من الصفر وينهونها بتحديد ما إذا كانت بعض القيم معقولة في سياق الموقف أم لا. وبالنظر إلى هذه الفلسفة الرياضية، يمكن للطلاب الاستفادة من **م.م.ر 3** لمناقشة أفكارهم بطريقة نقدية مع بعضهم البعض.

أخطاء شائعة

في **الجزء B**، قد يحاول الطلاب مضاعفة مسافة الرحلة دون أن يدركوا أن هذه الصيغة معدّة لمسافة الرحلة في اتجاه واحد

الجزء B

تُحلق الطائرات عادةً على سرعات تقترب من 725 km/h. ورحلة الذهاب والإياب من مدينة نيويورك إلى سان فرانسيسكو تستغرق قرابة 12 ساعة. ومسار الرحلة الجوية هو نفسه في كلتي الرحلتين بمسافة 4,506 km تقريبًا للاتجاه الواحد. بفرض أن سرعة الرياح واتجاهها ثابتان. ما سرعة الرياح لهذه الرحلة؟

الجزء C

وجد محمود بيانات على الإنترنت عن سرعة التيار النفاث على امتداد المسار الذي ستتخذه رحلته الجوية. واستخدم هذه البيانات لحساب أن الزمن المجموع لرحلتي الذهاب والإياب على مسافة 804 km. فستستغرق الرحلة الجوية في الاتجاه الواحد 50 ساعة إذا كانت سرعة الطائرة سرعة ثابتة بقيمة 804 km/h.

i) حدد القيمة التي استخدمها محمود لسرعة الرياح.

ii) هل تعتقد أن البيانات التي استخدمها محمود كانت صحيحة؟ اشرح استنتاجك.

معايير رصد الدرجات

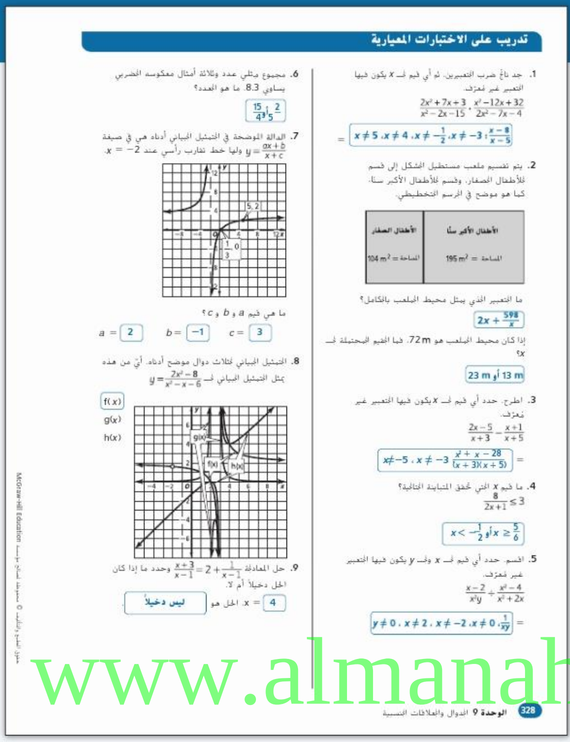
الجزء	أقصى النقاط	إجابة تستحق الدرجة الكاملة
A	6	$t=\frac{d}{x+c}+\frac{d}{x-c}=\frac{d(x-c)+d(x+c)}{(x+c)(x-c)}=\frac{2dx}{x^2-c^2}$
B	4	باستخدام المعادلة من **الجزء A** $12=\frac{2(2800)(470)}{(470)^2-c^2}$ بإيجاد قيمة c، ينتج $470^2-c^2=\frac{2(2800)(470)}{12}; -c^2=\frac{2,632,000}{12}-470^2; c=\sqrt{-\left(\frac{2,632,000}{12}-470^2\right)}\approx \pm 39.6$.
C	8	i) $50=\frac{2(800)(500)}{(500)^2-c^2}; 500^2-c^2=\frac{2(800)(500)}{50}; -c^2=2(800)(10)-500^2; c=\sqrt{-(16,000-250,000)}\approx \pm 483.7$ ii) الإجابة النموذجية: يبدو أن سرعة الرياح شديدة للغاية. فهي قريبة جدًا من سرعة الطائرة. وهو ما يعني أن الطائرة ستحلق بسرعة 26.2 km/h للجزء الواحد من الرحلة. البيانات التي وجدها إمحمود على شبكة الإنترنت غير دقيقة.
الإجمالي	18	

تدريب على الاختبار المعياري

تشخيص الأخطاء

الطلاب الذين يواجهون صعوبة في **الجزء 2** قد لا يدركون أن بإمكانهم جمع مساحتين، ثم استخدام المساحة المُجمَّعة والطول لكتابة تعبير يمثل العرض.

الطلاب الذين يجيبون على **الجزء 6** بشكل خاطئ ربما يكونون قد ارتكبوا خطأً في حل المعادلة التربيعية. ومن الأفضل حل المعادلة التي تنتج عن هذه المسألة باستخدام القانون العام.



تدريب على الاختبارات المعيارية

1. جد ناتج ضرب التعبيرين. ثم أي قيم لـ x يكون فيها التعبير غير مُعرّف.

$$\frac{2x^2+7x+3}{x^2-2x-15} \cdot \frac{x^2-12x+32}{2x^2-7x-4}$$

$= \boxed{\frac{x-8}{x-5};\ x \neq -3,\ x \neq -\frac{1}{2},\ x \neq 4,\ x \neq 5}$

2. يتم تقسيم ملعب مستطيل الشكل إلى قسم للأطفال الصغار، وقسم للأطفال الأكبر سناً، كما هو موضح في الرسم التخطيطي.

الأطفال الأكبر سناً	الأطفال الصغار
المساحة = $195\ m^2$	المساحة = $104\ m^2$

ما التعبير الذي يمثل محيط الملعب بالكامل؟

$\boxed{2x + \frac{598}{x}}$

إذا كان محيط الملعب هو $72\ m$، فما القيم المحتملة لـ x؟

$\boxed{13\ m \text{ أو } 23\ m}$

3. اطرح. حدد أي قيم لـ x يكون فيها التعبير غير مُعرّف.

$$\frac{2x-5}{x+3} - \frac{x+1}{x+5}$$

$= \boxed{\frac{x^2+x-28}{(x+3)(x+5)},\ x \neq -3,\ x \neq -5}$

4. ما قيم x التي تحقق المتباينة التالية؟

$$\frac{8}{2x+1} \leq 3$$

$\boxed{x < -\frac{1}{2} \text{ أو } x \geq \frac{5}{6}}$

5. اقسم. حدد أي قيم لـ x ولـ y يكون فيها التعبير غير مُعرّف.

$$\frac{x-2}{x^2y} \div \frac{x^2-4}{x^2+2x}$$

$= \boxed{\frac{1}{xy},\ x \neq 0,\ x \neq -2,\ x \neq 2,\ y \neq 0}$

6. مجموع مثلي عدد وثلاثة أمثال معكوسه الضربي يساوي 8.3. ما هو العدد؟

$\boxed{\frac{2}{5} \text{ أو } \frac{15}{4}}$

7. الدالة الموضحة في التمثيل البياني أدناه هي في صيغة $y = \frac{ax+b}{x+c}$ ولها خط تقارب رأسي عند $x = -2$.

ما هي قيم a و b و c؟

$a = \boxed{2}$ $b = \boxed{-1}$ $c = \boxed{3}$

8. التمثيل البياني لثلاث دوال موضح أدناه. أيّ من هذه يمثل التمثيل البياني لـ $y = \frac{2x^2-8}{x^2-x-6}$

$\boxed{f(x)}$

$g(x)$

$h(x)$

9. حل المعادلة $\frac{x+3}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1}$ وحدد ما إذا كان الحل دخيلاً أم لا.

$x = \boxed{4}$. الحل هو $\boxed{\text{ليس دخيلاً}}$.

إستراتيجية خوض الاختبار

بالنسبة **للأجزاء 1 و 3 و 5**، ذكّر الطلاب بأن التعبير يكون غير معرّف إذا كانت أي قيمة من قيم x تجعل مقام التعبير الأصلي أو التعبير النهائي يساوي 0. وبما أن الطلاب سوف يقومون بحذف العوامل المشتركة عند تبسيط التعبير، فاقترح عليهم كتابة القيم المستثناة عندما تقابلهم بدلاً من محاولة تحديدها في نهاية الحل.

10. بالنسبة لكل دالة، حدد أي أصفار وأي خطوط تقاربة رأسية وأفقية وأي فجوات.

الدالة	الأصفار	خط التقارب الرأسي	خط التقارب الأفقي	الفجوات
$y = \frac{1}{x+3} + 7$	$-\frac{22}{7}$	$x = -3$	$y = 7$	
$y = \frac{x^2 + 2x - 15}{x + 5}$	3			$x = -5$
$y = \frac{9x^2 - 4}{4x^2 - 25}$	$\pm\frac{2}{3}$	$x = -\frac{5}{2}, x = \frac{5}{2}$	$y = \frac{9}{4}$	

11. تُجدف نورا بقارب الكاياك الخاص بها في المياه الراكدة بسرعة 6 km/h. وتُجدف باتجاه التيار، ثم تستدير وتعود ضد التيار إلى النقطة التي بدأت منها. رحلتها بالكامل هي 18 km/h وتستغرق 3.2 ساعات. ما سرعة التيار؟ اكتب الحل هنا.

1.5 km/h؛ كل جزء من الرحلة بقيمة 9 km، والسرعة مع التيار هي $x - 6$، والسرعة ضد التيار هي $x + 6$.

$$\frac{9}{6+x} + \frac{9}{6-x} = 3.2, \frac{9(6-x) + 9(6+x)}{(6+x)(6-x)} = 3.2, 108 = 115.2 - 3.2x^2, x^2 = 2.25, x = \pm 1.5.$$

ينبغي أن تكون السرعة موجبة، لذا فالإجابة هي 1.5

12. يرغب فريق الرياضيين في عمل زجاجات مياه عليها شعار فريقهم. ويبين الجدول رسوم التجهيز والسعر مقابل كل زجاجة مياه من شركتين مختلفتين.

الشركة	رسوم التجهيز	السعر لكل زجاجة مياه
الملحقات الرياضية	AED 125	AED 5
المعدات الخارجية	AED 200	AED 3

a. اكتب دالة $f(x)$ تمثل متوسط التكلفة لكل زجاجة مياه مُطلبية من x زجاجة مياه من شركة الملحقات الرياضية. اكتب دالة أخرى $g(x)$ تمثل متوسط التكلفة لكل زجاجة مياه مُطلبية من x زجاجة مياه من شركة المعدات الخارجية.

$f(x) = \frac{125 + 5x}{x}, g(x) = \frac{200 + 3x}{x}$

b. مثّل الدالتين بيانيًا في الربع الأول.

c. اشرح ما يخبرك به التمثيل البياني عن تكاليف الشركتين.

إذا اشتريت أقل من 37 زجاجة مياه تقريبًا، فشركة الملحقات الرياضية أرخص.

وإذا اشتريت أكثر من 37 زجاجة مياه تقريبًا، فشركة المعدات الخارجية أرخص.

إستراتيجية خوض الاختبار

بالنسبة **للجزء 11**، سيجد الطلاب المسألة أبسط بكثير إذا أنشأوا جدولاً يبين المعدلات والمسافة والزمن لكل جزء من الرحلة. وبإمكان الطلاب استخدام المعلومات الواردة بالجدول لعمل معادلة يمكن حلها للتوصل إلى الإجابة.

تشخيص الأخطاء

الطلاب الذين يفشلون في تحديد الفجوة في الدالة الثانية **بالجزء 10** ربما يكونون قد بسّطوا الدالة إلى $y = x - 3$ فقط. ذكّرهم أنه يجب عليهم دائمًا التفكير في الدالة في ظل الصورة التي أعطيت عليها. وبما أن مقام الدالة هو $x + 5$، فإن الدالة غير معرّفة عند النقطة $x = -5$.

الطلاب الذين كانت إجابتهم على **الجزء 11** تساوي 2.25 ربما قد لا يكونون قاموا بحساب الجذر التربيعي كخطوة نهائية لإيجاد قيمة x. أشر إلى أنهم لو كانوا تحققوا من إجابتهم لوجدوا أن 2.25 إجابة غير صحيحة. يجب عليهم الرجوع والتحقق من الحل وإيجاد الخطأ.

العناوين

الجزء 11

[2] إجابة صحيحة مع كتابة حل دقيق وكامل

[1] إجابة صحيحة مع كتابة الحل جزئيًا، أو إجابة خاطئة استندت إلى خطأ صغير في الحسابات مع كتابة حل كامل

[0] لا توجد إجابة أو أن الإجابة وطريقة التفكير خاطئتان

الجزء 12

[3] المعادلات والتمثيل البياني وتفسير التمثيل البياني صحيح

[2] المعادلات صحيحة ولكن مع وجود خطأ بسيط في التمثيل البياني أو خطأ بسيط في تفسيره

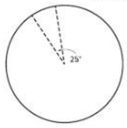
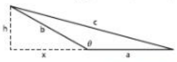
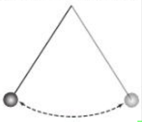
[1] المعادلات صحيحة ولكن التمثيل البياني وتفسيره خاطئان، أو أن المعادلات خاطئة ولكن التمثيل البياني وتفسيره صحيحان

[0] لا توجد إجابة أو أن الإجابة وطريقة التفكير خاطئتان

10 الهدف الأساسي من الوحدة

10 الدوال المثلثية

الهدف الأساسي من الوحدة هو التعرف على ما ستستكشفه في هذه الوحدة، والإجابة عن الأسئلة التمهيدية. وعندما تنتهي من كل درس، عُد إلى هذه الصفحات للتحقق من إجابتك.

الدروس المستفادة	السؤال التمهيدي
الدرس 10.2: الزوايا وقياس الزاوية	
فهم قياس الراديان لزاوية على أنه طول القوس على دائرة الوحدة الذي تحصره الزاوية.	على مدار فترة زمنية من 20 min، يتحرك قمر صناعي صانعًا زاوية بمقدار 25°.  $\frac{5\pi}{12}$ rad/hr
الدرس 10.6: الدوال المثلثية الدائرية والدورية	
تفسير كيف تمكن دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي من توسيع الدوال المثلثية لجميع الأعداد الحقيقية، وتفسيرها كقياس راديان للزوايا التي تتحرك باتجاه عكس عقارب الساعة حول دائرة الوحدة.	استخدم هذا الرسم التخطيطي لإيجاد قيمة x.  $x = h \cdot \cos(180° - \theta)$
الدرس 10.7: التمثيل البياني للدوال المثلثية	
اختيار الدالة المثلثية لتمثيل الظاهرة الدورية ذات السعة والتردد وخط المتوسط المحدد. تمثيل الدوال الأسية واللوغاريتمية بيانيًا مع توضيح التقاطعات مع المحاور والسلوك الطرفي، والدوال المثلثية مع توضيح الفترة والخط المتوسط والسعة. بالنسبة لدالة تمثل علاقة بين كميتين، تفسير الميزات الأساسية للرسوم البيانية والجداول من حيث الكميات، وتصميم رسومًا بيانية توضح الميزات الأساسية مع تقديم وصف لفظي للعلاقة.	يتحرك بندول حركة دورية متكررة يمكن تمثيلها بالدالة الدورية المبينة. كيف سيتم تمثيل A في الرسم التخطيطي؟  **نصف الحركة الأفقية للبندول**

استخدام دليل الطالب التفاعلي

يمكن استخدام *دليل الطالب التفاعلي* (ISG) إلى جانب *الرياضيات للصف العاشر المسار المتقدم.*

درس دليل الطالب التفاعلي	*الرياضيات للصف 10- المسار المتقدم*
10.2	الدرس 10-2
10.6	الدرس 10-6
10.7	الدرس 10-7
10.8	الدرس 10-8
10.9	الدرس 10-9

م.م.ر 4

نصيحة للتدريس

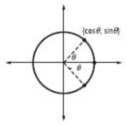
يقدّم السؤال التمهيدي للدرس 8.1 إلى الطلاب **م.م.ر 4 (استخدام نماذج الرياضيات)**. أشر إلى أن السرعة هي المسافة مقسومة على الزمن.

$$\text{السرعة} = \frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}}$$

المسافة في العادة عبارة عن قياس خط مستقيم. إلا أنه مع المسار الدائري، تكون مسافة القياس منحنية.

يعني قياس السرعة بالراديان في الساعة تحويل قياس الزاوية إلى قياس الراديان المقابل. كما أن فترة العشرين دقيقة تحتاج إلى تحويلها لساعات. نتائج التحليل البُعدي في هذا التعبير:

$$\frac{25°}{20\text{ min}} \cdot \left(\frac{2\pi}{360°}\right) \cdot \left(\frac{60\text{ min}}{\text{hr}}\right)$$

الدروس المستفادة	السؤال التمهيدي
الدرس 10.8: إزاحة التمثيلات البيانية للدوال المثلثية	
اختيار الدوال المثلثية لتمثيل الظاهرة الدورية ذات السعة والتردد وخط المتوسط المحدد. تمثيل الدوال الأسية واللوغاريتمية بيانيًا مع توضيح التقاطعات مع المحاور والسلوك الطرفي، والدوال المثلثية مع توضيح الفترة والخط المتوسط والسعة.	استخدم هذا الرسم التخطيطي الذي يوضح أن cosine هو دالة زوجية وأن sine هو دالة فردية.  $\cos(-\theta) = \cos\theta,\ \sin(-\theta) = -\sin\theta$
الدرس 10.9: النسب المثلثية العكسية	
تكوين معادلات ذات متغيرين أو أكثر لتمثيل العلاقات بين الكميات؛ وتمثيل هذه المعادلات بيانيًا على المحاور الإحداثية مع مراعاة التسميات والمقاييس.	افترض أن $f(x)$ دالة مثلثية. ما الذي تستنتجه بشأن التمثيل البياني لـ $f^{-1}(x)$؟ **منعكس في المستقيم $y = x$**

نصيحة للتدريس
م.م.ر 6

يمكن أن يمثل السؤال التمهيدي في الدرس 8.4 فرصة للتعرف على م.م.ر 7 (**محاولة إيجاد البنية واستخدامها**). ابدأ بتحديد الدوال الزوجية والفردية:

الدالة الزوجية: $f(-x) = f(x)$

الدالة الفردية: $f(-x) = -f(x)$

تَستخدم الدالة الفردية المحور الرأسي كخط تناظر. تتناظر الدالة الفردية بالنسبة إلى نقطة الأصل.

اجعل الطلاب الآن ينظروا إلى التمثيل البياني للنقطتين. اجعلهم يحددوا إحداثيات النقطة في الربع 4: $(\cos\theta, -\sin\theta)$. الزاوية المرتبطة بتلك النقاط هي $-\theta$. يؤدي هذا إلى المعادلات التالية:

$\cos(-\theta) = \cos(\theta) \Leftarrow$ دالة زوجية

$\sin(-\theta) = -\sin(\theta) \Leftarrow$ دالة فردية

نصيحة للتدريس
م.م.ر 2

يمكن أن يمثل السؤال التمهيدي في الدرس 8.7 فرصة للتعرف على م.م.ر 2 (**التفكير بطريقة تجريدية وكميّة**). ابدأ بإنشاء مثلث قائم الزاوية بأطوال الأضلاع a و b و c. اكتب معادلة نظرية فيثاغورس.

اطلب الآن من الطلاب أن يقسموا كلا الطرفين على الوتر.

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

في هذا الشكل. اطلب من الطلاب أن يربطوا النسب مع النسب المثلثية. يؤدي هذا إلى متطابقة فيثاغورس.

10.2 الزوايا وقياس الزاوية

المعايير

معايير الممارسات في الرياضيات:
1, 2, 3, 4, 6, 7, 8

المتطلبات الأساسية

- إيجاد محيط دائرة ومساحتها

مثال 1

نصيحة للتدريس

م.م.ر 8

لمساعدة الطلاب على التعميم، قد تحتاج إلى أن تجعلهم يضيفوا عمودًا إلى الجانب الأيمن لكل جدول. بالنسبة للجدول في **الجزء b**، قد يظهر في هذا العمود $m\angle AOB = x$ والطول المقابل لـ $\widehat{AB}\left(\frac{x\pi}{180}\right)$. بالنسبة للجدول في **الجزء d**، قد يعرض هذا العمود طول $\widehat{AB}$ على شكل x والقياس المقابل للزاوية $\angle AOB$ على شكل $\left(\frac{180x}{\pi}\right)$.

الأسئلة الداعمة

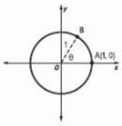
- ما قانون محيط الدائرة؟ $C = 2\pi r$
- كيف يمكنك استخدام الاستنتاج النسبي في **الجزء a**؟ $60°$ تمثل $\frac{1}{6}$ من دائرة. **إذًا طول القوس المطلوب يجب أن يكون $\frac{1}{6}$ من محيط الدائرة.**

10.2 الزوايا وقياس الزاوية

الأهداف

- فهم قياس الراديان لزاوية على أنه طول القوس على دائرة الوحدة الذي تحصره الزاوية.
- التحويل بين القياسات بالراديان والقياسات بالدرجات.
- استخدام قياس الراديان لحساب طول القوس.

دائرة الوحدة هي دائرة نصف قطرها 1 ومركزها عند نقطة الأصل بالمستوى الإحداثي. **الزاوية المركزية** لدائرة هي الزاوية التي تقع رأسها عند مركز الدائرة. وفي دائرة الوحدة المبينة إلى اليسار، $\angle AOB$ هي الزاوية المركزية التي تحصر $\widehat{AB}$.



مثال 1 تحليل الزوايا وأطوال القوس

الاستكشاف استكشف الرابط بين قياس الزاوية المركزية لدائرة وحدة وطول القوس الذي تحصره الزاوية.

a. **الحساب بدقة** افترض أن $m\angle AOB = 60$ في دائرة وحدة. فسر كيفية إيجاد طول $\widehat{AB}$. عبر عن الطول في صورة π.

محيط الدائرة هو $2\pi r$، ولكن الدائرة عبارة عن دائرة وحدة، إذًا $r = 1$. إذًا فإن المحيط يساوي 2π. وحيث إن $60°$ هو $\frac{60°}{360°} = \frac{1}{6}$ من الدائرة، فإن طول القوس $\widehat{AB}$ هو $\frac{1}{6}C = \frac{1}{6}(2\pi) = \frac{\pi}{3}$.

b. **إيجاد نمط** أكمل الجدول. عبر عن أطوال الأقواس في صورة π.

$\angle AOB$	10°	20°	30°	43°	87°
طول $\widehat{AB}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{43\pi}{180}$	$\frac{87\pi}{180}$

c. **الحساب بدقة** افترض أنك تعرف أن طول $\widehat{AB}$ هو $\frac{\pi}{2}$. اشرح كيفية إيجاد $m\angle AOB$.

افترض أن $m\angle AOB = x$، وطول $\widehat{AB}$ هو $\frac{x°}{360°}(2\pi r)$ أو $\frac{x°}{360°}(2\pi)$. أوجد حل $\frac{x°}{360°}(2\pi) = \frac{\pi}{2}$. بالحل بإيجاد x يبين أن $x = 90$، إذًا $m\angle AOB = 90$.

d. **إيجاد نمط** أكمل الجدول. اترك الإجابة في صورة π إذا لزم الأمر.

طول $\widehat{AB}$	$\frac{\pi}{20}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$	1
$\angle AOB$	9°	18°	36°	45°	$\left(\frac{180}{\pi}\right)°$

e. **وصف طريقة الحل** اذكر طريقة سريعة لإيجاد طول $\widehat{AB}$ إذا كنت تعرف قياس $m\angle AOB$.

الإجابة النموذجية: اضرب $m\angle AOB$ في $\frac{\pi}{180}$ لإيجاد طول $\widehat{AB}$.

f. **وصف طريقة الحل** اذكر طريقة سريعة لإيجاد قياس $m\angle AOB$ إذا كنت تعرف طول $\widehat{AB}$.

الإجابة النموذجية: اضرب طول $\widehat{AB}$ في $\frac{180}{\pi}$ لإيجاد قياس $m\angle AOB$.

معلومات أساسية رياضية

يقدم هذا الدرس قياس الراديان لزاوية على شكل طول القوس على دائرة الوحدة تقابله الزاوية. يقيس الطلاب الزوايا بالدرجات منذ سنوات وقد يتساءلون عن سبب الحاجة إلى نظام قياس آخر. ينبغي أن يفهموا أن قياس الراديان له عدة مزايا على قياس الدرجات، بما في ذلك حقيقة أن الراديان لا يتطلب رمز وحدة. بعبارة أخرى، يمكن اعتبار قياس الراديان لزاوية كنسبة من طول القوس على دائرة يقابله نصف قطر الدائرة. باعتبار قياس الراديان نسبة من طولين، فهو رقم بحت. وبما أن قياس الراديان عبارة عن كمية ليس لها أبعاد، فهو خيار طبيعي أكثر للاستخدام في التعابير الرياضية. يُستخدم الراديان بشكل شبه حصري في الرياضيات الأكثر تقدمًا وتعمل كل قوانين التفاضل والتكامل بقياس الراديان.

مثال 2

نصيحة للتدريس م.م.ر 7

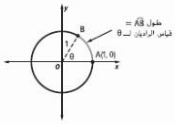
شجّع الطلاب على استخدام الأنماط والتناظر لمساعدتهم على التحقق من أنهم استكملوا الشكل بأسلوب صحيح. قد يلاحظ الطلاب مثلاً أن قياسات الراديان التي تقابل °60 و°120 و°240 كلها كسور بالمقام 3. عندما يجد الطلاب قياس الراديان للدرجة °300، ينبغي أن يتوقعوا أن هذا القياس سيتوافق مع النمط. إذا حصلوا على إجابة غير صحيحة مثل $\frac{5\pi}{7}$، ينبغي أن ينبههم الانقطاع في النمط إلى أنهم ربما يكونون قد ارتكبوا خطأ.

الأسئلة الداعمة

ما الذي يجب أن ينطبق على كل قياسات الراديان في النصف العلوي للشكل؟ وفي النصف السفلي للشكل؟ **في النصف العلوي للشكل، يجب أن تقع كل القياسات بين 0 و π؛ في النصف السفلي، يجب أن تقع جميعًا بين π و 2π.**

كيف يمكنك التوصل إلى قياس الراديان الذي يقابل °270 بدون استخدام عامل تحويل؟ **الإجابة النموذجية: °270 هي $\frac{3}{4}$ من المسافة حول الدائرة و $\frac{3}{4}(2\pi) = \frac{3\pi}{2}$.**

أثناء الاستكشاف، قد تلاحظ رابطًا بين قياس درجة الزاوية المركزية وطول القوس الذي تحصره الزاوية. ويمكنك استخدام هذه العلاقة لتعريف قياس الراديان. **فقياس الراديان** لزاوية هو طول القوس الموجود على دائرة الوحدة والذي تحصره هذه الزاوية.



المفهوم الأساسي **التحويل بين الدرجات والراديان**

استخدم نتائجك من الاستكشاف السابق لتساعدك على إكمال كل مما يلي.

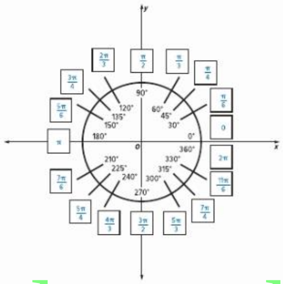
درجات إلى راديان	راديان إلى درجات
للتحويل من درجات إلى راديان، اضرب قياس الزاوية بالدرجات في $\frac{\pi}{180°}$.	للتحويل من راديان إلى درجات، اضرب قياس الزاوية بالراديان في $\frac{180°}{\pi}$.

مثال 2 **التحويل بين الدرجات والراديان**

يكون من المفيد معرفة قياس بعض الزوايا المعينة بكل من الدرجات والراديان. استخدم عوامل التحويل و/أو الاستنتاج المنطقي التناسبي لإكمال ما يلي.

a. **التفكير بطريقة تجريدية** ما القياس بالدرجات الذي يقابل قياسًا بالراديان مقداره 2π؟ ولماذا يكون ذلك منطقيًا؟ **°360؛ يبلغ مقدار محيط دائرة الوحدة 2π؛ إذًا إذا كانت الزاوية المركزية تحصر قوسًا طوله 2π، فإن الدائرة المركزية تحصر دائرة بأكملها. إذًا قياس الزاوية يساوي °360.**

b. **الحساب بدقة** أكمل الشكل المبين إلى اليسار بكتابة قياس كل زاوية بالراديان؟



c. **إيجاد نمط** اذكر نمطًا واحدًا على الأقل أو تناظرًا لاحظته في الشكل المكمل. **الإجابة النموذجية: إذا كنت تتحرك حول الدائرة بزيادات بمقدار °45، يزيد قياس الراديان بمقدار $\frac{\pi}{4}$، مما ينتج عنه النمط 0 و $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{4\pi}{4} = \pi$ و $\frac{5\pi}{4}$ و $\frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$ و $\frac{7\pi}{4}$ و $\frac{8\pi}{4} = 2\pi$.**

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

م.م.ر 7 (محاولة إيجاد البنية واستخدامها) يصف كيف يستنبط الطلاب الماهرون رياضيًا "نمطًا أو بنية". وهم يعملون على **المثال 2**، قد يدرك الطلاب البنية الأساسية التي تقف وراء كل العمل بالدرجات والراديان. بصفة محددة، بمجرد أن يفهم الطلاب أن °360 تقابل 2π راديان، يستطيعون إجراء تحويلات باستخدام الاستنتاج النسبي لتدريج هذه العلاقة لأعلى وأسفل. على سبيل المثال، لتحويل °45 إلى راديانات، قد يستنتج الطلاب أن °45 هي $\frac{1}{8}$ من °360. ولهذا يجب أن يكون قياس الراديان $\frac{1}{8}$ لـ 2π، وهو $\frac{2\pi}{8}$ أو $\frac{\pi}{4}$. ولهذا فإن الطلاب الذين قد يجدون صعوبة في تذكر عوامل التحويل في مربع المفهوم الأساسي، قد يجدون أنه من الأسهل تذكر علاقة واحدة أساسية؛ °360 تقابل 2π راديان.

مثال 3

نصيحة للتدريس
م.م.ر 8

أوضح للطلاب أن القانون في **الجزء c** يمكن أيضًا كتابته بالشكل $\theta = \frac{s}{r}$. هذا الشكل مفيد لأنه يقول إن قياس الراديان هو نسبة طول القوس إلى نصف القطر.

الأسئلة الداعمة

- ما كسر الدائرة الكاملة $\widehat{AB}$؟ $\frac{m}{360}$
- ما التعبير الذي يمثل محيط الدائرة الكاملة؟ $2\pi r$
- في **الجزء c**، ما الذي يخبرك به قانونك عندما تكون $r = 1$؟ لماذا يبدو هذا منطقيًا؟ **عندما تكون $r = 1, s = \theta$. يعني هذا أن طول القوس هو قياس الراديان للزاوية المركزية، وهو أمر منطقي لأن هذا هو تعريف قياس الراديان للزاوية.**

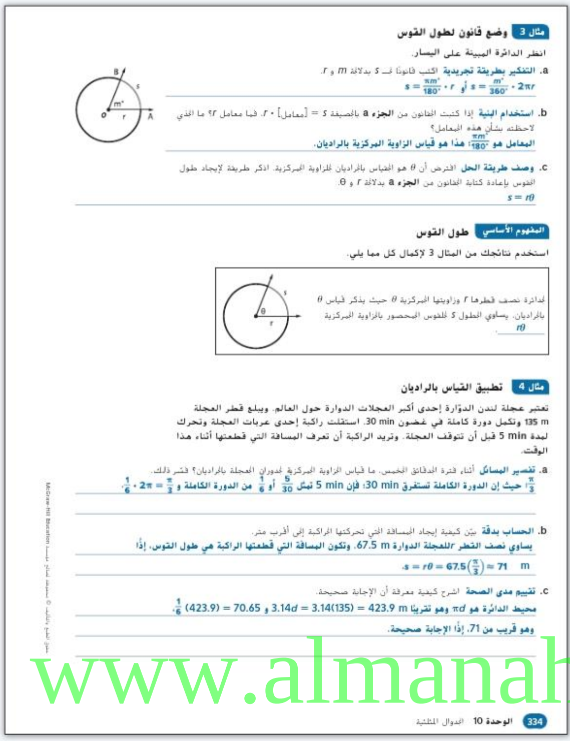
مثال 4

نصيحة للتدريس
م.م.ر 1

قد يكون من المفيد للطلاب أن يوضحوا خطوات حل المسألة قبل أن يبدؤوا في تفاصيل عملية الحل؛ على سبيل المثال: (1) تحديد كسر دوران كامل يصنعه الراكب؛ (2) التوصل إلى قياس الراديان للزاوية المركزية؛ (3) التوصل إلى نصف القطر؛ (4) استخدام القانون $s = r\theta$.

الأسئلة الداعمة

- كيف يمكنك التوصل إلى كسر الدوران الكامل الذي يقوم به الراكب؟ **أقسِمْ زمن تحرك الراكب على الزمن المطلوب لدوران كامل.**
- ما المحيط التقريبي للعجلة؟ **$C \approx 3 \cdot 135 = 405$ m**



مثال 3 وضع قانون لطول القوس

انظر الدائرة المبينة على اليسار.

a. **التفكير بطريقة تجريدية** اكتب قانونًا لـ s بدلالة m و r.
$s = \frac{\pi m^\circ}{180^\circ} \cdot r$ أو $s = \frac{m^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r$

b. **استخدام البنية** إذا كتبت القانون من **الجزء a** بالصيغة s = [معامل] $\cdot r$. فما معامل r؟ ما الذي لاحظته بشأن هذه المعامل؟
المعامل هو $\frac{\pi m^\circ}{180^\circ}$؛ هذا هو قياس الزاوية المركزية بالراديان.

c. **وصف طريقة الحل** افترض أن θ هو القياس بالراديان للزاوية المركزية. اذكر طريقة لإيجاد طول القوس بإعادة كتابة القانون من **الجزء a** بدلالة r و θ.
$s = r\theta$

المفهوم الأساسي طول القوس

استخدم نتائجك من المثال 3 لإكمال كل مما يلي.

لدائرة نصف قطرها r وزاويتها المركزية θ حيث يذكر قياس θ بالراديان، يساوي الطول s للقوس المحصور بالزاوية المركزية $r\theta$.

مثال 4 تطبيق القياس بالراديان

تعتبر عجلة لندن الدوّارة إحدى أكبر العجلات الدوارة حول العالم. ويبلغ قطر العجلة 135 m وتكمل دورة كاملة في غضون 30 min. استقلت راكبة إحدى عربات العجلة وتحرك لمدة 5 min قبل أن تتوقف العجلة. وتريد الراكبة أن تعرف المسافة التي قطعتها أثناء هذا الوقت.

a. **تفسير المسائل** أثناء فترة الدقائق الخمس، ما قياس الزاوية المركزية لدوران العجلة بالراديان؟ فسّر ذلك.
$\frac{\pi}{3}$؛ حيث إن الدورة الكاملة تستغرق 30 min؛ فإن 5 min تمثل $\frac{5}{30}$ أو $\frac{1}{6}$ من الدورة الكاملة و $\frac{1}{6} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{3}$.

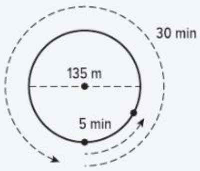
b. **الحساب بدقة** بيّن كيفية إيجاد المسافة التي تحركتها الراكبة إلى أقرب متر.
يساوي نصف القطر r للعجلة الدوارة 67.5 m. وتكون المسافة التي قطعتها الراكبة هي طول القوس. إذًا $s = r\theta = 67.5\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 71$ m.

c. **تقييم مدى الصحة** اشرح كيفية معرفة أن الإجابة صحيحة.
محيط الدائرة هو πd وهو تقريبًا $3.14d = 3.14(135) = 423.9$ m و $\frac{1}{6}(423.9) = 70.65$، وهو قريب من 71. إذًا الإجابة صحيحة.

334 الوحدة 10 الدوال المثلثية

التدريس المتمايز

قد يجد المتعلمون بالوسائل البصرية أن السبيل الأسهل لفهم **المثال 4** هو أن يبدؤوا بإنشاء مخطط للموقف. لا يجب أن تكون مخططات الطلاب دقيقة تمامًا. لكنها ينبغي أن تضم المعلومات الأساسية المذكورة. تظهر عينة بالأدنى.



تدريب

في **التمارين 1-8**، يُحوّل الطلاب بين الدرجات والراديان باستخدام تعريف قياس الراديان لزاوية ليمثل طول القوس على دائرة الوحدة المقابلة للزاوية.

التمارين 9-14 تطلب من الطلاب استخدام العلاقة بين الزاوية المركزية، وطول القوس، ونصف القطر في سياقات الحياة اليومية لحل المسائل.

عرض المعايير

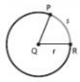
تمرين	م.م.ر
1-9	6
10	2
11	4
12	3
13	6
14	2

تدريب

الحساب بدقة حوّل كل قياس بالدرجة إلى القياس المكافئ له بالراديان. وحوّل كل قياس بالراديان إلى القياس المكافئ له بالدرجات.

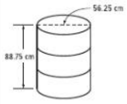
1. $25°$ — $\frac{5\pi}{36}$
2. $200°$ — $\frac{10\pi}{9}$
3. $-12°$ — $-\frac{\pi}{15}$
4. $-117°$ — $-\frac{117\pi}{180}$
5. $\frac{\pi}{40}$ — $4.5°$
6. $-\frac{8\pi}{9}$ — $-160°$
7. 2 — $\left(\frac{360}{\pi}\right)°$
8. -3π — $-540°$

9. **الحساب بدقة** فطيرة بيتزا دائرية قطرها 18 cm قطّعت إلى 8 شرائح متطابقة. ما قياس الزاوية المركزية لكل شريحة بالراديان؟ فسر ذلك.
$\frac{\pi}{4}$؛ تساوي كل شريحة $\frac{1}{8}$ من فطيرة البيتزا و $\frac{1}{8}(2\pi) = \frac{\pi}{4}$



10. **التفكير بطريقة تجريدية** في الشكل، $r = s$. ما قياس $m\angle PQR$ بالراديان؟ ما قياس الزاوية إلى أقرب جزء من عشرة من الدرجة؟
$1; 57.3°$

11. **استخدام النماذج** يلف أحمد شريط قياس طوله 75 cm حول محيط برميل نفط. ولكنه وجد أنه لا يلتف بالكامل حول البرميل. ما قياس القوس الذي يحدده شريط القياس بالراديان؟
$\frac{8}{3}$



12. **التعليق على طريقة الاستنتاج** آلة رش للعشب تنتج تيارًا من الماء يصل 6 m من رأس آلة الرش. وتدور الآلة قاطعة جزءًا من دائرة. وتساوي مساحة العشب الذي يروى ذهابًا وإيابًا $12\pi\ m^2$. وتقول أميمة إنه يمكن تحديد قياس الزاوية التي تتحركها آلة الرش بالراديان. وتقول سلمى إنه لا توجد معلومات كافية لتحديد هذا. أيهما على صواب؟ برر إجابتك.
أميمة على صواب؛ مساحة الدائرة بأكملها هي $\pi r^2 = \pi(15)^2 = 225\pi\ m^2$.
حيث إن المساحة التي تُروى بآلة الرش هي $75\pi\ ft\ m^2$، فهذه المساحة تساوي
$\frac{1}{3} = \frac{75\pi}{36\pi}$ من الدائرة. إذًا قياس الزاوية المركزية هو $\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{3}(2\pi)$.

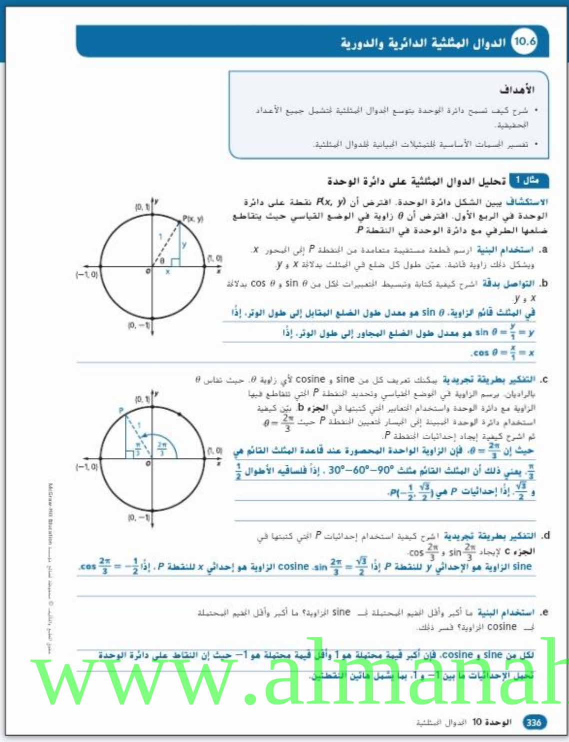
13. **التواصل بدقة** دائرة C نصف قطرها 5 cm. وتمثل الدالة $f(x)$ طول بالسنتيمترات لقوس الدائرة C المحصور بالزاوية المركزية ذات x راديان. صف التمثيل البياني لـ $f(x)$ بأكثر دقة ممكنة وفسر إجابتك.
حيث إن $s = r\theta$ و $r = 5$، يمكن كتابة الدالة في الصورة $f(x) = 5x$. يعني ذلك أن التمثيل البياني عبارة عن مستقيم ميله 5 يمر من نقطة الأصل.

14. **التفكير بطريقة تجريدية** في الشكل، $r = 2s$. ما قياس $m\angle PQR$ بالراديان؟ ما قياس الزاوية إلى أقرب جزء من عشرة من الدرجة؟
$\frac{1}{2}; 28.6°$

أخطاء شائعة

في **التمرين 11**، قد يستخدم بعض الطلاب قطر إسطوانة الزيت بدلاً من نصف قطرها عندما يحسبون قياس الزاوية المركزية. الطلاب الذين يقعون في هذا الخطأ من المرجح أن يحصلوا على الإجابة $\frac{4}{3}$ راديان. لمساعدة الطلاب على فهم خطئهم، قد تحتاج إلى أن تجعلهم يكتبون القانون $s = r\theta$ بالشكل $\theta = \frac{s}{r}$. قد يؤدي هذا إلى توضيح أن النسبة المطلوبة تقارن طول القوس بنصف القطر.

10.6 الدوال المثلثية الدائرية والدورية



10.6 الدوال المثلثية الدائرية والدورية

الأهداف

- شرح كيف تسمح دائرة الوحدة بتوسع الدوال المثلثية لتشمل جميع الأعداد الحقيقية.
- تفسير السمات الأساسية للتمثيلات البيانية للدوال المثلثية.

مثال 1 تحليل الدوال المثلثية على دائرة الوحدة

الاستكشاف يبين الشكل دائرة الوحدة. افترض أن $P(x, y)$ نقطة على دائرة الوحدة في الربع الأول. افترض أن θ زاوية في الوضع القياسي حيث يتقاطع ضلعها الطرفي مع دائرة الوحدة في النقطة P.

a. **استخدام البنية** ارسم قطعة مستقيمة متعامدة من النقطة P إلى المحور x. ويشكل ذلك زاوية قائمة. عيّن طول كل ضلع في المثلث بدلالة x و y.

b. **التواصل بدقة** اشرح كيفية كتابة وتبسيط التعبيرات لكل من $\sin\theta$ و $\cos\theta$ بدلالة x و y.

في المثلث قائم الزاوية، $\sin\theta$ هو معدل طول الضلع المقابل إلى طول الوتر. إذًا $\sin\theta = \frac{y}{1} = y$ هو معدل طول الضلع المجاور إلى طول الوتر. إذًا $\cos\theta = \frac{x}{1} = x$.

c. **التفكير بطريقة تجريدية** يمكنك تعريف كل من sine و cosine لأي زاوية θ. حيث تقاس θ بالراديان. برسم الزاوية في الوضع القياسي وتحديد النقطة P التي تتقاطع فيها الزاوية مع دائرة الوحدة واستخدام التعابير التي كتبتها في **الجزء b**. بيّن كيفية استخدام دائرة الوحدة المبينة إلى اليسار لتعيين النقطة P حيث $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ثم اشرح كيفية إيجاد إحداثيات النقطة P.

حيث إن $\theta = \frac{2\pi}{3}$، فإن الزاوية الواحدة المحصورة عند قاعدة المثلث القائم هي $\frac{\pi}{3}$. يعني ذلك أن المثلث القائم مثلث $30°-60°-90°$. إذاً فلساقيه الأطوال $\frac{1}{2}$ و $\frac{\sqrt{3}}{2}$. إذًا إحداثيات P هي $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

d. **التفكير بطريقة تجريدية** اشرح كيفية استخدام إحداثيات P التي كتبتها في **الجزء c** لإيجاد $\sin\frac{2\pi}{3}$ و $\cos\frac{2\pi}{3}$.

sine الزاوية هو الإحداثي y للنقطة P إذًا $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. cosine الزاوية هو إحداثي x للنقطة P. إذًا $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

e. **استخدام البنية** ما أكبر وأقل القيم المحتملة لـ sine الزاوية؟ ما أكبر وأقل القيم المحتملة لـ cosine الزاوية؟ فسر ذلك.

لكل من sine و cosine، فإن أكبر قيمة محتملة هو 1 وأقل قيمة محتملة هو -1 حيث إن النقاط على دائرة الوحدة تحمل الإحداثيات ما بين -1 و 1، بما يشمل هاتين النقطتين.

336 الوحدة 10 الدوال المثلثية

المعايير

معايير الممارسات في الرياضيات:
2, 4, 6, 7

المتطلبات الأساسية

- إيجاد أطوال الأضلاع في مثلثات قائمة خاصة
- تحديد القياس بالراديان
- استخدام حساب المثلثات مع الزاوية القائمة

مثال 1

نصيحة للتدريس م.م.ر 2

في **الجزء c**، احرص على أن يفهم الطلاب أن المثلث قائم الزاوية الذي يرسمونه ستكون له زاوية بطول المحور الأفقي x بقياس $\frac{\pi}{3}$ راديان لأن هذه الزاوية يجب أن تتكامل مع θ.

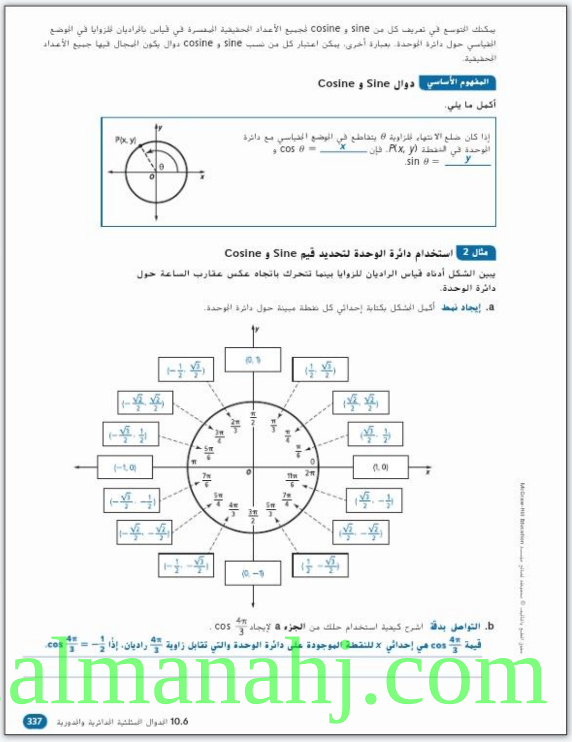
الأسئلة الداعمة

- في **الجزء c**، ما المعطيات التي تعرفها عن الإحداثيات قبل إجراء أي حسابات؟ **يقع الإحداثي x بين -1 و 0؛ يقع الإحداثي y بين 0 و 1.**
- كيف يمكنك التحقق من صحة إجاباتك في **الجزء d**؟ **أستخدم حاسبة للتوصل إلى القيم.**

معلومات أساسية رياضية

تعامل الطلاب حتى الآن مع الدوال المثلثية حصرًا كنسب مثلثية. أي أنه كان يتم تعريف sine و cosine و tangent كنسب من أطوال الأضلاع في مثلث قائمة الزاوية. ولذلك فلم يتم تعريفها إلا للزاويتين الحادتين في المثلث قائم الزاوية. في هذا الدرس، يتم توسيع فرضيتي الدالتين sine و cosine لتشملا كل الأعداد الحقيقية.

لاحظ أن الدالتين $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ بينهما الكثير من التشابهات. فترة كلتا الدالتين هي 2π، وكلتا الدالتين لهما قيمة عظمى تبلغ 1 وقيمة صغرى تبلغ -1. الحقيقة أن التمثيلين البيانيين للدالتين متطابقان باستثناء إزاحة أفقية لأن $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = x$. سوف يتحقق الطلاب من هذه العلاقة بتفصيل أكبر في الدرس 10.4.


يمكنك التوسع في تعريف كل من sine و cosine لجميع الأعداد الحقيقية المفسرة في قياس بالراديان للزوايا في الوضع القياسي حول دائرة الوحدة. بعبارة أخرى، يمكن اعتبار كل من نسب sine و cosine دوال يكون المجال فيها جميع الأعداد الحقيقية.

المفهوم الأساسي دوال Sine و Cosine

أكمل ما يلي.

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ يتقاطع في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة في النقطة $P(x, y)$، فإن $\cos\theta = x$ و $\sin\theta = y$.

مثال 2 استخدام دائرة الوحدة لتحديد قيم Sine و Cosine

يبين الشكل أدناه قياس الراديان للزوايا بينما تتحرك باتجاه عكس عقارب الساعة حول دائرة الوحدة.

a. **إيجاد نمط** أكمل الشكل بكتابة إحداثيي كل نقطة مبينة حول دائرة الوحدة.

b. **التواصل بدقة** اشرح كيفية استخدام حلك من **الجزء a** لإيجاد $\cos\frac{4\pi}{3}$.

قيمة $\cos\frac{4\pi}{3}$ هي إحداثي x للنقطة الموجودة على دائرة الوحدة والتي تقابل زاوية $\frac{4\pi}{3}$ راديان. إذًا $\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

337 10.6 الدوال المثلثية الدائرية والدورية

مثال 2

نصيحة للتدريس م.م.ر 7

قد يبدو حساب إحداثيات النقاط المطلوبة في **المثال 2** صعبًا على الطلاب، لكن ذكّرهم بأنهم ينبغي أن يبحثوا عن الأنماط والتناظرات ويستخدموها في عملهم. سيجد الطلاب مثلاً أن إحداثيات النقاط الثلاث في كل ربع في المسطح واحدة باستثناء الاختلافات المحتملة في إشارات الإحداثيات.

الأسئلة الداعمة

- كيف تتوصل إلى إحداثيات نقطة على دائرة وحدة تقابل زاوية بالقياس $\frac{\pi}{6}$ راديان؟ **أرسمُ نصف قطر بالطول 1 من نقطة الأصل إلى النقطة وعموديًا على قطعة مستقيمة من النقطة إلى المحور الأفقي x. يشكل هذا مثلثًا قائم الزاوية. ثم أستخدمُ العلاقات بين أطوال الأضلاع في مثلث قائمة الزاوية بقياس 30°—60°—90°.**
- افترض أنك تعكس الشكل على المحور الرأسي y. ما الذي يجب أن يكون حقيقيًا بشأن إحداثيات أزواج النقاط التي تمثل صورًا لبعضها البعض؟ **إحداثياتها على المحور الأفقي x متقابلة وإحداثياتها على المحور الرأسي y متشابهة.**

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

م.م.ر 7 **(محاولة إيجاد البنية واستخدامها)** تشرح كيف ينبغي أن يتمكن الطلاب من "التراجع لإلقاء نظرة عامة وتغيير المنظور". تفيد هذه المهارة خصيصًا في **المثال 2**، لأن بعض الطلاب قد يجدون أنفسهم مرتبكين وسط تفاصيل حساب الإحداثيات. شجّع هؤلاء الطلاب على التراجع والتفكير في العلاقات التي يمكن أن تساعدهم على ملء المعلومات المطلوبة. يمكن للطلاب مثلاً أن يدركوا أن النقاط المقابلة للزوايا بقياس $\frac{\pi}{4}$ راديان و $\frac{5\pi}{4}$ راديان تقع على المستقيم $x = y$، ولذلك فإن إحداثيات x و y لهذه النقاط يجب أن تكون واحدة. قد يدرك طلاب آخرون أن كل النقاط على الدائرة تمثل حلولاً للمعادلة $x^2 + y^2 = 1$ ويستخدمون هذه العلاقة للتوصل إلى الإحداثيات و/أو التحقق من صحة الإحداثيات.

مثال 3

نصيحة للتدريس   م.م.ر 4

من الأجزاء المهمة في عملية وضع النماذج في **م.م.ر 4** التنقل بين التمثيلات المختلفة لمسألة، مثل الوصف اللفظي والتمثيل البياني والمعادلة والجدول. قد تحتاج إلى اقتراح أن يمثل الطلاب الدالة بيانيًا في **الجزء b** عن طريق عمل جدول للقيم أولاً. إذا توسع الطلاب في جدولهم بما يكفي، فسيرون دورة من تكرار قيم y التي تعكس السلوك الدوري الذي سيرونه في تمثيلهم البياني.

الأسئلة الداعمة

- ما القيم العظمى والصغرى للدالة؟ ولماذا يبدو هذا منطقيًا؟ **1 و 1-؛ يمكن أن يصل ارتفاع P إلى متر واحد (متر واحد فوق سطح الماء) أو 1- متر واحد (متر واحد تحت سطح الماء).**
- لماذا يبدو منطقيًا في سياق المسألة أن يبدأ التمثيل البياني عند نقطة الأصل؟ عندما **يبلغ قياس الزاوية 0 راديان والعجلة لم تدر بعد، إذًا P تقع عند سطح الماء وارتفاعها 0.**

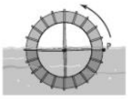
c. **استخدام البنية** ما قيمة $\sin \frac{13\pi}{6}$؟ فسّر ذلك.

النقطة على دائرة الواحدة التي تقابل $\frac{13\pi}{6}$ هي نفس النقطة التي تقابل $\frac{\pi}{6}$، لأن الدورة تتكرر كل 2π راديان. إذًا، $\sin \frac{13\pi}{6}$ هو إحداثي y للنقطة التي تقابل $\frac{\pi}{6}$. إذًا $\sin \frac{13\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

d. **إيجاد نمط** ما الذي يمكنك استنتاجه بشأن sine و cosine الزاوية الأكبر من π راديان وأقل من $\frac{3\pi}{2}$ راديان؟ فسّر ذلك.

كل من sine و cosine سالبان حيث إن الأضلاع الطرفية للزوايا تقع في الربع الثالث وإحداثيات النقطة على دائرة الوحدة سالبة.

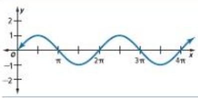
مثال 3 التمثيل البياني لدالة مثلثية



يبلغ نصف قطر العجلة الدوارة في حديقة الألعاب المائية 1m، كما هو مبين. وتبدأ النقطة P التي تقع على حافة العجلة الدوارة عند سطح الماء. وتمثل الدالة $f(x) = \sin x$ ارتفاع P أعلى أو أدنى سطح الماء بينما تدور العجلة الدوارة عبر زاوية x راديان.

a. **التفكير بطريقة كمية** كم تبعد المسافة التي تتحركها النقطة P بينما تدور العجلة الدوارة في زاوية $\frac{3\pi}{4}$ راديان؟ فسّر ذلك.

تتحرك النقطة $\frac{3\pi}{4}$ m حيث إن قياس الراديان للزاوية هو طول القوس المحصور بالزاوية على دائرة الوحدة.



b. **الحساب بدقة** مثّل $f(x) = \sin x$ بيانيًا على المستوى الإحداثي المبين على اليسار.

c. **استخدام النماذج** ما فترة الدالة؟ اشرح كيف يمكنك معرفة ذلك واشرح كيف تبين الفترة في التمثيل البياني. ما الذي تخبرك به الفترة عن النقطة P؟

الفترة هي 2π حيث إن قيم الدالة تتكرر كل 2π راديان. ويُبين هذا في التمثيل البياني عندما يتكرر شكل المنحنى من 0 إلى 2π من 2π إلى 4π. وتتكرر ارتفاعات P أعلى أو أدنى سطح الماء مرة بينما تكمل العجلة الدوارة دورة كاملة (2π راديان).

d. **استخدام النماذج** ما التقاطعات مع المحور x؟ وما الذي تمثله؟

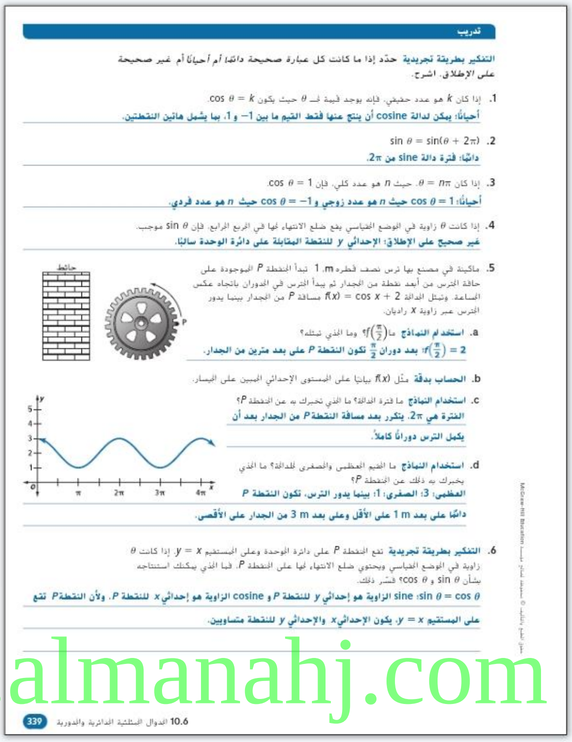
التقاطعات مع x هي مضاعفات الأعداد الحقيقية لـ π، وهي زوايا الدوران التي تكون فيها النقطة P على سطح الماء.

e. **استخدام النماذج** حدد الفترة التي تكون فيها الدالة متناقصة. وما الذي يمثله ذلك؟

الإجابة النموذجية: $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$؛ حيث تدور العجلة الدوارة بزاوية من $\frac{\pi}{2}$ راديان إلى $\frac{3\pi}{2}$ راديان، تتحرك P لأسفل.

التدريس المتمايز

في **الجزء a** من **المثال 3**، قد يدرك بعض الطلاب أن عجلة الماء هي دائرة وحدة ومن ثم يتمكنون من الإجابة على السؤال باستخدام تعريف دائرة الوحدة لقياس الراديان. أوضح للطلاب أنه يمكن اتباع أساليب أخرى. قد يرتاح بعض الطلاب – مثلاً – أكثر لاستخدام قانون ما. يستطيع هؤلاء الطلاب أن يحلوا المسألة باستخدام القانون $s = r\theta$، حيث s هي طول القوس، و r هي نصف القطر و θ هي قياس الراديان للزاوية المركزية. في هذه المسألة، $r = 1$. إذًا يتم تبسيط القانون إلى $s = \theta$.



تدريب

التفكير بطريقة تجريدية حدّد إذا ما كانت كل عبارة صحيحة *دائمًا* أم *أحيانًا* أم *غير صحيحة على الإطلاق*. اشرح.

1. إذا كان k هو عدد حقيقي، فإنه يوجد قيمة لـ θ حيث يكون $\cos \theta = k$.
أحيانًا؛ يمكن لدالة cosine أن ينتج عنها فقط القيم ما بين -1 و 1، بما يشمل هاتين النقطتين.

2. $\sin \theta = \sin(\theta + 2\pi)$
دائمًا؛ فترة دالة sine من 2π.

3. إذا كان $\theta = n\pi$، حيث n هو عدد كلي، فإن $\cos \theta = 1$.
أحيانًا؛ $\cos \theta = 1$ حيث n هو عدد زوجي و $\cos \theta = -1$ حيث n هو عدد فردي.

4. إذا كانت θ زاوية في الوضع القياسي يقع ضلع الانتهاء لها في الربع الرابع، فإن $\sin \theta$ موجب.
غير صحيح على الإطلاق؛ الإحداثي y للنقطة المقابلة على دائرة الوحدة سالبًا.

5. ماكينة في مصنع بها ترس نصف قطره $1\ m$. تبدأ النقطة P الموجودة على حافة الترس من أبعد نقطة من الجدار ثم يبدأ الترس في الدوران باتجاه عكس الساعة. وتمثل الدالة $f(x) = \cos x + 2$ مسافة P من الجدار بينما يدور الترس عبر زاوية x راديان.

a. **استخدام النماذج** ما $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$؟ وما الذي تمثله؟
$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$؛ بعد دوران $\frac{\pi}{2}$ تكون النقطة P على بعد مترين من الجدار.

b. **الحساب بدقة** مثّل $f(x)$ بيانيًا على المستوى الإحداثي المبين على اليسار.

c. **استخدام النماذج** ما فترة الدالة؟ ما الذي تخبرك به عن النقطة P؟
الفترة هي 2π. يتكرر بعد مسافة النقطة P من الجدار بعد أن يكمل الترس دورانًا كاملاً.

d. **استخدام النماذج** ما القيم العظمى والصغرى للدالة؟ ما الذي يخبرك به ذلك عن النقطة P؟
العظمى: 3؛ الصغرى: 1؛ بينما يدور الترس، تكون النقطة P دائمًا على بعد $1\ m$ على الأقل وعلى بعد $3\ m$ من الجدار على الأقصى.

6. **التفكير بطريقة تجريدية** تقع النقطة P على دائرة الوحدة وعلى المستقيم $y = x$. إذا كانت θ زاوية في الوضع القياسي ويحتوي ضلع الانتهاء لها على النقطة P، فما الذي يمكنك استنتاجه بشأن $\sin \theta$ و $\cos \theta$؟ فسّر ذلك.
$\sin \theta = \cos \theta$؛ sine الزاوية هو إحداثي y للنقطة P و cosine الزاوية هو إحداثي x للنقطة P. ولأن النقطة P تقع على المستقيم $y = x$، يكون الإحداثي x والإحداثي y للنقطة متساويين.

أخطاء شائعة

في **التمرين 3**، قد يتحقق بعض الطلاب من قيمة أو اثنتين من قيم n ويستنتجون أن العبارة صحيحة دائمًا أو لا تصح أبدًا. أوضح أن الطلاب ينبغي أن يتحققوا من كل من القيم الفردية والزوجية لـ n. كما أنه من المفيد التفكير في عمل تمثيل بياني لـ $f(x) = \cos x$. سيتمكن الطلاب الذين يرسمون التمثيل البياني من رؤية أن قيمة $f(x)$ تتبدل بين 1 و -1 مع تزايد x من 0 إلى π إلى 2π إلى 3π، وهكذا.

تدريب

تتطلب **التمارين 1–4** من الطلاب أن يفكروا بعناية في الطريقة التي تتيح بها دائرة الوحدة إمكانية توسيع الدوال المثلثية لتشمل كل الأعداد الحقيقية.

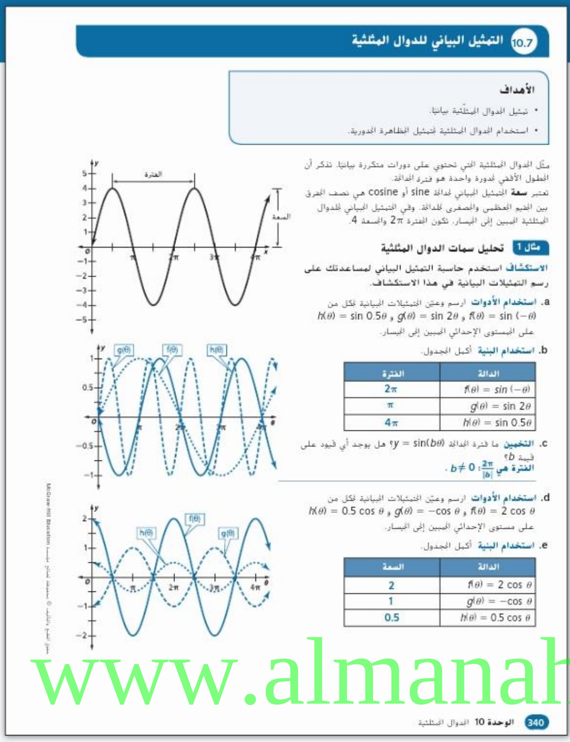
التمرين 5 عبارة عن مسألة وضع نماذج يتعرف فيها الطلاب على التوسع في الدوال المثلثية لتشمل كل الأعداد الحقيقية.

التمرين 6 عبارة عن مسألة استنتاج من مستوى أعلى بشأن الطريقة التي تتيح بها دائرة الوحدة إمكانية توسيع الدوال المثلثية لتشمل كل الأعداد الحقيقية.

عرض المعايير

تمرين	م.م.ر
1–4	2
5	4, 6
6	2

10.7 التمثيل البياني للدوال المثلثية


10.7 التمثيل البياني للدوال المثلثية

الأهداف
- تمثيل الدوال المثلّثية بيانيًا.
- استخدام الدوال المثلثية لتمثيل الظاهرة الدورية.

مثّل الدوال المثلثية التي تحتوي على دورات متكررة بيانيًا. تذكر أن الطول الأفقي لدورة واحدة هو فترة الدالة.
تعتبر **سعة** التمثيل البياني لدالة sine أو cosine هي نصف الفرق بين القيم العظمى والصغرى للدالة. وفي التمثيل البياني للدوال المثلثية المبين إلى اليسار، تكون الفترة 2π والسعة 4.

مثال 1 تحليل سمات الدوال المثلثية

الاستكشاف استخدم حاسبة التمثيل البياني لمساعدتك على رسم التمثيلات البيانية في هذا الاستكشاف.

a. **استخدام الأدوات** ارسم وعيّن التمثيلات البيانية لكل من $f(\theta) = \sin(-\theta)$ و $g(\theta) = \sin 2\theta$ و $h(\theta) = \sin 0.5\theta$ على المستوى الإحداثي المبين إلى اليسار.

b. **استخدام البنية** أكمل الجدول.

الدالة	الفترة
$f(\theta) = \sin(-\theta)$	2π
$g(\theta) = \sin 2\theta$	π
$h(\theta) = \sin 0.5\theta$	4π

c. **التخمين** ما فترة الدالة $y = \sin(b\theta)$؟ هل يوجد أي قيود على قيمة b؟
الفترة هي $\frac{2\pi}{|b|}$؛ $b \neq 0$.

d. **استخدام الأدوات** ارسم وعيّن التمثيلات البيانية لكل من $f(\theta) = 2\cos\theta$ و $g(\theta) = -\cos\theta$ و $h(\theta) = 0.5\cos\theta$ على مستوى الإحداثي المبين إلى اليسار.

e. **استخدام البنية** أكمل الجدول.

الدالة	السعة
$f(\theta) = 2\cos\theta$	2
$g(\theta) = -\cos\theta$	1
$h(\theta) = 0.5\cos\theta$	0.5

340 الوحدة 10 الدوال المثلثية

المعايير

معايير الممارسات في الرياضيات:
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

المتطلبات الأساسية

- تحديد القياس بالراديان
- استخدام الدوال المثلثية ودائرة الوحدة

مثال 1

نصيحة للتدريس م.م.ر 3

لكي تساعد الطلاب على التوصل إلى التخمين الصحيح في **الجزء c**، فقد تحتاج إلى تذكيرهم بأن فترة الدالة موجبة دائمًا. سيساعد هذا الطلاب على أن يتذكروا إدراج قيمة مطلقة في التعبير الذي يكتبونه للفترة.

الأسئلة الداعمة

- ما الارتباط بين تمثيل $y = \sin(-\theta)$ البياني وتمثيل $y = \sin\theta$ البياني؟
تمثيل $y = \sin(-\theta)$ البياني انعكاس على المحور الرأسي y لتمثيل $y = \sin\theta$ البياني.
- ماذا يحدث لتمثيل $y = a\sin b\theta$ البياني مع تزايد a؟ ومع تزايد b؟ (افترض أن $a > 0, b > 0$.) **مع تزايد a، يتمدد التمثيل البياني رأسيًا. مع تزايد b، ينضغط التمثيل البياني أفقيًا.**

معلومات أساسية رياضية

في هذا الدرس، يتعلم الطلاب تمثيل الدوال المثلثية بيانيًا عن طريق تحديد السمات الأساسية للدوال، مثل السعة والفترة. يرتبط هذا عن قرب بعمل الطلاب السابق على التحويلات. لقد رأى الطلاب مثلاً أن تمثيل $y = af(x)$ البياني عبارة عن تمدد أو انضغاط رأسي للتمثيل البياني للدالة $y = f(x)$. في هذا الدرس، يتعلم الطلاب أن الدالة $y = a\sin\theta$ تحتوي على السعة $|a|$. بعبارة أخرى، تمثيل $y = a\sin\theta$ البياني عبارة عن تمدد أو انضغاط رأسي للتمثيل البياني للدالة الأصلية $y = \sin\theta$ بالعامل $|a|$. وعلى المنوال نفسه، يحدّد المعامل θ في $y = \sin b\theta$ فترة الدالة وما إذا كان التمثيل البياني تمددًا أم انضغاطًا أفقيًا للتمثيل البياني للدالة الأصلية. سيتعرف الطلاب على أثر الإزاحات على التمثيلات البيانية للدوال المثلثية في الدرس التالي.

مثال 2

نصيحة للتدريس م.م.ر 7

أوضح للطلاب أنه في الجبر 1، ربما يكونون وضعوا تمثيلات بيانية للدوال في الأساس عن طريق عمل جدول قيم وتعيين النقاط ورسم منحنى منتظم. في الجبر 2، غالبًا ما يكون الأمر الأكفأ هو التراجع واتباع أسلوب أكثر شمولاً في التمثيل البياني. وهو أن الطلاب ينبغي أن يستخدموا بنية المعادلة المذكورة للتعرف على أمور بشأن تمثيلها البياني. **الجزء a** هو إحدى الخطوات في هذا الاتجاه. بمجرد أن يحدد الطلاب سعة الدالة وفترتها، ينبغي أن يشعروا بثقة تامة في شكل التمثيل البياني. ذكّر الطلاب بأن وضع جدول للقيم وتعيين النقاط يمكن مع ذلك أن يقوم بدور التحقق من مدى صحة الحل.

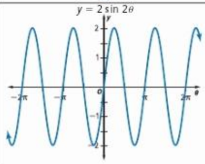
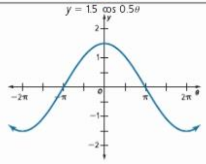
الأسئلة الداعمة

- هل يجب أن يمر تمثيلك البياني بنقطة الأصل؟ فلماذا مر أو لماذا لم يمر؟ **نعم؛ لأن $\sin 0 = 0$، التمثيل البياني لكل دالة بالصيغة $y = a \sin b\theta$ يمر عبر نقطة الأصل.**
- أين سيتقاطع التمثيل البياني مع المحور θ؟ ولماذا؟ **تقع نقاط التقاطع عند قيم θ زوجية لأن $\sin \frac{\pi}{2}\theta = 0$ عندما تكون θ زوجية.**

f. **التخمين** ما سعة $y = a \cos \theta$؟ هل يوجد أي قيود على قيمة a؟
السعة هي $|a|$؛ $a \neq 0$.

المفهوم الأساسي **سمات صيغ الدوال المثلثية**

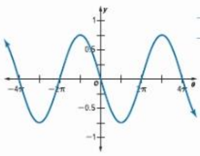
استخدم نتائجك من الاستكشاف السابق لتساعدك على إكمال كل مما يلي.

الدالة	$y = a \sin b\theta$	$y = a \cos b\theta$
المجال	{جميع الأعداد الحقيقية}	{جميع الأعداد الحقيقية}
المدى	$\{y \mid -a \le y \le a\}$	$\{y \mid -a \le y \le a\}$
الفترة	$\frac{2\pi}{\lvert b \rvert}$	$\frac{2\pi}{\lvert b \rvert}$
السعة	$\lvert a \rvert$	$\lvert a \rvert$
مثال	$y = 2 \sin 2\theta$ 	$y = 1.5 \cos 0.5\theta$ 

مثال 2 **التمثيل البياني لدالة Sine**

مثّل $f(\theta) = -\frac{3}{4} \sin \frac{\pi}{2}\theta$ بيانيًا.

a. **التفكير بطريقة تجريدية** بيّن كيفية تحديد سعة وفترة الدالة.
السعة هي $\frac{3}{4} = \left|-\frac{3}{4}\right| = |a|$، والفترة هي $4 = \frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{2}\right|} = \frac{2\pi}{|b|}$.



b. **استخدام البنية** مثّل الدالة بيانيًا على المستوى الإحداثي المبين على اليسار.

c. **تقييم مدى الصحة** اشرح كيفية التحقق من صحة التمثيل البياني.
الإجابة النموذجية: تحقق من أن النقاط على التمثيل البياني هي حلول لـ $y = -\frac{3}{4} \sin \frac{\pi}{2}\theta$. على سبيل المثال، يمر التمثيل البياني بالنقطة $(3, \frac{3}{4})$ و $-\frac{3}{4} \sin \frac{\pi}{2}(3) = -\frac{3}{4} \sin \frac{3\pi}{2} = -\frac{3}{4}(-1) = \frac{3}{4}$. إذًا التمثيل البياني منطقي.

d. **استخدام البنية** اشرح كيف تقارن بين التمثيل البياني لـ $g(\theta) = \frac{3}{4} \sin \frac{\pi}{2}\theta$ والتمثيل البياني لـ $f(\theta)$.
سيكون التمثيل البياني لـ $g(\theta)$ انعاكسًا للتمثيل البياني لـ $f(\theta)$ عبر محور θ.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

م.م.ر 7 **(محاولة إيجاد البنية واستخدامها)** يشرح كيف ينبغي أن يتمكن الطلاب من "رؤية الأشياء المعقدة، مثل بعض التعابير الجبرية ككائنات منفردة أو متألفة من عدة أجسام." تظهر هذه المهارة في **المثال 2** مع تمثيل الطلاب بيانيًا لدالة مثلثية معقدة. قد ينظر الطلاب الماهرون رياضيًا للدالة $f(\theta) = -\frac{3}{4} \sin \frac{\pi}{2}\theta$ ويدركون أنها بالصيغة $f(\theta) = -\frac{3}{4}$ [دالة sine]. النظر للدالة بهذه الطريقة مفيد لأنه بمجرد أن يعرف الطلاب ما يبدو عليه التمثيل البياني لدالة sine التي بين القوسين، يمكنهم الحصول على تمثيل $f(\theta)$ البياني عن طريق عكس التمثيل البياني على المحور θ وضغطه رأسيًا بالعامل $\frac{3}{4}$.

مثال 3

نصيحة للتدريس م.م.ر 4

بمجرد أن يحدد الطلاب أن سعة الدالة المطلوبة تبلغ 10، يمكنهم أن يكتبوا الدالة بالصورة $f(\theta) = 10\cos 8\pi\theta$. وهذا غير صحيح لأن الدالة لا تمثل الحركة المذكورة في المسألة بدقة. احرص على تشجيع الطلاب على التحقق من أي نموذج يكتبونه ليتأكدوا من مطابقته للمعلومات المذكورة ثم تعديله حسب الحاجة. بما أن $f(0)$ يجب أن تكون -10، فإن الدالة الصحيحة هي $f(\theta) = -10\cos 8\pi\theta$.

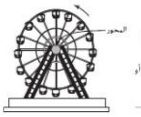
الأسئلة الداعمة

- كي يمكنك التوصل إلى قيمة b في الدالة؟ **بما أن الفترة هي $\frac{1}{4}$، يمكنك حل $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{1}{4}$ للتوصل إلى قيمة b.**
- كيف يمكنك معرفة أن تمثيلك البياني منطقي؟ الإجابة النموذجية: **قيم الدالة تتراوح من -10 إلى 10 وهناك 8 دورات كاملة من $\theta = 0$ إلى $\theta = 2$.**

يمكنك استخدام الدوال المثلثية لتمثيل مجموعة واسعة من العلاقات الدورية. وفي العديد من الحالات، ستتضمن المعطيات التي تقدم لك التردد. ويعتبر **التردد** هو عدد الدورات في وحدة محددة من الزمن. وهو المعكوس الضربي لفترة الدالة.

مثال 3 تمثيل العلاقات الدورية

عجلة فيريس في أحد المراكز الترفيهية الوطنية قطرها 20 m وتُكمل 4 دورات في الدقيقة الواحدة. ركب داوود إحدى عربات العجلة الدوّارة عند أدنى نقطة لها وظل بالعجلة لمدة دقيقتين. ويرغب في إنشاء نموذج للارتفاع الذي كان عليه أعلى وأدنى محور دوران العجلة الدوّارة بعد θ ثوانٍ من بدء الدوران.



a. **تفسير المسائل** افترض أن $f(\theta)$ هو دالة sine أو cosine التي تمثل ارتفاع داوود أعلى أو أدنى محور الدوران. كم ستكون سعة الدالة؟ فسر ذلك.

10؛ أقصى ارتفاع تصل اليه العربة فوق المحور هو 10 m؛ أدنى ارتفاع تصل اليه العربة تحت المحور هو 10 m؛ السعة هي $10 = \frac{1}{2}[10 - (-10)]$.

b. **التفكير بطريقة تجريدية** اشرح كيفية إيجاد فترة الدالة.

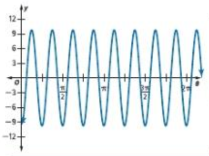
التردد هو 4، والفترة هي المعكوس الضربي للتردد أو $\frac{1}{4}$.

c. **استخدام البنية** ما القيمة التي ينبغي أن تساويها $f(0)$؟ ولماذا؟ اشرح كيف يمكنك استخدام هذا لتقرر ما إن كان ينبغي أن تكون الدالة في الصورة $f(\theta) = a \sin b\theta$ أم $f(\theta) = a \cos b\theta$.

$f(0) = -10$، لأن العربة تكون عند أدنى نقطة لها عندما يستقل داوود العربة وحيث إن $\sin 0 = 0$، فينبغي أن تكون الدالة في الصورة $f(\theta) = a \cos b\theta$.

d. **استخدام النماذج** اكتب الدالة $f(\theta)$.

$f(\theta) = -10 \cos 8\pi\theta$



e. **استخدام البنية** مثّل $f(\theta)$ بيانيًا على المستوى الإحداثي المبين على اليسار.

f. **استخدام النماذج** ما مجال الدالة؟ كيف يرتبط ذلك بالمواقف من الحياة اليومية؟

المجال هو $\{\theta | 0 \le \theta \le 2\}$؛ بقي داوود في العجلة الدوّارة لمدة دقيقتين.

g. **استخدام النماذج** كم عدد التقاطعات مع θ الذي يحتوي عليها التمثيل البياني؟ ما الذي يخبرك به ذلك عن شوط داوود؟

16؛ يوجد 16 مرة أثناء الشوط كان فيها داوود عند ارتفاع محور الدوران.

h. **استخدام النماذج** كيف تبين فترة الدالة في التمثيل البياني؟ ما الذي يخبرك به ذلك عن شوط داوود؟

يكمل التمثيل البياني دورة كاملة في 0.25 min؛ أي تستغرق العجلة الدوّارة 15 ثانية لتكمل دورانًا كاملاً.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

من الأجزاء الأساسية في وضع نموذج، كما هو مذكور في **م.م.ر 4 (استخدام نماذج الرياضيات)**، فهم أهمية ربط الكميات في موقف من الحياة اليومية بالكميات في النموذج الرياضي. في **المثال 3** مثلاً، يمكن أن تقع عربة داستن في عجلة الملاهي فوق محور العجلة أو تحته. يتحول هذا إلى عبارة رياضية باستخدام القيم الموجبة والسالبة. بمعنى أن قيمة $f(\theta)$ الموجبة تعني أن عربة داستن فوق المحور وتعني القيمة السالبة أن السيارة تحت المحور. قد يجد الطلاب غرابة في أن $f(\theta)$ يمكن أن تستوعب قيمًا سالبة لأنها تمثل ارتفاعًا. لكن ذكّر الطلاب بأن القيم السالبة كثيرًا ما تُستخدم لتمثيل مسافات تحت نقطة ثابتة (مثلما يمثل الارتفاع 60 m ارتفاعًا يبلغ 60 m تحت سطح البحر).

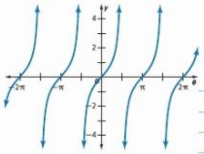
مثال 4 التمثيل البياني لدالة ظل الـ tan

مثّل $f(\theta) = \tan \theta$ بيانيًا.

a. **استخدام البنية** بأي قيم θ تكون $f(\theta)$ غير معرّفة؟ ما الذي يخبرك به ذلك عن مجال الدالة؟
$f(\theta)$ غير معرفة عند $\theta = \frac{\pi}{2} + \pi n$، حيث n هو عدد صحيح؛ والمجال هو جميع الأعداد الحقيقية باستثناء بعض القيم.

b. **استخدام البنية** أين يحتوي تمثيل $f(\theta)$ البياني على خطوط تقارب رأسية؟
للتمثيل البياني خطوط تقارب رأسية عند $\theta = \frac{\pi}{2} + \pi n$، حيث n هو عدد صحيح.

c. **التعليق على طريقة الاستنتاج** يقول طالب إن سعة $f(\theta)$ هي 1 نظرًا لأن الدالة في الصورة $y = a \tan b\theta$، حيث $a = 1$. هل تتفق معه؟ فسّر ذلك.
لا، لا أتفق معه؛ ليس للدالة سعة حيث إن المدى هو جميع الأعداد الحقيقية.



d. **استخدام البنية** مثّل $f(\theta)$ بيانيًا على المستوى الإحداثي المبين على اليسار.

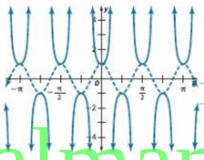
e. **التواصل بدقة** اشرح كيف يمكنك استخدام التمثيل البياني لتحديد فترة $f(\theta)$. كيف تكون هذه الفترة مقارنة بفترة $y = \sin \theta$ و $y = \cos \theta$؟
استخدم التمثيل البياني لتحديد أصغر دورة تتكرر. ويبين ذلك أن دورة $f(\theta)$ هي π. ودورة $f(\theta)$ هي نصف دورة $y = \sin \theta$ و $y = \cos \theta$.

للتمثيل البياني لدالة الـ secant أو cosecant أو cotangent، يمكنك استخدام البنية لكتابة الدالة في صورة دالة cosine أو sine أو tangent.

مثال 5 التمثيل البياني لدالة الـ Secant

مثّل $f(\theta) = \sec 4\theta$ بيانيًا.

a. **استخدام البنية** فسّر كيفية كتابة $f(\theta)$ في صورة دالة cosine.
دالة الـ sec هي المعكوس الضربي لدالة cosine. إذًا $f(\theta) = \frac{1}{\cos 4\theta}$.



b. **استخدام البنية** مثّل $g(\theta) = \cos 4\theta$ بيانيًا على المستوى الإحداثي المبين على اليسار.

c. **التواصل بدقة** اذكر كيف يمكنك استخدام التمثيل البياني لـ $g(\theta)$ لتحديد أين سيحتوي التمثيل البياني لـ $f(\theta)$ على خطوط تقارب.
سيحتوي التمثيل البياني لـ $f(\theta)$ على خط تقارب في أي مكان يحتوي فيه التمثيل البياني لـ $g(\theta)$ على تقاطع $a(\theta)$.

d. **استخدام البنية** استخدم إجابتك على **الجزء c** والتمثيل البياني لـ $g(\theta)$ لتساعدك على تمثيل $f(\theta)$ بيانيًا على المستوى الإحداثي المبين على اليسار.

التدريس المتمايز

في **المثال 4**، قد يستفيد بعض الطلاب من عمل جدول لقيم دالة المماس. سيساعدهم هذا في تحديد بعض السمات الأساسية في الدالة المعروضة في تمثيلها البياني. على سبيل المثال، يوضح جدول قيم $y = \tan \theta$ أنه مع تزايد θ واقترابها أكثر وأكثر من $\frac{\pi}{2}$، تتزايد قيم y بدون حد. لتقديم شرح واضح لهذا، قد تحتاج إلى حث الطلاب على استخدام حاسباتهم لعمل جدول للقيم بدءًا من $\theta = 1.5$ مع التزايد بمقادير تبلغ 0.01. يظهر التزايد السريع في قيم y في خط التقارب للتمثيل البياني عند $\theta = \frac{\pi}{2}$.

مثال 4

نصيحة للتدريس م.م.ر 3

الجزء c في المثال يقدم للطلاب فرصة التفكير النقدي في استنتاج طالب آخر. احرص على أن يفهم الطلاب أن جزءًا من العبارة المذكورة حقيقي، بمعنى أن الدالة بالشكل $y = a \tan b\theta$، حيث $a = 1$. إلا أن قيمة a ترتبط بسعة دالتي sine و cosine فقط.

الأسئلة الداعمة

- ما بعض النقاط الملائمة التي تقع في التمثيل البياني؟ **الإجابة النموذجية: $(0, 0), (\frac{\pi}{4}, 1), (-\frac{\pi}{4}, -1)$**
- ما نوع التناظر في هذا التمثيل البياني؟ **التمثيل البياني متناظر حول نقطة الأصل.**

مثال 5

نصيحة للتدريس م.م.ر 7

في هذا المثال، يستخدم الطلاب بنية التمثيل البياني $y = \cos 4\theta$ كدليل لمساعدتهم على تمثيل $y = \sec 4\theta$ بيانيًا. تمثل هذه الدوال معكوسات لبعضها البعض. فتأكد من فهم الطلاب لكيفية ظهور هذه العلاقة في التمثيلات البيانية. على سبيل المثال، أي فترة تكون فيها $y = \cos 4\theta$ موجبة ومتزايدة هي فترة تكون فيها $y = \sec 4\theta$ موجبة ومتناقصة.

الأسئلة الداعمة

- متى سيتطابق تمثيلا $f(\theta)$ و $g(\theta)$ البيانيان؟ **عند كل قيم θ التي تكون فيها $f(\theta) = 1$ أو $f(\theta) = -1$**
- متى تكون $g(\theta)$ غير معروفة؟ ما الذي يوضحه تمثيل $g(\theta)$ البياني عند قيم θ هذه؟ **عند كل قيم θ التي تكون فيها $\cos 4\theta = 0$؛ هناك خط مقارب عند قيم θ هذه.**

تدريب

في **التمارين 6–1**، يضع الطلاب تمثيلاً بيانيًا للدوال المثلثية على مستويات إحدائية.

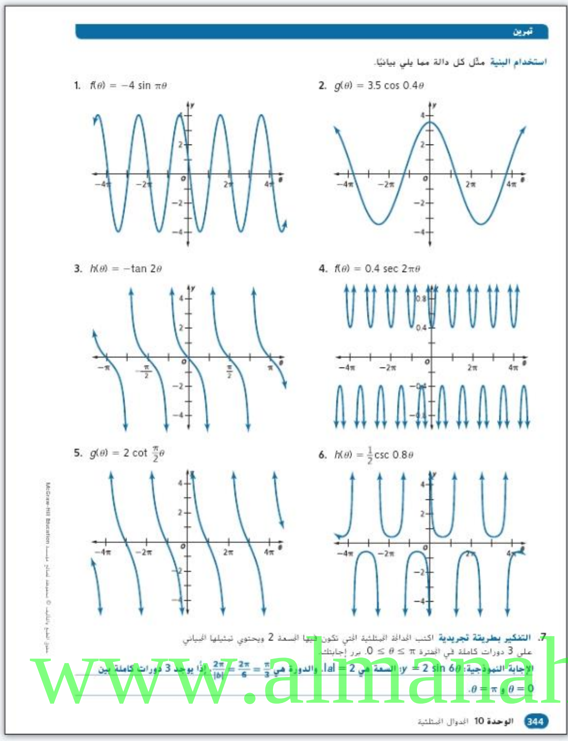
في **التمرين 7**، يستخدم الطلاب الاستنتاج لكتابة دالة بناءً على وصف لتمثيلها البياني.

التمرين 8 عبارة عن مسألة نموذجية يكتب الطلاب فيها دالة مثلثية لتمثيل ظاهرة دورية. كما يمثل الطلاب الدالة بيانيًا ويفسرون سمات التمثيل البياني ويشرحون المجال في السياق.

في **التمرين 9**، يكتب الطلاب دالة بناءً على تمثيلها البياني.

عرض المعايير

تمرين	م.م.ر
1-6	7
7	2
8	1, 2, 4, 7
9	6


تمرين

استخدام البنية مثّل كل دالة مما يلي بيانيًا.

1. $f(\theta) = -4 \sin \pi\theta$
2. $g(\theta) = 3.5 \cos 0.4\theta$
3. $h(\theta) = -\tan 2\theta$
4. $f(\theta) = 0.4 \sec 2\pi\theta$
5. $g(\theta) = 2 \cot \frac{\pi}{2}\theta$
6. $h(\theta) = \frac{1}{2} \csc 0.8\theta$

7. **التفكير بطريقة تجريدية** اكتب الدالة المثلثية التي تكون فيها السعة 2 ويحتوي تمثيلها البياني على 3 دورات كاملة في الفترة $0 \le \theta \le \pi$. برر إجابتك.

الإجابة النموذجية: $y = 2 \sin 6\theta$؛ السعة هي $|a| = 2$، والدورة هي $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$. إذًا يوجد 3 دورات كاملة بين $\theta = 0$ و $\theta = \pi$.

344 الوحدة 10 الدوال المثلثية

أخطاء شائعة

في **التمرين 2**، قد يحدد بعض الطلاب سعة الدالة وفترتها بشكل صحيح، لكنهم قد يرسمون تمثيلاً بيانيًا خاطئًا لأنهم لم ينتبهوا جيدًا للمقياس على المحور θ. فترة الدالة هي 5π. ولهذا ينبغي أن يقدم التمثيل البياني دائرتين كاملتين في الفترة من $\theta = -4\pi$ إلى $\theta = 4\pi$. إذا كانت تمثيلات الطلاب البيانية تعرض أي شيء بخلاف دائرتين كاملتين، فشجعهم على التحقق من أنهم حسبوا الفترة بشكل صحيح وحددوا معنى هذا بشكل صحيح بالنسبة لتمثيل بياني على المحورين المذكورين.

أخطاء شائعة

في **التمرين 9**، قد يحدد الطلاب سعة التمثيل البياني لتكون 3 والفترة لتكون 4π ثم يكتبون $y = 3 \sin 4\pi\theta$ لقاعدة الدالة. اقترح أن يمثل الطلاب هذه الدالة بيانيًا على حاسباتهم واجعلهم يتحققوا مما إذا كانت تطابق التمثيل البياني المذكور. سيساعد هذا الطلاب على إدراك أنهم ارتكبوا خطأ في تحديد قيمة b في الدالة $y = a \sin b\theta$.

8. قارب مربوط بمرفأ يتحرك رأسيًا لأعلى وأسفل مع الأمواج. وتشاهد تسنيم القارب لمدة 30 ثانية وتلاحظ أنه تحرك لأعلى وأسفل إجمالي 6 مرات. ويبلغ الفرق بين أعلى نقطة للقارب وأدنى نقطة 3 m. وترغب تسنيم في كتابة الدالة المثلثية التي تمثل موقع القارب الرأسي بعد x ثوانٍ من بدء مشاهدتها للقارب. افترض أنه عندما بدأت تسنيم مراقبة القارب، كان عند أعلى نقطة له وأن متوسط وضعه الرأسي هو 0 m.

a. تفسير المسائل ما سعة الدالة؟ فسّر ذلك.

حيث إن الفرق بين أعلى نقطة وأدنى نقطة هو 3 m، فإن سعة الدالة هي $\frac{1}{2}(3) = 1.5$.

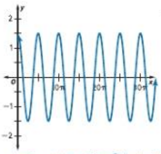
b. التفكير بطريقة تجريدية ما فترة الدالة؟ فسّر ذلك.

يكمل القارب 6 دورات كاملة في 30 ثانية أو دورة واحدة كل 5 ثوانٍ. إذًا الفترة هي 5.

c. استخدام النماذج اشرح كيفية كتابة الدالة $h(x)$.

حيث إن القارب يكون عند أعلى نقطة له عند $x = 0$، فينبغي أن تستخدم الدالة دالة cosine. إذًا $h(x) = a \cos bx$.

حيث $a = 1.5$ و $\frac{2\pi}{|b|} = 5$. إذًا، $b = \frac{2\pi}{5}$ و $h(x) = 1.5 \cos \frac{2\pi}{5}x$.



d. استخدام البنية مثّل $h(x)$ بيانيًا على المستوى الإحداثي المبين على اليسار.

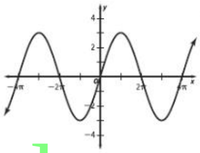
e. استخدام النماذج ما مجال الدالة؟ كيف يرتبط ذلك بالمواقف من الحياة اليومية؟

المجال هو $\{x \mid 0 \le x \le 30\}$؛ تشاهد تسنيم حركة القارب لمدة 30 ثانية.

f. استخدام النماذج ما القيمة الصغرى للدالة؟ كم عدد المرات التي تساوي فيها الدالة هذه القيمة في التمثيل البياني؟ ما الذي يخبرك به ذلك حول حركة القارب؟

القيمة الصغرى هي -1.5؛ تساوي الدالة هذه القيمة 6 مرات؛ أثناء الوقت الذي استغرقته لمشاهدة القارب، يكون عند أدنى نقطة له 6 مرات.

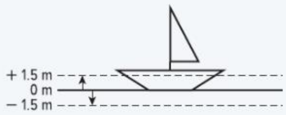
9. التواصل بدقة اكتب دالة sine أو cosine للتمثيل البياني المبين إلى اليسار. اشرح طريقة الحل.



حيث إن $y = 0$ عندما $\theta = 0$، فينبغي أن تُستخدم الدالة دالة sine. إذًا $y = a \sin b\theta$. السعة هي 3. إذًا $a = 3$. يكمل التمثيل البياني دورة كاملة من $\theta = 0$ إلى $\theta = 4\pi$. إذًا الدورة هي 4π. يعني ذلك أن $\frac{2\pi}{|b|} = 4\pi$. بالحل بإيجاد b يتبين أن $b = \frac{1}{2}$. الدالة هي $y = 3 \sin \frac{1}{2}\theta$.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

في إطار م.م.ر 4 **(استخدام نماذج الرياضيات)** تأتي معرفة كيفية وموعد استخدام مخطط جزء من عملية تمثيل النماذج. في **التمرين 8**، يستطيع المخطط أن يساعد الطلاب على فهم المسألة ويساعدهم على وضع نموذج ملائم. يظهر مخطط بسيط للموقف المذكور بالأدنى.



10.8 إزاحة التمثيلات البيانية للدوال المثلثية

المعايير

معايير الممارسات الرياضية:
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

المتطلبات الأساسية

- تمثيل الدوال المثلّثية بيانيًا

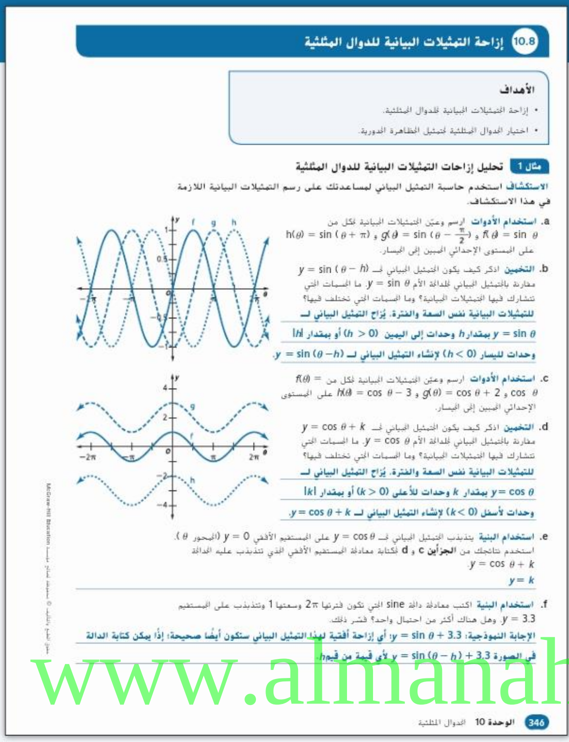
مثال 1

نصيحة للتدريس م.م.ر 5

ذكّر الطلاب بأن ينتبهوا إلى كيفية إدخالهم للدوال المثلثية في حاسباتهم. استخدام الأقواس له أهمية خاصة عند التمييز بين دالة بالشكل $y = \sin\theta + k$ ودالة بالشكل $y = \sin(\theta + k)$.

الأسئلة الداعمة

- كيف يمكنك إزاحة تمثيل $f(\theta) = \sin\theta$ البياني إلى اليمين كي تتوافق صورته مع التمثيل البياني الأصلي؟ اشرح. **بما أن الفترة هي 2π، تتم الإزاحة إلى اليمين بأي من مضاعفات للوحدات 2π.**
- ما القيمة العظمى للدالة $y = \cos\theta + k$؟ وما القيمة الصغرى؟ **$k + 1$; $k - 1$**



10.8 إزاحة التمثيلات البيانية للدوال المثلثية

الأهداف
- إزاحة التمثيلات البيانية للدوال المثلثية.
- اختيار الدوال المثلثية لتمثيل الظاهرة الدورية.

مثال 1 تحليل إزاحات التمثيلات البيانية للدوال المثلثية

الاستكشاف استخدم حاسبة التمثيل البياني لمساعدتك على رسم التمثيلات البيانية اللازمة في هذا الاستكشاف.

a. **استخدام الأدوات** ارسم وعيّن التمثيلات البيانية لكل من $f(\theta) = \sin\theta$ و $g(\theta) = \sin(\theta - \frac{\pi}{2})$ و $h(\theta) = \sin(\theta + \pi)$ على المستوى الإحداثي المبين إلى اليسار.

b. **التخمين** اذكر كيف يكون التمثيل البياني لـ $y = \sin(\theta - h)$ مقارنة بالتمثيل البياني للدالة الأم $y = \sin\theta$. ما السمات التي تتشارك فيها التمثيلات البيانية؟ وما السمات التي تختلف فيها؟ **للتمثيلات البيانية نفس السعة والفترة. يُزاح التمثيل البياني لـ $y = \sin\theta$ بمقدار h وحدات إلى اليمين $(h > 0)$ أو بمقدار $|h|$ وحدات لليسار $(h < 0)$ لإنشاء التمثيل البياني لـ $y = \sin(\theta - h)$.**

c. **استخدام الأدوات** ارسم وعيّن التمثيلات البيانية لكل من $f(\theta) = \cos\theta$ و $g(\theta) = \cos\theta + 2$ و $h(\theta) = \cos\theta - 3$ على المستوى الإحداثي المبين إلى اليسار.

d. **التخمين** اذكر كيف يكون التمثيل البياني لـ $y = \cos\theta + k$ مقارنة بالتمثيل البياني للدالة الأم $y = \cos\theta$. ما السمات التي تتشارك فيها التمثيلات البيانية؟ وما السمات التي تختلف فيها؟ **للتمثيلات البيانية نفس السعة والفترة. يُزاح التمثيل البياني لـ $y = \cos\theta$ بمقدار k وحدات للأعلى $(k > 0)$ أو بمقدار $|k|$ وحدات لأسفل $(k < 0)$ لإنشاء التمثيل البياني لـ $y = \cos\theta + k$.**

e. **استخدام البنية** يتذبذب التمثيل البياني لـ $y = \cos\theta$ على المستقيم الأفقي $y = 0$ (المحور θ). استخدم نتائجك من **الجزأين c و d** لكتابة معادلة المستقيم الأفقي الذي تتذبذب عليه الدالة $y = \cos\theta + k$. **$y = k$**

f. **استخدام البنية** اكتب معادلة دالة sine التي تكون فترتها 2π وسعتها 1 وتتذبذب على المستقيم $y = 3.3$. وهل هناك أكثر من احتمال واحد؟ فسّر ذلك. **الإجابة النموذجية: $y = \sin\theta + 3.3$؛ أي إزاحة أفقية لهذا التمثيل البياني ستكون أيضًا صحيحة؛ إذًا يمكن كتابة الدالة في الصورة $y = \sin(\theta - h) + 3.3$ لأي قيمة من قيم h.**

346 الوحدة 10 الدوال المثلثية

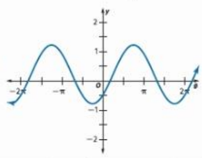
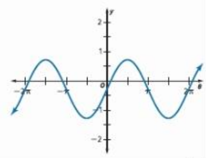
معلومات أساسية رياضية

لقد تعلم الطلاب بالفعل الإزاحات في عدد كبير من أنواع الدوال. بالنسبة إلى الدوال المثلثية، فإن الإزاحات الأفقية لها بعض السمات الخاصة. بما أن كل دالة مثلثية تُعتبر دورية، من الممكن أن تتوافق الصورة بعد الإزاحة الأفقية مع الصورة المسبقة. على سبيل المثال، فترة دالة sine الأصلية هي 2π. ولهذا فإن الإزاحة الأفقية للدالة بمقدار 2π وحدة إلى اليمين يجعل التمثيل البياني بدون تغيير. بمعنى أن $\sin\theta = \sin(\theta - 2\pi)$. لاحظ أن الإزاحات الأفقية ترتبط عن قرب كذلك بالمتطابقات المثلثية. على سبيل المثال، سيتعلم الطلاب المتطابقة $\sin\theta = \cos(\theta - \frac{\pi}{2})$. يعني هذا أن إزاحة التمثيل البياني $y = \cos\theta$ بمقدار $\frac{\pi}{2}$ وحدة إلى اليمين يؤدي إلى التمثيل البياني لـ $y = \sin\theta$.

يطلق على الإزاحة الأفقية للدالة المثلثية **إزاحة الطور**. ويطلق على الإزاحة الرأسية للدالة المثلثية **إزاحة رأسية**. ويطلق على المستقيم الأفقي الذي تتذبذب عليه الدالة المثلثية **الخط المتوسط**.

المفهوم الأساسي **إزاحة الدوال المثلثية**

استخدم نتائجك من المثال السابق لتساعدك على إكمال كل مما يلي.

	إزاحة الطور	إزاحة رأسية
الوصف	إزاحة الطور للدالة $y = a \sin b(\theta - h)$، حيث $b > 0$، هو h.	الإزاحة الرأسية للدالة $y = a \sin b\theta + k$ is k.
الاتجاه	إذا كان $h > 0$، فالإزاحة h وحدات لليمين. إذا كان $h < 0$، فالإزاحة $\lvert h \rvert$ وحدات لليسار.	إذا كان $k > 0$، فالإزاحة k وحدات للأعلى. إذا كان $k < 0$، فالإزاحة $\lvert k \rvert$ وحدات للأسفل.
مثال	$y = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ 	$y = \sin \theta - 0.5$ 

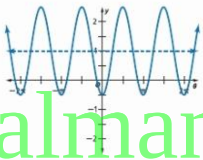
يمكن استخدام نفس القواعد لتمثيل دوال cosine و tan و sec و csc و cot بيانيًا.

مثال 2 **التمثيل البياني لدالة مثلثية**

مثّل $f(\theta) = \frac{3}{2}\cos 2\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + 1$ بيانيًا.

a. **التفكير بطريقة تجريدية** اشرح كيفية تحديد السعة والفترة وإزاحة الطور والإزاحة الرأسية والخط المتوسط للدالة.
السعة هي $\frac{3}{2} = \left|\frac{3}{2}\right| = |a|$. الفترة هي $\pi = \frac{2\pi}{2} = \frac{2\pi}{|b|}$. الإزاحة الأفقية هي $\frac{\pi}{2}$ وحدات لليمين. والإزاحة الرأسية هي وحدة للأعلى. وخط المتوسط هو $y = 1$.

b. **استخدام البنية** مثّل الدالة بيانيًا على المستوى الإحداثي المبين على اليسار، بما في ذلك التمثيل البياني للخط المتوسط.



c. **التواصل بدقة** اذكر كيف يكون التمثيل البياني لـ $f(\theta)$ مقارنة بالتمثيل البياني لـ $g(\theta) = \frac{3}{2}\cos 2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + 1$.
لأن الفترة هي π، فإن إزاحة الطور التي تكون $\frac{\pi}{2}$ وحدات لليمين هي نفسها إزاحة الطور التي تكون $\frac{\pi}{2}$ وحدات لليسار. إذًا ستبدو التمثيلات البيانية متطابقة.

مثال 2

نصيحة للتدريس م.م.ر 2

لكي تساعد الطلاب على تحديد السعة والفترة وإزاحة الطور والإزاحة الرأسية، قد ترغب في العمل معهم لعمل تمثيل بياني مع توضيح أن المعاملات في دالة مثلثية عامة يمكن استخدامها في حساب كل قيمة كما هو موضح أدناه. أكّد أن b ليست فترة الدالة. لكن يمكن استخدامها في حساب الفترة. (الفترة $= \frac{2\pi}{|b|}$)

$$y = \overset{\text{السعة}}{a} \cos \underset{\text{الفترة}}{b}(\theta - \overset{\text{إزاحة الطور}}{h}) + \underset{\text{الإزاحة الرأسية}}{k}$$

الأسئلة الداعمة

- كيف يمكنك استخدام قاعدة الدالة المذكورة في تحديد معادلة الخط المتوسط؟ **المعادلة هي $y = k$، حيث k هي الحد الثابت في قاعدة الدالة.**
- في **الجزء c**، كيف يمكنك التحقق من صحة إجابتك؟ **الإجابة النموذجية: استخدم حاسبة لتمثيل كلتا الدالتين بيانيًا والتحقق من توافق التمثيلات البيانية.**

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

في **المثال 2**، قد يتفاجأ الطلاب من اكتشاف أن الدالة $f(\theta) = \frac{3}{2}\cos 2\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + 1$ لها نفس التمثيل البياني للدالة $g(\theta) = \frac{3}{2}\cos 2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + 1$. فهم السبب في هذا يعطي فرصة جيدة لاستخدام البنية كما هو مذكور في م.م.ر 7 **(محاولة إيجاد البنية واستخدامها)**. توضح قواعد الدالة أن كلتا الدالتين لهما الفترة $\pi = \frac{2\pi}{2} = \frac{2\pi}{|b|}$. ولهذا يتكرر شكل التمثيل البياني كل π وحدات. من المنطقي أن الإزاحة الرأسية بمقدار $\frac{\pi}{2}$ وحدة إلى اليسار أو إلى اليمين ستحقق عند ذلك النتيجة نفسها، وهذا بالضبط ما تمثله قواعد الدالتين.

مثال 3

نصيحة للتدريس م.م.ر 7

يتضمن استخدام البنية معرفة متى يتم تبسيط تعبير ومتى يُترك كما هو. مع تطوير الطلاب لنموذجهم، يمكن أن تقترح ألا يبسطوا تعبير b. التعبير عن b بالصورة $\frac{2\pi}{12.4}$ تتيح إمكانية رؤية فترة الدالة، 12.4 ساعة، في مقام الكسر. على الرغم من أنه يصح تمامًا كتابة b بالصورة $\frac{\pi}{6.2}$ أو $\frac{10\pi}{62}$ أو حتى $\frac{5\pi}{31}$، إلا أن بعض المعلومات الأساسية مفقودة في هذه التعابير المكافئة.

الأسئلة الداعمة

- ما $f(0)$؟ ولماذا؟ **$f(0) = 18$؛ كان المد في الخليج مرتفعًا عندما بدأ عالم الأحياء المائية في تسجيل عمق الماء.**
- في **الجزء h**، هل يمكنك استخدام دالة tangent أو cotangent أو secant أو cosecant؟ ولماذا نعم أو لا؟ **لا؛ فليس للتمثيلات البيانية لهذه الدوال شكل صحيح.**

مثال 3 تمثيل العلاقات الدورية

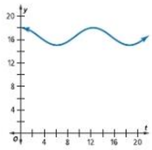
بينما تتحرك الأمواج داخل وخارج الخليج، يتباين عمق المياه من أقل عمق له وهو 15 m إلى أكبر أعمق له وهو 18 m. ويستغرق المد 6.2 ساعات للوصول إلى أقصاه بينما يستغرق الجزر 6.2 ساعات للوصول إلى أقصاه. وتبدأ عالمة أحياء بحرية في تسجيل عمق المياه في الخليج عند أقصى المد. وتود أن تضع نموذجًا لحساب عمق المياه في الخليج في أي وقت بعد مرور t ساعات على بدئها تسجيل البيانات.

a. **تفسير المسائل** افترض أن $f(t)$ هي دالة sine أو cosine تمثل عمق المياه في الخليج؟ كم ستكون سعة الدالة؟ وكم سيكون الخط المتوسط للدالة؟ فسّر ذلك.
السعة هي 1.5 حيث إن $1.5 = \frac{1}{2}[18 - 15]$. ستتذبذب الدالة حول الخط المتوسط. إذًا يجب أن يكون خط المتوسط $y = k$ حيث k هو متوسط العمق الأقصى والأدنى للماء؛ إذًا $k = \frac{1}{2}[18 + 15] = 16.5$. الخط المتوسط هو $y = 16.5$.

b. **التفكير بطريقة تجريدية** اشرح كيفية إيجاد فترة الدالة.
الدورة الكاملة هي $6.2 + 6.2$ ساعات، إذًا فهي 12.4 ساعة.

c. **استخدام البنية** هل يكون من الأنسب استخدام دالة sine أو دالة cosine لتمثيل عمق المياه؟ برر اختيارك.
الإجابة النموذجية: تكون دالة cosine هي الأنسب، نظرًا لأن دالة cosine تبلغ قيمتها العظمى عند $t = 0$؛ لن تكون إزاحة الطور ضرورية.

d. **استخدام النماذج** اكتب دالة $f(t)$ تمثل عمق الماء.
$f(t) = 1.5 \cos\left(\frac{2\pi}{12.4}t\right) + 16.5$



e. **استخدام البنية** مثّل $f(t)$ بيانيًا على المستوى الإحداثي المبين على اليسار.

f. **استخدام البنية** اشرح كيف يمكنك التفكير في الدالة التي كتبتها كمجموع للدالتين $g(t)$ و $h(t)$. ما الذي تمثله الدالتان g و h؟
$g(t) = 1.5 \cos\left(\frac{2\pi}{12.4}t\right)$؛ $h(t) = 16.5$؛ $h(t)$ تمثل متوسط عمق الماء؛ $g(t)$ تمثل التغير عن المتوسط بسبب المد والجزر.

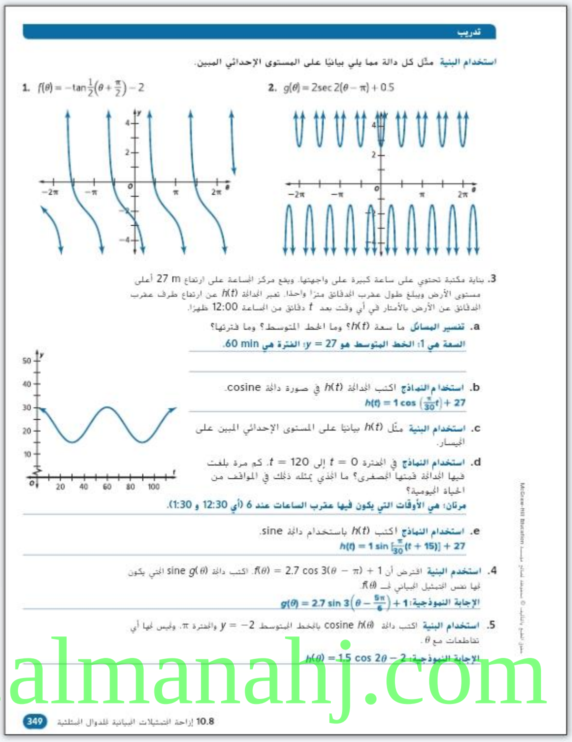
g. **استخدام النماذج** حدد الفترة التي تكون فيها الدالة متزايدة. وما الذي يمثله ذلك في موقف من الحياة اليومية؟
يتزايد التمثيل البياني من $t = 6.2$ إلى $t = 12.4$؛ هذه هي الفترة التي يمتلئ فيها الخليج بالماء بينما ينتقل من الجزر إلى المد.

h. **استخدام النماذج** اشرح كيف يمكنك كتابة النموذج باستخدام دالة مثلثية مختلفة، واشرح كيف تعرف أن النموذج الجديد صحيح.
يمكنك استخدام دالة sine بإزاحة الطور؛ $f(t) = 1.5 \sin \frac{2\pi}{12.4}(t + 3.1) + 16.5$؛ ويعتبر هذا النموذج صحيح أيضًا لأن تمثيله البياني يطابق التمثيل البياني لدالة cosine الأصلية.

348 الوحدة 10 الدوال المثلثية

التدريس المتمايز

يتطلب **المثال 3** من الطلاب أن يبتكروا نموذجًا معقدًا نوعًا ما لظاهرة دورية. وعلى الرغم من أن الطلاب يستطيعون بناء النموذج عن طريق تحديد السمات الأساسية للدالة (السعة والفترة وما إلى ذلك)، فقد يرغب بعض الطلاب في استخدام أسلوب أكثر تكرارية. لعمل ذلك، يستطيع الطلاب كتابة نموذج يعتقدون أنه ينجح ثم يتحققون من صحته ليروا ما إذا كان يطابق كل المعلومات المذكورة. إذا لم يكن النموذج كذلك، يمكنهم تعديله ليكون أدق ثم يتحققون من صحته مرة أخرى. الطالب الذي يكتب مثلاً الدالة $f(t) = 1.5 \cos t + 16.5$ قد يتمكن من أن يعرف من خلال التمثيل البياني للدالة أن القيمتين الصغرى والعظمى صحيحتان وأن $f(0)$ صحيحة، لكنه سيعرف أن الفترة تحتاج إلى تعديل. ينبغي أن ينبه هذا الطلاب إلى البحث عن قيمة مناسبة لـ b في الدالة $f(t) = 1.5 \cos bt + 16.5$.



تدريب

استخدام البنية مثّل كل دالة مما يلي بيانيًا على المستوى الإحداثي المبين.

1. $f(\theta) = -\tan\frac{1}{2}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) - 2$

2. $g(\theta) = 2\sec 2(\theta - \pi) + 0.5$

3. بناية مكتبة تحتوي على ساعة كبيرة على واجهتها. ويقع مركز الساعة على ارتفاع 27 m أعلى مستوى الأرض ويبلغ طول عقرب الدقائق مترًا واحدًا. تعبر الدالة $h(t)$ عن ارتفاع طرف عقرب الدقائق عن الأرض بالأمتار في أي وقت بعد t دقائق من الساعة 12:00 ظهرًا.

a. **تفسير المسائل** ما سعة $h(t)$؟ وما الخط المتوسط؟ وما فترتها؟

السعة هي 1؛ الخط المتوسط هو $y = 27$؛ الفترة هي 60 min.

b. **استخدام النماذج** اكتب الدالة $h(t)$ في صورة دالة cosine.

$h(t) = 1\cos\left(\frac{\pi}{30}t\right) + 27$

c. **استخدام البنية** مثّل $h(t)$ بيانيًا على المستوى الإحداثي المبين على اليسار.

d. **استخدام النماذج** في الفترة $t = 0$ إلى $t = 120$. كم مرة بلغت فيها الدالة قيمتها الصغرى؟ ما الذي يمثله ذلك في المواقف من الحياة اليومية؟

مرتان؛ هي الأوقات التي يكون فيها عقرب الساعات عند 6 (أي 12:30 و 1:30).

e. **استخدام النماذج** اكتب $h(t)$ باستخدام دالة sine.

$h(t) = 1\sin\left[\frac{\pi}{30}(t + 15)\right] + 27$

4. **استخدم البنية** افترض أن $f(\theta) = 2.7\cos 3(\theta - \pi) + 1$. اكتب دالة $g(\theta)$ sine التي يكون لها نفس التمثيل البياني لـ $f(\theta)$.

الإجابة النموذجية: $g(\theta) = 2.7\sin 3\left(\theta - \frac{5\pi}{6}\right) + 1$

5. **استخدام البنية** اكتب دالة $h(\theta)$ cosine بالخط المتوسط $y = -2$ والفترة π. وليس لها أي تقاطعات مع θ.

الإجابة النموذجية: $h(\theta) = 1.5\cos 2\theta - 2$

McGraw-Hill Education

10.8 إزاحة التمثيلات البيانية للدوال المثلثية 349

أخطاء شائعة

في **التمرين 3**، يمكن أن يكتب الطلاب دالة غير صحيحة في **الجزء b** لأنهم حددوا الفترة بشكل غير صحيح. قد يفترض بعض الطلاب أن الفترة هي 1 لأن عقرب الدقائق يستغرق ساعة واحدة لعمل دورة كاملة. أوضح للطلاب أنه يتم قياس المتغير t بالدقائق. ولهذا، فالفترة الصحيحة هي 60 دقيقة.

تدريب

في **التمرينين 1** و **2**، يمثل الطلاب الدوال المثلثية بيانيًا على المحورين الإحداثيين.

التمرين 3 عبارة عن مسألة نموذجية يختار الطلاب فيها دوال مثلثية لتمثيل ظاهرة دورية. كما يمثل الطلاب هذه الدوال بيانيًا ويفسرون السمات الأساسية للتمثيلات البيانية في السياق.

في **التمرينين 4** و **5**، ينشئ الطلاب معادلات في متغيرين لتمثيل العلاقات بين الكميات.

عرض المعايير

تمرين	م.م.ر
1–2	7
3	1, 4, 7
4–5	7

10.9 الدوال المثلثية العكسية

10.9 الدوال المثلثية العكسية

الأهداف

- تمثيل الدوال المثلثية العكسية بيانيًا.
- كتابة معادلات تنطوي على دوال مثلثية عكسية.

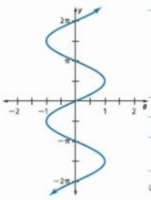
تذكر أن **الدالة العكسية** هي دالة يكون فيها المجال والمدى للدالة الأولية معكوسين.

مثال 1 تحليل التمثيل البياني لمعكوس دالة Sine

الاستكشاف إن معكوس الدالة $y = \sin \theta$ هو $\sin y = \theta$. وستدرس هذا المعكوس في الاستكشاف التالي.

a. **التواصل بدقة** صف العلاقة بين التمثيل البياني لـ $\theta = \sin y$ والتمثيل البياني لـ $y = \sin \theta$.
التمثيل البياني لـ $\theta = \sin y$ عبارة عن انعكاس للتمثيل البياني لـ $y = \sin \theta$ عبر المستقيم $y = \theta$.

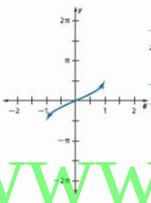
b. **استخدام البنية** استخدم إجابتك على **الجزء a** لتمثيل $\theta = \sin y$ بيانيًا على المستوى الإحداثي المبين إلى اليسار.



c. **التفكير بطريقة تجريدية** افترض أن $\theta = \frac{1}{2}$. ما قيمة y؟ هل يوجد أكثر من قيمة محتملة لـ y؟ فسّر ذلك.
$y = \frac{\pi}{6}$ أو $\frac{5\pi}{6}$ أو زاوية تشترك مع هذه الزوايا في ضلع الانتهاء. يوجد عدد لا نهائي من قيم y، نظرًا لأن y يمكن أن تكون أي قياس راديان بحيث $y = \frac{1}{2}$.

d. **التواصل بدقة** هل العلاقة $\theta = \sin y$ عبارة عن دالة؟ لِمَ أو لِمَ لا؟
لا؛ الإجابة النموذجية: يخفق التمثيل البياني في اختبار الخط الرأسي.

e. **استخدام البنية** فكر في دالة جديدة، $y = \text{Sin } \theta$، وهي دالة sine التي يكون مجالها مقيدًا بـ $\left\{-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$ مثّل $\theta = \text{Sin } y$ على المستوى الإحداثي المبين.



f. **التواصل بدقة** هل العلاقة $\theta = \text{Sin } y$ عبارة عن دالة؟ لِمَ أو لِمَ لا؟
نعم؛ الإجابة النموذجية: يجتاز التمثيل البياني في اختبار الخط الرأسي.

g. **التفكير بطريقة تجريدية** للعلاقة $\theta = \text{Sin } y$، افترض أنك تعرف أن $\theta = \frac{1}{2}$. ما قيمة y؟ هل يوجد أكثر من قيم محتملة لـ y؟ فسّر ذلك.
$y = \frac{\pi}{6}$؛ هذه هي القيمة الوحيدة بين $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ التي يكون فيها $\text{Sin } y = \frac{1}{2}$.

المعايير

معايير الممارسات في الرياضيات: 1, 2, 4, 6, 7, 8

المتطلبات الأساسية

- تمثيل الدوال المثلّثية بيانيًا
- إزاحة التمثيلات البيانية المثلثية

مثال 1

نصيحة للتدريس م.م.ر 7

لمساعدة الطلاب على رسم تمثيلي $\theta = \sin y$ و $y = \sin \theta$ البيانيين وفهم العلاقات بينهما، يمكنك أن تجعل الطلاب يرسمون تمثيل $y = \sin \theta$ البياني على ورقة شفافة أو ورقة تتبع. ثم يستطيع الطلاب يعكسوا التمثيل البياني على المستقيم $y = \theta$ ليروا تمثيل $\theta = \sin y$ البياني. يستطيع الطلاب اتباع أسلوب مشابه في **الجزء e** عن طريق تمثيل $y = \text{Sin } \theta$ بيانيًا أولاً ثم عكسه على المستقيم $y = \theta$ لتمثيل $\theta = \text{Sin } y$ بيانيًا.

الأسئلة الداعمة

- كيف تستخدم اختبار المستقيم الرأسي لتحديد ما إذا كان التمثيل البياني لعلاقة يُعتبر دالة؟ **إذا لم يكن هناك مستقيم رأسي يتقاطع مع التمثيل البياني في أكثر من نقطة، فالتمثيل البياني يمثل دالة.**
- في **الجزء e**، ما وجه الارتباط بين تمثيل $\theta = \text{Sin } y$ البياني وتمثيل $\theta = \sin y$ البياني؟ **تمثيل $\theta = \text{Sin } y$ هو نفسه تمثيل $\theta = \sin y$ البياني، لكن مداه مقصور على $\{-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\}$.**

معلومات أساسية رياضية

لقد تعامل الطلاب بالفعل مع معكوسات الدوال في عدة سياقات. لتعريف الدوال المثلثية المعكوسة، من الضروري أن تقتصر المجالات على الدوال المثلثية. يضمن قصر المجال على دالة مثلثية بطريقة ملائمة أن مدى العلاقة المعكوسة سيكون مقصورًا بحيث تكون العلاقة العكسية دالة.

لاحظ أن الطلاب قد رأوا بالفعل حالات من الضروري فيها قصر مجال دالة لكتابة دالة عكسية. على سبيل المثال، قصر مجال الدالة $y = x^2$ على قيم x الأكبر من أو تساوي 0 لتعريف الدالة المعكوسة $y = \sqrt{x}$.

مثال 2

نصيحة للتدريس
م.م.ر 7

قد تحتاج إلى البدء بطرح سؤال على الطلاب لتلخيص تحويلات الدوال عمومًا. احرص بشكل خاص على أن يتذكر الطلاب أن تمثيل $f(x-h)$ البياني يُعتبر إزاحة بمقدار h من الوحدات إلى يمين تمثيل $f(x)$ البياني عندما تكون $h > 0$ وإزاحة بمقدار $|h|$ وحدات إلى اليسار عندما تكون $h < 0$. كما أن تمثيل $f(x) + k$ البياني يُعتبر إزاحة بمقدار k وحدات أعلى تمثيل $f(x)$ البياني عندما تكون $k > 0$ وإزاحة بمقدار $|k|$ وحدات لأسفل عندما تكون $k < 0$.

الأسئلة الداعمة

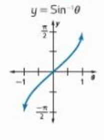
- لماذا من المنطقي أن يتناقص تمثيل $y = \text{Cos}^{-1}\,\theta$ البياني على $[-1, 1]$؟
  يتناقص تمثيل $y = \text{Cos}\,\theta$ البياني من $\theta = 0$ إلى $\theta = \pi$ وتمثيل $y = \text{Cos}^{-1}\,\theta$ البياني هو انعكاسه في المستقيم $y = \theta$.
- ما وجه الارتباط بين مدى $f(\theta)$ ومدى $g(\theta)$؟ **مدى $f(\theta)$ هو $[0, \pi]$، ولذلك فإن مدى $g(\theta)$ هو $\left[0 + \frac{\pi}{2}, \pi + \frac{\pi}{2}\right]$ أو $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.**

لتعريف الدوال المثلثية العكسية، يكون من الضروري تقييد مجال الدوال المثلثية. ويطلق على القيم في المجالات المقيدة **القيم الأساسية**. وتكون الدوال المثلثية ذات المجالات المقيدة كما يلي.

- $y = \text{Sin}\,\theta$ هي $y = \sin\theta$، حيث $D = \left\{-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$.
- $y = \text{Cos}\,\theta$ هي $y = \cos\theta$، حيث $D = \{0 \le \theta \le \pi\}$.
- $y = \text{Tan}\,\theta$ هي $y = \tan\theta$، حيث $D = \left\{-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$.

المفهوم الأساسي **الدوال المثلثية العكسية**

استخدم نتائجك حول $y = \text{Sin}\,\theta$ من المثال 1 السابق لتساعدك على إكمال كل مما يلي.

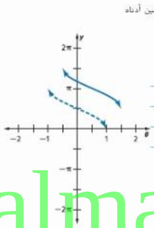
دالة عكسية	الرموز	المجال	المدى	التمثيل البياني النموذجي
Arcsine	$y = \text{Arcsin}\,\theta$ $y = \text{Sin}^{-1}\,\theta$	$\{-1 \le \theta \le 1\}$	$\left\{-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$	$y = \text{Sin}^{-1}\theta$ 
Arccosine	$y = \text{Arccos}\,\theta$ $y = \text{Cos}^{-1}\,\theta$	$\{-1 \le \theta \le 1\}$	$\{0 \le y \le \pi\}$	
Arctangent	$y = \text{Arctan}\,\theta$ $y = \text{Tan}^{-1}\,\theta$	{جميع الأعداد الحقيقية}	$\left\{-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$	

مثال 2 **تمثيل الدوال المثلثية العكسية بيانيًا**

مثّل $g(\theta) = \text{Cos}^{-1}\left(\theta - \frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{2}$ بيانيًا.

a. **التواصل بدقة** صف العلاقة بين التمثيل البياني لـ $g(\theta)$ والتمثيل البياني للدالة الأم $f(\theta) = \text{Cos}^{-1}\,\theta$.
التمثيل البياني لـ $g(\theta)$ هو التمثيل البياني لـ $f(\theta)$ مزاحًا أفقيًا $\frac{1}{2}$ وحدة إلى اليمين ومزاحًا رأسيًا $\frac{\pi}{2}$ وحدة للأعلى.

b. **استخدام البنية** مثّل الدالة الأم $f(\theta) = \text{Cos}^{-1}\,\theta$ بيانيًا على المستوى الإحداثي المبين أدناه باستخدام مستقيم منقط.



c. **استخدام البنية** مثّل $g(\theta)$ بيانيًا على المستوى الإحداثي باستخدام خط متصل.

d. **تقييم مدى الصحة** اشرح كيف يمكنك التحقق من صحة التمثيل البياني لـ $g(\theta)$.
الإجابة النموذجية: تحقق من أن النقطة التي تقع على التمثيل البياني هي حل للمعادلة. على سبيل المثال، تقع النقطة $\left(\frac{1}{2}, \pi\right)$ على التمثيل البياني، و $\text{Cos}^{-1}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \text{Cos}^{-1}(0) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$. إذًا التمثيل البياني صحيح.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

يرتبط هذا الدرس عن كثب مع م.م.ر 6 **(مراعاة الدقة)**. يصف المعيار الطرق التي يتواصل بها الطلاب المهرة رياضيًا مع الآخرين بدقة. في **المثال 2**، يعني ذلك الاهتمام بالتمييز بين $y = \cos\theta$ و $y = \text{Cos}\,\theta$. ومراجعة تعريف $y = \text{Cos}\,\theta$ عند الحاجة للتأكد من تمثيل الدالة $y = \text{Cos}^{-1}\,\theta$ بيانيًا بشكل صحيح. كما أن الطلاب سيحتاجون أيضًا إلى الاهتمام جيدًا باستخدامهم للإشارات في هذا الدرس. يتم مثلاً استخدام إشارة -1 بخط علوي بطريقتين مختلفتين في الرياضيات وينبغي أن يفهم الطلاب أن $y = \text{Cos}^{-1}\,\theta$ لا تعني $y = \frac{1}{\text{Cos}\,\theta}$.

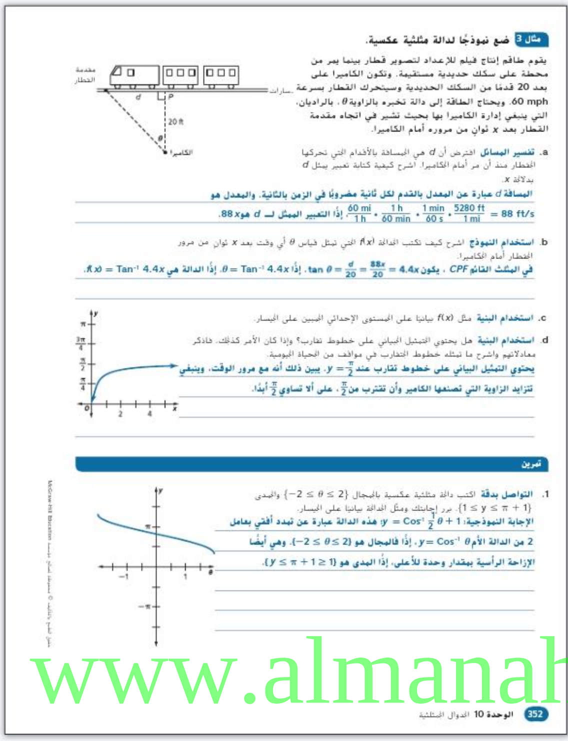
مثال 3

نصيحة للتدريس م.م.ر 1

ذكّر الطلاب عند الضرورة بأن سرعة القطار تتحدد بالكيلومتر في الساعة بينما مسافة الكاميرا من القضبان تتحدد بالأمتار. يعني هذا أن الطلاب سيحتاجون إلى اتخاذ قرار بشأن الوحدات مبكرًا في عملية حل المسألة. شجّع الطلاب على قراءة المسألة بالكامل قبل إجراء أي تحويلات. سيرون أن d هي المسافة التي قطعها القطار بالأمتار، ولهذا فمن المنطقي تحويل سرعة القطار من الكيلومترات في الساعة إلى الأمتار في الثانية.

الأسئلة الداعمة

- ما وجه الارتباط بين d ومعدل القطار والزمن منذ أن مر القطار أمام الكاميرا؟ **d هي المعدل مضروبًا في الزمن.**
- كيف تحوّل الكيلومترات في الساعة إلى أمتار في الثانية؟ **الإجابة النموذجية: اضرب السرعة بقياس الكيلومترات في الساعة في عدة عوامل تحويل: $\frac{1\text{ h}}{60\text{ min}}$ و $\frac{1\text{ min}}{60\text{ s}}$ و $\frac{1000\text{ m}}{1\text{ km}}$.**
- كيف تعرف أن تمثيلك البياني في **الجزء c** منطقي؟ **الإجابة النموذجية: إنه يوضح أن الزاوية تتزايد من 0 راديان إلى $\frac{\pi}{2}$ راديان بدون أن تساوي أبدًا $\frac{\pi}{2}$ راديان، وهو أمر منطقي في سياق موقف الحياة اليومية.**


مثال 3 ضع نموذجًا لدالة مثلثية عكسية.

يقوم طاقم إنتاج فيلم للإعداد لتصوير قطار بينما يمر من محطة على سكك حديدية مستقيمة. وتكون الكاميرا على بعد 20 قدمًا من السكك الحديدية وسيتحرك القطار بسرعة 60 mph. ويحتاج الطاقم إلى دالة تخبره بالزاوية θ، بالراديان، التي ينبغي إدارة الكاميرا بها بحيث تشير في اتجاه مقدمة القطار بعد x ثوانٍ من مروره أمام الكاميرا.

a. **تفسير المسائل** افترض أن d هي المسافة بالأقدام التي تحركها القطار منذ أن مر أمام الكاميرا. اشرح كيفية كتابة تعبير يمثل d بدلالة x.

المسافة d عبارة عن المعدل بالقدم لكل ثانية مضروبًا في الزمن بالثانية. والمعدل هو $\frac{60\text{ mi}}{1\text{ h}} \cdot \frac{1\text{ h}}{60\text{ min}} \cdot \frac{1\text{ min}}{60\text{ s}} \cdot \frac{5280\text{ ft}}{1\text{ mi}} = 88\text{ ft/s}$، إذًا التعبير الممثل لـ d هو $88x$.

b. **استخدام النموذج** اشرح كيف تكتب الدالة $f(x)$ التي تمثل قياس θ أي وقت بعد x ثوانٍ من مرور القطار أمام الكاميرا.

في المثلث القائم CPF، يكون $\tan\theta = \frac{d}{20} = \frac{88x}{20} = 4.4x$. إذًا $\theta = \text{Tan}^{-1}\, 4.4x$. إذًا الدالة هي $f(x) = \text{Tan}^{-1}\, 4.4x$.

c. **استخدام البنية** مثّل $f(x)$ بيانيًا على المستوى الإحداثي المبين على اليسار.

d. **استخدام البنية** هل يحتوي التمثيل البياني على خطوط تقارب؟ وإذا كان الأمر كذلك، فاذكر معادلاتهم واشرح ما تمثله خطوط التقارب في مواقف من الحياة اليومية.

يحتوي التمثيل البياني على خطوط تقارب عند $y = \frac{\pi}{2}$. يبين ذلك أنه مع مرور الوقت، وينبغي تتزايد الزاوية التي تصنعها الكامير وأن تقترب من $\frac{\pi}{2}$، على ألا تساوي $\frac{\pi}{2}$ أبدًا.

تمرين

1. **التواصل بدقة** اكتب دالة مثلثية عكسية بالمجال $\{-2 \le \theta \le 2\}$ والمدى $\{1 \le y \le \pi + 1\}$. برر إجابتك ومثّل الدالة بيانيًا على اليسار.

الإجابة النموذجية: $y = \text{Cos}^{-1}\frac{1}{2}\theta + 1$؛ هذه الدالة عبارة عن تمدد أفقي بعامل 2 من الدالة الأم $y = \text{Cos}^{-1}\theta$. إذًا فالمجال هو $\{-2 \le \theta \le 2\}$. وهي أيضًا الإزاحة الرأسية بمقدار وحدة للأعلى. إذًا المدى هو $\{1 \le y \le \pi + 1\}$.

352 الوحدة 10 الدوال المثلثية

التدريس المتمايز

يمكن أن يستفيد المتعلمون بالطريقة الحسية الحركية من تمثيل الموقف في **المثال 3** سريعًا. يستطيع الطلاب وضع أجسام أو شريط فوق مكاتبهم لتمثيل الكاميرا وقضبان القطار وتحريك قلم بطول القضبان لتمثيل حركة القطار. بينما يفعل الطلاب هذا، اطلب منهم أن يفكروا في المتغيرات الأساسية في المسألة وبلاحظوا كيفية تغيرها. قد يساعد تمثيل المسألة بهذه الطريقة مثلاً الطلاب على فهم أن θ تبدأ من 0 راديان عندما تكون $x = 0$ ثانية ثم تتزايد مع اقتراب القياس من $\frac{\pi}{2}$ راديان.

تدريب

في **التمرين 1**، يكتب الطلاب معادلة من متغيرين لتمثيل علاقة بين الكميات.

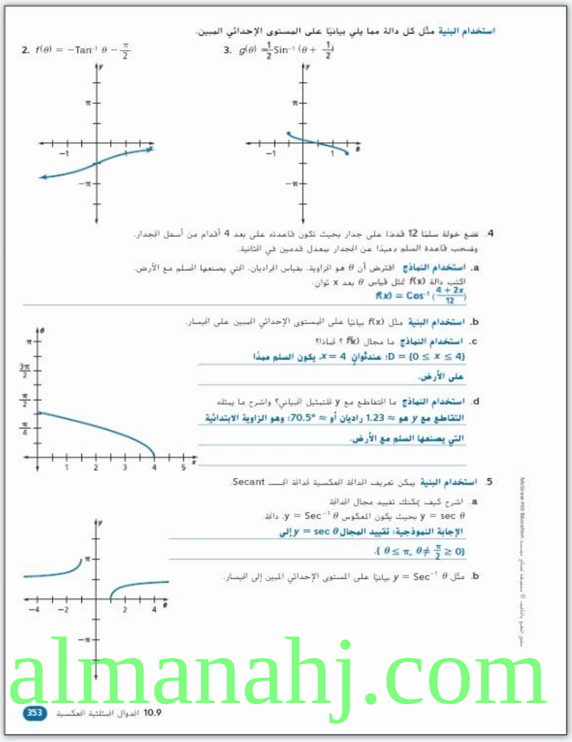
في **التمرينين 2** و **3**. يمثل الطلاب الدوال بيانيًا على المستوى الإحداثي.

في **التمرين 4**، يكتب الطلاب معادلة من متغيرين لتمثيل العلاقة بين الكميات في موقف من الحياة اليومية.

يتطلب **التمرين 5** من الطلاب أن يكتبوا دالة ثم يمثلوها بيانيًا على المستوى الإحداثي.

عرض المعايير

تمرين	م.م.ر
1	6
2-3	7
4	4, 7
5	7



استخدام البنية مثّل كل دالة مما يلي بيانيًا على المستوى الإحداثي المبين.

2. $f(\theta) = -\mathrm{Tan}^{-1}\,\theta - \frac{\pi}{2}$

3. $g(\theta) = \frac{1}{2}\mathrm{Sin}^{-1}\left(\theta + \frac{1}{2}\right)$

4. تضع خولة سلمًا 12 قدمًا على جدار بحيث تكون قاعدته على بعد 4 أقدام من أسفل الجدار. وتسحب قاعدة السلم بعيدًا عن الجدار بمعدل قدمين في الثانية.

a. **استخدام النماذج** افترض أن θ هو الزاوية، بقياس الراديان، التي يصنعها السلم مع الأرض. اكتب دالة $f(x)$ تمثل قياس θ بعد x ثوان.
$f(x) = \mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{4+2x}{12}\right)$

b. **استخدام البنية** مثل $f(x)$ بيانيًا على المستوى الإحداثي المبين على اليسار.

c. **استخدام النماذج** ما مجال $f(x)$ ؟ لماذا؟
$D = \{0 \le x \le 4\}$؛ عند 4 ثوانٍ $x = 4$، يكون السلم ممدًا على الأرض.

d. **استخدام النماذج** ما التقاطع مع y للتمثيل البياني؟ واشرح ما يمثله
التقاطع مع y هو ≈ 1.23 راديان أو $\approx 70.5°$؛ وهو الزاوية الابتدائية التي يصنعها السلم مع الأرض.

5. **استخدام البنية** يمكن تعريف الدالة العكسية لدالة الـ Secant.

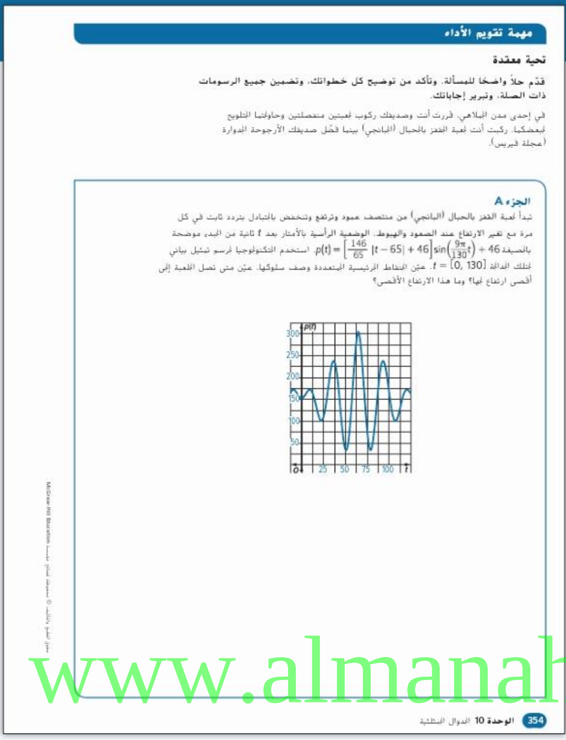
a. اشرح كيف يمكنك تقييد مجال الدالة $y = \sec\theta$ بحيث يكون المعكوس $y = \mathrm{Sec}^{-1}\,\theta$، دالة.
الإجابة النموذجية: تقييد المجال $y = \sec\theta$ إلى $\{0 \le \theta \le \pi, \theta \ne \frac{\pi}{2}\}$.

b. مثّل $y = \mathrm{Sec}^{-1}\,\theta$ بيانيًا على المستوى الإحداثي المبين إلى اليسار.

أخطاء شائعة

في **التمرين 4**. قد يكتب بعض الطلاب الدالة بالصورة $f(x) = \mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{2x}{12}\right)$ أو $f(x) = \mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{x}{6}\right)$. الطلاب الذين يقعون في هذا الخطأ لا يحتسبون المسافة الأولية لقاعدة السلم من الجدار. شجّع الطلاب على رسم مخطط والكتابة عليه لتوضيح الموضع الأولي للسلم واسألهم عما إذا كانت كل المعلومات المهمة في المخطط مدرجة في نموذجهم الرياضي.

10 مهمة تقويم الأداء


مهمة تقويم الأداء

تحية معقدة

قدّم حلاً واضحًا للمسألة. وتأكد من توضيح كل خطواتك، وتضمين جميع الرسومات ذات الصلة، وتبرير إجاباتك.

في إحدى مدن الملاهي، قررت أنت وصديقك ركوب لعبتين منفصلتين وحاولتما التلويح لبعضكما. ركبت أنت لعبة القفز بالحبال (البانجي) بينما فضّل صديقك الأرجوحة الدوارة (عجلة فيريس).

الجزء A

تبدأ لعبة القفز بالحبال (البانجي) من منتصف عمود وترتفع وتنخفض بالتبادل بتردد ثابت في كل مرة مع تغير الارتفاع عند الصعود والهبوط. الوضعية الرأسية بالأمتار بعد t ثانية من البدء موضحة بالصيغة $p(t) = \left[\frac{146}{65}|t-65| + 46\right]\sin\left(\frac{9\pi}{130}t\right) + 46$. استخدم التكنولوجيا لرسم تمثيل بياني لتلك الدالة $t = [0, 130]$. عيّن النقاط الرئيسية المتعددة وصف سلوكها. عيّن متى تصل اللعبة إلى أقصى ارتفاع لها؟ وما هذا الارتفاع الأقصى؟

تحية معقدة

سيبني الطلاب و/أو يصفون دوال مثلثية مرتبطة بارتفاع قضبان في حديقة الملاهي ويقارنون بينها.

المعايير

معايير الممارسات في الرياضيات: الوحدة 10

مهمة تقويم الأداء تُعزز استيعاب الممارسة الرياضية م.م.ر 1 و م.م.ر 3.

بداية سريعة

تبدأ المهمة بمعادلة صعبة وتطلب من الطلاب أن يمثلوها بيانيًا ويصفوها. ينبغي على الطلاب أن يستخدموا المعرفة التي لديهم بالدوال المثلثية والتقنية لتمثيلها بيانيًا بنجاح. شجّع الطلاب على استكشاف ما يلي.

- ما فترة دالة sine في المعادلة؟ **$\frac{260\pi}{9}$.**
- كيف تختلف سعة الدالة؟ **تتراوح بين 0 و 46 مع انتقال t من 0 إلى 130.**
- متى ستصل السعة إلى قيمة عظمى؟ **السعة دالة قيمة مطلقة. تصل إلى قيمة عظمى تبلغ 46 عند $t = 65$.**

ينبغي أن يتمكن الطلاب من استخدام هذه الأفكار إلى جانب التقنية لرسم التمثيل البياني بدقة. يمكنهم أيضًا أن يحاولوا رسم دالة السعة ودالة sine بشكل منفصل ثم يضربوا القيم المتعددة كأسلوب مختلف.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

ترتبط مهمة تقويم الأداء هذه عن قرب مع م.م.ر 1 **(فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها)**. كما هو مذكور في قسم المقدمة، يتضمن التقديم المبدئي معادلة صعبة. مطلوب من الطلاب أن يرسموا على الفور تمثيلاً بيانيًا ويصفوا سلوكه. ينبغي على الطلاب أن يضعوا في اعتبارهم ما يعرفونه عن دوال sine العامة كنقطة مبدئية للحل، ويجربوا حالات خاصة وأشكالاً أبسط من المعادلة الأصلية لكي يتخيلوا التمثيل البياني. ينبغي على الطلاب أن يغيروا نافذة الرؤية على حاسبات التمثيل البياني ليحصلوا على المعلومات التي يحتاجونها لحل كل جزء في المهمة.

نصيحة للتدريس م.م.ر 3

يقدم **الجزء A** و **B** سياقًا نقديًا لمناقشة كيفية التعامل مع رسم تمثيل بياني. وكما تنص م.م.ر 3 **(بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين).** يستطيع الطلاب العمل على تنمية قدرتهم على "تبرير استنتاجاتهم ونقلها للآخرين والرد على فرضيات الآخرين". في **الجزء A**، يجب على الطلاب إدخال الدالة بشكل صحيح والتأكد من أنها في وضع الراديان. في **الجزء B**، يجب على الطلاب أن يتوصلوا إلى المعادلة بأنفسهم. ينبغي على الطلاب أن يقارنوا الإجابات مع **الجزء B** ليروا ما إذا كان قد تم التوصل إلى حلول صحيحة مختلفة (مثل دالة sine ودالة cosine).

الجزء B

يبلغ نصف قطر الأرجوحة الدوارة 45 m. وتقع أسفل نقطة فيها على بعد 2 m من الأرض. وتصنع دورة كاملة كل 40 ثانية. اكتب دالة للارتفاع الرأسي h لنقطة على الأرجوحة في وقت معين t بحيث تبدأ عندها على ارتفاع 2 m.

الجزء C

إذا بدأت الأرجوحة الدوارة في نفس وقت بدء لعبة القفز بالحبال. وبفرض استمرار اللعبتين، فكم عدد المرات التي تكون فيها أنت وصديقك في الارتفاع نفسه في مدة قدرها 3 دقائق من الركوب؟ ومتى تستطيعان التلويح لبعضكما من نفس الارتفاع؟

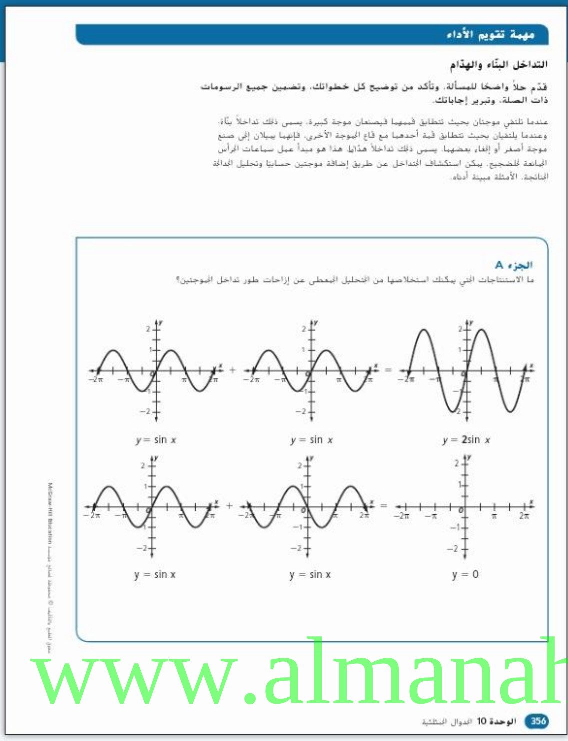
معايير رصد الدرجات

الجزء	العظمى النقاط	إجابة تستحق الدرجة الكاملة
A	4	انظر *دليل الطالب التفاعلي* للاطلاع على عينة تمثيل بياني. تشمل النقاط الأساسية (0, 46) و (65, 92). إنها دالة sine تتذبذب بسعة تحددها دالة القيمة المطلقة في المعادلة. لها ارتفاع أقصى يبلغ 92 m وسيتم الوصول إليه عند $t = 65$.
B	4	$h(t) = 45\left(\sin\left(\frac{\pi}{20}t - \frac{\pi}{2}\right)\right) + 47$
C	2	عن طريق التمثيل البياني لمعادلتين، يمكننا أن نرى أنهما ستكونان بالطول نفسه 9 مرات في أول 180 s (3 min) وأولها يقع بعد 10.7 s.
الإجمالي	10	

10 مهمة تقويم الأداء

التداخل البنّاء والهدّام

سيستخدم الطلاب معلومات عن التدخل البناء والهدام للأمواج ليتوصلوا إلى استنتاجات ويستخرجوا دوال مثلثية.



مهمة تقويم الأداء

التداخل البنّاء والهدّام

قدّم حلاً واضحًا للمسألة، وتأكد من توضيح كل خطواتك، وتضمين جميع الرسومات ذات الصلة، وتبرير إجاباتك.

عندما تلتقي موجتان بحيث تتطابق قممهما فيصنعان موجة كبيرة، يسمى ذلك تداخلاً بنّاءً. وعندما يلتقيان بحيث تتطابق قمة أحدهما مع قاع الموجة الأخرى، فإنهما يميلان إلى صنع موجة أصغر أو إلغاء بعضهما. يسمى ذلك تداخلاً هدّامًا. هذا هو مبدأ عمل سماعات الرأس المانعة للضجيج. يمكن استكشاف التداخل عن طريق إضافة موجتين حسابيًا وتحليل الدالة الناتجة. الأمثلة مبينة أدناه.

الجزء A

ما الاستنتاجات التي يمكنك استخلاصها من التحليل المعطى عن إزاحات طور تداخل الموجتين؟

المعايير

معايير الممارسات الرياضية: تدعم مهمة تقويم الأداء بالوحدة 8 الممارسات الرياضية م. م. ر 4 و م. م. ر 5.

بداية سريعة

تبدأ المهمة بتقديم مفهوم قد يكون جديدًا على بعض الطلاب. قد يكون ما يلي مفيدًا في مساعدة الطلاب على فهم طريقة عمل تدخلهم.

- كيف يمكنك إعادة كتابة $y = \sin x + \sin x$؟ وهل هذا منطقي بالنظر إلى طريقة عمل التدخل؟ **$y = 2\sin x$، وهو ما يبدو منطقيًا لأننا نتوقع أن تتدخل بشكل بناء لإنشاء موجة بضعف السعة.**
- كيف يمكنك إعادة كتابة $y = \sin x + \sin(x + \pi)$؟ **$y = 0$؛ يمكن استخدام متطابقة جمع الزوايا للبرهنة على هذا.**

ينبغي على الطلاب أن يفهموا طريقة عمل التدخل قبل البدء.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

ترتبط مهمة تقويم الأداء هذه عن قرب مع م.م.ر 5 **(استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية)**. عند التعامل مع الكسور، وخاصة من خلال الجمع والطرح، كما يحدث عند تحديد فترات للدالة في هذه المهمة، غالبًا ما يسارع الطلاب إلى استخدام حاسبة لتجنب المقامات الشائعة. هذا أسلوب جيد، لكن استخدام الكسور العشرية ليس فقط غير تقليدي ومعيق بالنسبة إلى الدوال المثلثية، بل إن إدراج باي كعدد بدلاً من مضاعف لا يقتصر أثره على تعقيد الرياضيات، لكنه يجعل العمل أقل سهولة ويقضي أيضًا على الطبيعة الدقيقة للتعابير التي تتضمن باي.

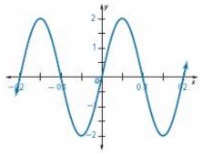
نصيحة للتدريس

م.م.ر 4

لا تذكر المهمة صراحة أنه يمكن التوصل إلى التداخل الناتج عن موجتين بمجرد جمع معادلتيهما. تذكر م.م.ر 4 **(استخدام نماذج الرياضيات)** أن الطلاب المهرة رياضيًا "يستطيعون تحليل العلاقات رياضيًا للتوصل إلى استنتاجات. يفسرون نتائجهم الرياضية بشكل منتظم في سياق الموقف". تم تصميم المهمة بحيث يلاحظ الطلاب كيفية التوصل إلى نمط تدخل بشكل عام. تعطي المقدمة معلومات إضافية بشأن مساعدة الطلاب على تحقيق هذا الهدف العام.

الجزء B

لاحظ موجتي الـ sine الأولى التي تتردد 5 مرات كل ثانية لها خط متوسط عند $y = 0$، وسعة تساوي 3. إذ تشمل نقطة $(\frac{1}{20}, 3)$، وتتردد الثانية 5 مرات كل ثانية عند خط متوسط $y = 0$ وتبلغ سعتها 1 وتشمل نقطة $(\frac{1}{20}, -1)$. حدد الاختلاف في إزاحتي طور تلك الموجتين. ارسم تمثيلاً بيانيًا لتداخلهما. واذكر اسم التداخل، واستخلص نتيجة عن سعة تداخل الموجتين بهذه الطريقة.



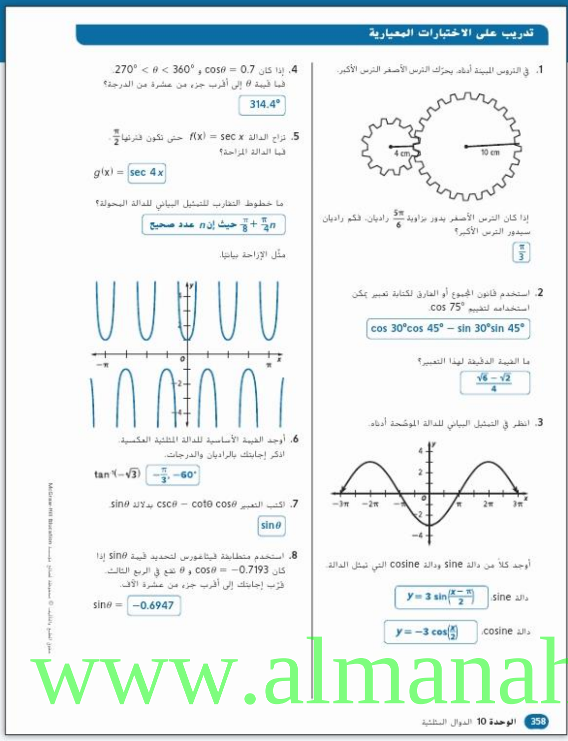
الجزء C

لاحظ الموجة الناتجة عن $y = \frac{2}{5}\sin(\frac{2\pi}{3}x - \frac{\pi}{3})$. اشتق موجة cosine التي ستلغي تلك الموجة عن طريق التداخل الهدّام.

معايير رصد الدرجات

الجزء	النقاط العظمى	إجابة تستحق الدرجة الكاملة
A	2	يجب أن يكون للأمواج إزاحة الطور نفسها للتدخل بشكل بناء. إذا كانت لها إزاحة أطوار مقابلة بمقدار π وهي من نفس نوع الدوال المثلثية، فسوف تتدخل بشكل هدام.
B	4	الموجتان هما $y = 3\sin 10\pi x$ و $y = \sin(10\pi x + \pi)$. إزاحة الطور هي π. ولذلك تتدخلان بشكل هدام. نستطيع أن نرى من التمثيل البياني أن التدخل الهدام يؤدي إلى تناقص سعة الموجة الناتجة إلى 2. انظر دليل الطالب التفاعلي للاطلاع على عينة تمثيل بياني.
C	4	موجة sine التي ستلغي موجة sine المذكورة لها ذات التردد والفترة لكن مع إزاحة طور تبلغ π. إذًا $y = \frac{2}{5}\sin\left(\frac{2\pi}{3}x + \frac{2\pi}{3}\right)$. موجة cosine المكافئة $y = \frac{2}{5}\cos\left(-\frac{2\pi}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$. هناك الكثير من الإجابات لدالة cosine صحيحة.
الإجمالي	10	

تدريب على الاختبارات المعيارية


تدريب على الاختبارات المعيارية

1. في التروس المبينة أدناه، يحرّك الترس الأصغر الترس الأكبر.

4 cm

10 cm

إذا كان الترس الأصغر يدور بزاوية $\frac{5\pi}{6}$ راديان، فكم راديان سيدور الترس الأكبر؟

$\boxed{\frac{\pi}{3}}$

2. استخدم قانون المجموع أو الفارق لكتابة تعبير يمكن استخدامه لتقييم $\cos 75°$.

$\boxed{\cos 30°\cos 45° - \sin 30°\sin 45°}$

ما القيمة الدقيقة لهذا التعبير؟

$\boxed{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

3. انظر في التمثيل البياني للدالة الموضحة أدناه.

أوجد كلاً من دالة sine ودالة cosine التي تمثل الدالة.

دالة sine: $\boxed{y = 3\sin\left(\frac{x-\pi}{2}\right)}$

دالة cosine: $\boxed{y = -3\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$

4. إذا كان $\cos\theta = 0.7$ و $270° < \theta < 360°$. فما قيمة θ إلى أقرب جزء من عشرة من الدرجة؟

$\boxed{314.4°}$

5. تزاح الدالة $f(x) = \sec x$ حتى تكون فترتها $\frac{\pi}{2}$. فما الدالة المزاحة؟

$g(x) = \boxed{\sec 4x}$

ما خطوط التقارب للتمثيل البياني للدالة المحولة؟

$\boxed{\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}n}$ حيث إن n عدد صحيح

مثّل الإزاحة بيانيًا.

6. أوجد القيمة الأساسية للدالة المثلثية العكسية. اذكر إجابتك بالراديان والدرجات.

$\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ $\boxed{-\frac{\pi}{3}, -60°}$

7. اكتب التعبير $\csc\theta - \cot\theta\cos\theta$ بدلالة $\sin\theta$.

$\boxed{\sin\theta}$

8. استخدم متطابقة فيثاغورس لتحديد قيمة $\sin\theta$ إذا كان $\cos\theta = -0.7193$ و θ تقع في الربع الثالث. قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة الآف.

$\sin\theta = \boxed{-0.6947}$

358 الوحدة 10 الدوال المثلثية

تشخيص الأخطاء

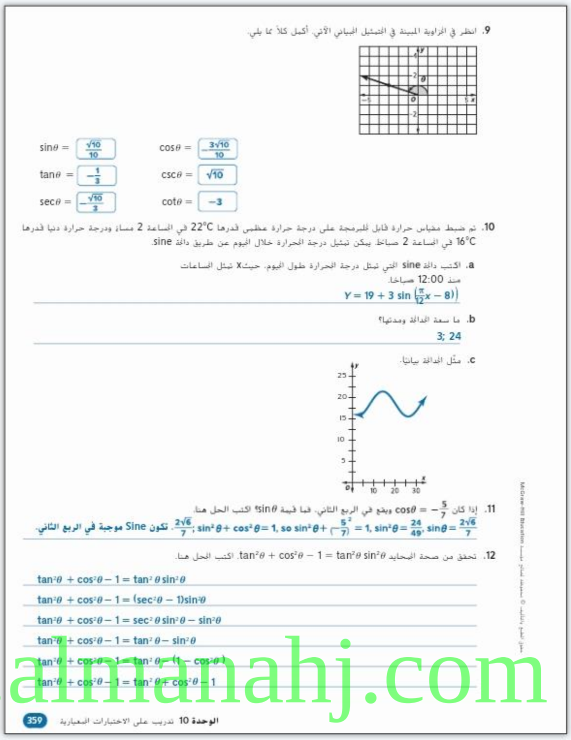
الطلاب الذين أعطوا إجابة خاطئة على **العنصر 1** ربما يكونون قد اعتقدوا أن هذه علاقة تناسب. تعامل مع خطوات الحل مع توضيح كيفية تشابه أطوال القوس بالنسبة لكلا الترسين. لكن هذا لا يؤدي إلى علاقة تناسب بين نصفي القطر وقياسات الزوايا.

الطلاب الذين يحددون خطوطًا مقاربة غير صحيحة في **العنصر 5** قد يجدون صعوبة في تعميم النمط. اجعلهم يضعوا أولاً قائمة بقيم x حيث تقع الخطوط المقاربة. اجعلهم يحددوا أول خط مقارب على يمين نقطة الأصل والمسافة إلى الخط المقارب التالي. أوضح لهم كيفية استخدام هذه القيم في بناء قانون عام.

الطلاب الذين يجدون صعوبة في **العنصر 7** قد لا يكونون متأكدين من كيفية التعامل مع المسألة. اجعلهم أولاً يعيدوا كتابة التعبير باستخدام دالتي sine و cosine. ثم ينبغي أن يحددوا ما إذا كان يمكن تحليل التعبير إلى العوامل أو ما إذا كان يمكن تطبيق أي من تطابقات فيثاغورس. ذكّرهم بأنهم قد يضطرون إلى تجربة عدة أساليب قبل أن يجدوا أسلوبًا ينجح.

إستراتيجية خوض الاختبار

قد يجد الطلاب صعوبة في التمثيل البياني لدالة secant في **العنصر 5**. ذكّرهم بأن يرسموا دالة cosine المقابلة بلون خفيف أولاً ثم يستخدموا تلك الدالة للمساعدة في التمثيل البياني لدالة secant.


9. انظر في الزاوية المبينة في التمثيل البياني الآتي. أكمل كلاً مما يلي.

$\sin\theta = \frac{\sqrt{10}}{10}$ $\cos\theta = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$

$\tan\theta = -\frac{1}{3}$ $\csc\theta = \sqrt{10}$

$\sec\theta = -\frac{\sqrt{10}}{3}$ $\cot\theta = -3$

10. تم ضبط مقياس حرارة قابل للبرمجة على درجة حرارة عظمى قدرها 22°C في الساعة 2 مساءً ودرجة حرارة دنيا قدرها 16°C في الساعة 2 صباحاً. يمكن تمثيل درجة الحرارة خلال اليوم عن طريق دالة sine.

a. اكتب دالة sine التي تمثل درجة الحرارة طول اليوم، حيث x تمثل الساعات منذ 12:00 صباحاً.

$Y = 19 + 3\sin\left(\frac{\pi}{12}(x - 8)\right)$

b. ما سعة الدالة ومدتها؟

3; 24

c. مثّل الدالة بيانياً.

11. إذا كان $\cos\theta = -\frac{5}{7}$ ويقع في الربع الثاني، فما قيمة $\sin\theta$؟ اكتب الحل هنا.

$\sin\theta = \frac{2\sqrt{6}}{7}$; $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, so $\sin^2\theta + \left(-\frac{5}{7}\right)^2 = 1$, $\sin^2\theta = \frac{24}{49}$, $\frac{2\sqrt{6}}{7}$. تكون Sine موجبة في الربع الثاني.

12. تحقق من صحة المتطابقة $\tan^2\theta + \cos^2\theta - 1 = \tan^2\theta\sin^2\theta$. اكتب الحل هنا.

$\tan^2\theta + \cos^2\theta - 1 = \tan^2\theta\sin^2\theta$

$\tan^2\theta + \cos^2\theta - 1 = (\sec^2\theta - 1)\sin^2\theta$

$\tan^2\theta + \cos^2\theta - 1 = \sec^2\theta\sin^2\theta - \sin^2\theta$

$\tan^2\theta + \cos^2\theta - 1 = \tan^2\theta - \sin^2\theta$

$\tan^2\theta + \cos^2\theta - 1 = \tan^2\theta - (1 - \cos^2\theta)$

$\tan^2\theta + \cos^2\theta - 1 = \tan^2\theta + \cos^2\theta - 1$

تشخيص الأخطاء

الطلاب الذين يكتبون دالة غير صحيحة **للعنصر 10a** ربما يكونون قد وجدوا صعوبة في كتابة دالة sine بفترة تبلغ 24. أوضح أنه بما أن دالة sine لها فترة تبلغ 2π، فإنهم بحاجة إلى التوصل إلى العدد b حيث إن $24 = 2\pi \div b$. ساعدهم في حل هذه المعادلة واستخدام القيمة في دالة.

معايير رصد الدرجات

العنصر 10

[4] دالة وسعة وفترة وتمثيل بياني صحيحة

[3] خطأ بسيط في الدالة، لكن السعة والفترة والتمثيل البياني للدالة المذكورة صحيحة أو خطأ بسيط في السعة أو الفترة أو التمثيل البياني

[2] دالة صحيحة، لكن **الجزأين b و c** غير صحيحين أو فارغين أو خطأ في الدالة و **الجزأين b و c** لا يطابقان الدالة المذكورة

[1] الدالة صحيحة جزئيًا

[0] لا توجد إجابة أو أن الإجابة والاستنتاج خطأ

العنصر 11

[2] إجابة صحيحة وتم عرض العمل باستخدام متطابق فيثاغورس

[3] إجابة صحيحة، لكن تم استخدام أسلوب مختلف أو خطأ بسيط في الحساب

[0] لا توجد إجابة أو أن الإجابة والاستنتاج خطأ

العنصر 12

[2] العمل كامل وصحيح

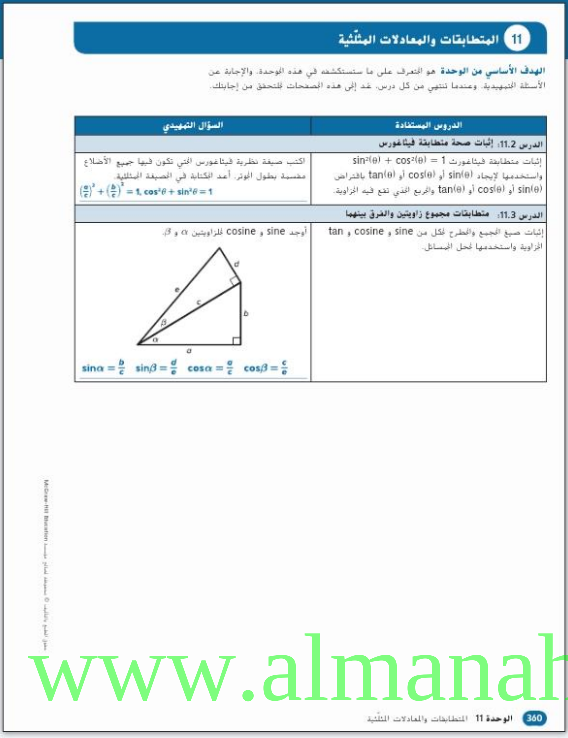
[1] العمل تنقصه خطوات

[0] لا توجد إجابة أو أخطاء كبيرة في العمل

إستراتيجية خوض الاختبار

بالنسبة **للعنصر 10**. قد يجد الطلاب أنه من الأسهل أن يكتبوا الدالة إذا رسموا تمثيلاً بيانيًا لها أولاً. سيساعدهم هذا على تخيل السعة والإزاحة الرأسية وإزاحة الطور والفترة، ويمكن استخدامهم بعد ذلك في كتابة الدالة.

11 الهدف الأساسي من الوحدة



11 المتطابقات والمعادلات المثلّثية

الهدف الأساسي من الوحدة هو التعرف على ما ستستكشفه في هذه الوحدة. والإجابة عن الأسئلة التمهيدية. وعندما تنتهي من كل درس، عُد إلى هذه الصفحات للتحقق من إجابتك.

الدروس المستفادة	السؤال التمهيدي
الدرس 11.2: إثبات صحة متطابقة فيثاغورس	
إثبات متطابقة فيثاغورث $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ واستخدمها لإيجاد $\sin(\theta)$ أو $\cos(\theta)$ أو $\tan(\theta)$ بافتراض $\sin(\theta)$ أو $\cos(\theta)$ أو $\tan(\theta)$ والربع الذي تقع فيه الزاوية.	اكتب صيغة نظرية فيثاغورس التي تكون فيها جميع الأضلاع مقسمة بطول الوتر. أعد الكتابة في الصيغة المثلثية. $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1, \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$
الدرس 11.3: متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما	
إثبات صيغ الجمع والطرح لكل من sine و cosine و tan الزاوية واستخدمها لحل المسائل.	أوجد sine و cosine للزاويتين α و β. $\sin\alpha = \frac{b}{c}$ $\sin\beta = \frac{d}{e}$ $\cos\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\beta = \frac{c}{e}$

استخدام دليل الطالب التفاعلي

يمكن استخدام *دليل الطالب التفاعلي* (ISG) إلى جانب *الرياضيات للصف العاشر المسار المتقدم*.

درس دليل الطالب التفاعلي	الرياضيات للصف 10- المسار المتقدم
11.2	الدرس 2-11
11.3	الدرس 3-11

نصيحة للتدريس م.م.ر 4

يمكن من خلال السؤال التمهيدي للدرس 11.2 تعريف الطلاب بأحد نماذج م م ر 4 (تمثيل النماذج باستخدام الرياضيات). وضّح أن السرعة هي المسافة مقسومة على الزمن.

$$\text{المسافة} = \frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}}$$

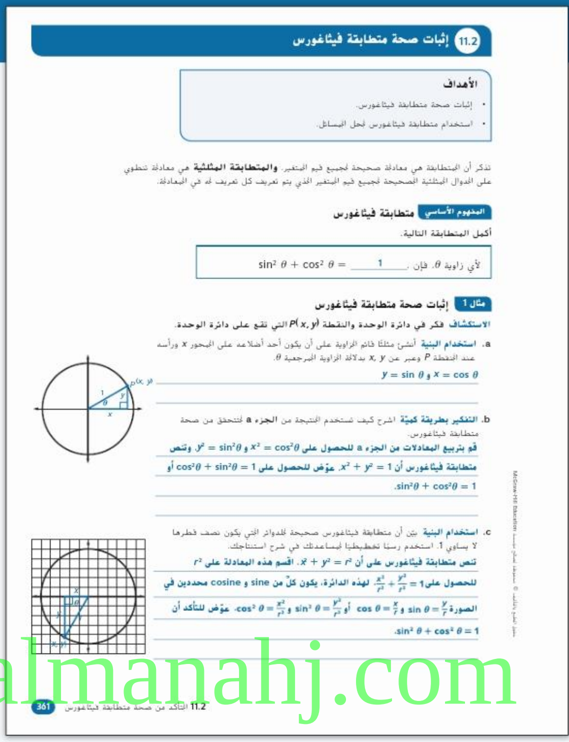
المسافة في العادة عبارة عن قياس خط مستقيم. إلا أنه مع المسار الدائري، تكون مسافة القياس منحنية.

يعني قياس السرعة بالراديان في الساعة تحويل قياس الزاوية إلى قياس الراديان المقابل. كما أن فترة العشرين دقيقة تحتاج إلى تحويلها لساعات. نتائج التحليل البُعدي في هذا

$$\frac{25°}{20\text{ min}} \cdot \left(\frac{2\pi}{360°}\right) \cdot \left(\frac{60\text{ min}}{\text{hr}}\right)$$

105 / 87

11.2 إثبات صحة متطابقة فيثاغورس



11.2 إثبات صحة متطابقة فيثاغورس

الأهداف

- إثبات صحة متطابقة فيثاغورس.
- استخدام متطابقة فيثاغورس لحل المسائل.

تذكر أن المتطابقة هي معادلة صحيحة لجميع قيم المتغير. **والمتطابقة المثلثية** هي معادلة تنطوي على الدوال المثلثية الصحيحة لجميع قيم المتغير الذي يتم تعريف كل تعريف له في المعادلة.

المفهوم الأساسي متطابقة فيثاغورس

أكمل المتطابقة التالية.

لأي زاوية θ، فإن $\sin^2\theta + \cos^2\theta =$ ___1___.

مثال 1 إثبات صحة متطابقة فيثاغورس

الاستكشاف فكر في دائرة الوحدة والنقطة $P(x, y)$ التي تقع على دائرة الوحدة.

a. **استخدام البنية** أنشئ مثلثًا قائم الزاوية على أن يكون أحد أضلاعه على المحور x ورأسه عند النقطة P وعبر عن x, y بدلالة الزاوية المرجعية θ.

$y = \sin\theta$ و $x = \cos\theta$

b. **التفكير بطريقة كميّة** اشرح كيف تستخدم النتيجة من **الجزء a** لتتحقق من صحة متطابقة فيثاغورس.

قم بتربيع المعادلات من الجزء a للحصول على $x^2 = \cos^2\theta$ و $y^2 = \sin^2\theta$. وتنص متطابقة فيثاغورس أن $x^2 + y^2 = 1$. عوّض للحصول على $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ أو $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

c. **استخدام البنية** بيّن أن متطابقة فيثاغورس صحيحة للدوائر التي يكون نصف قطرها لا يساوي 1. استخدم رسمًا تخطيطيًا لمساعدتك في شرح استنتاجك.

تنص متطابقة فيثاغورس على أن $x^2 + y^2 = r^2$. اقسم هذه المعادلة على r^2 للحصول على $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$. لهذه الدائرة، يكون كلّ من sine و cosine محددين في الصورة $\sin\theta = \frac{y}{r}$ و $\cos\theta = \frac{x}{r}$ أو $\sin^2\theta = \frac{y^2}{r^2}$ و $\cos^2\theta = \frac{x^2}{r^2}$. عوّض للتأكد أن $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

11.2 التأكد من صحة متطابقة فيثاغورس 361

المعايير

معايير الممارسات الرياضية:
1, 2, 3, 5, 6, 7

المتطلبات الأساسية

- استخدام الدوال المثلثية ودائرة الوحدة
- استخدام متطابقات المعكوس الضربي
- استخدام المتطابقات النسبية
- تحليل عوامل الصيغ التربيعية

مثال 1

نصيحة للتدريس م.م.ر 7

ناقش كيفية تمثيل حساب المثلثات لرابط بين الجبر والهندسة. اجعل الطلاب يتذكروا عملهم باستخدام المثلثات قائمة الزاوية ونظرية فيثاغورس. اشرح أنه لتحقيق التوافق، ينبغي وضع المثلث قائم الزاوية بحيث يكون أحد أضلاعه على المحور الأفقي x.

الأسئلة الداعمة

- باستخدام متطابقة فيثاغورس، ما الذي يمكن استنتاجه عن أي نقطة على دائرة يقع مركزها عند نقطة الأصل؟ **أي نقطة (x, y) على دائرة نصف قطرها r ويقع مركزها عند نقطة الأصل ستحقق $x^2 + y^2 = r^2$. هذه هي المعادلة القياسية للدائرة.**
- هل الربع الذي يُرسم فيه المثلث أمر مهم؟ **لا، فلن يؤثر ذلك على التحقق من متطابقة فيثاغورس، إذ إن جميع النسب مربعة في المتطابقة.**

معلومات أساسية رياضية

يمثل حساب المثلثات نقطة تقاطع بين اللغة الرمزية في الجبر والأشكال البصرية في الهندسة. يجب على الطلاب أن يجمعوا بين نظام الإحداثيات المستطيلة والدائرة والمثلث قائم الزاوية لتطوير متطابقة فيثاغورس وفهمها. هناك الكثير من الاستخدامات في الحياة اليومية لحساب المثلثات ويمكن استخدام المتطابقات في الكثير من المواقف لإعادة كتابة أو تبسيط التعابير التي تتضمن دوال مثلثية.

سوف يتطرق الطلاب بمعدل أكثر لاستخدام المتطابقات المثلثية لاحقًا في هذه الوحدة وفي الدورات المتقدمة مثل حساب التفاضل والتكامل. يشيع استخدام المتطابقات في الكثير من المجالات مثل الفيزياء والهندسة وبرمجة الحاسوب.

مثال 2

نصيحة للتدريس م.م.ر 1

اطلب من الطلاب أن يتذكروا كلاً من المتطابقات الضربية والنسبية. أوضح أنهم قد يحتاجون إلى استخدام هذه المتطابقات إلى جانب متطابقة فيثاغورس على حسب النسب الداخلة في المسألة.

ناقش تحليل المعادلات التربيعية إلى عوامل لتجهيزها من أجل **الجزء c** في **المثال 2**. ذكّرهم بكيفية حل المعادلات النسبية عن طريق الضرب للتخلص من المقام.

الأسئلة الداعمة

- ما قيمة $(\sqrt{5})^2$ و $\left(\frac{2}{3}\right)^2$؟ $(\sqrt{5})^2 = 5; \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$
- هل ينبغي أن تقبل دائمًا بحلين لمعادلة تربيعية؟ **لا؛ تحقق من كلا الحلين على أساس الشروط والقيود الواردة في المسألة.**

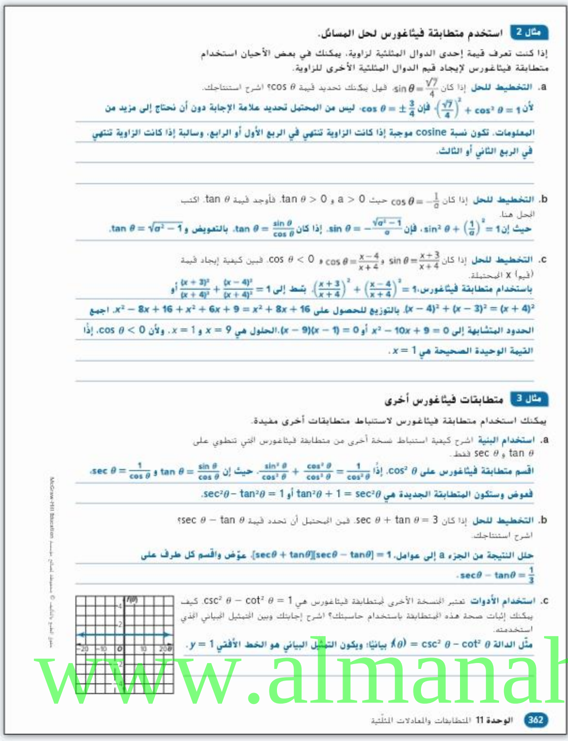
مثال 3

نصيحة للتدريس م.م.ر 7

اشرح أن الطلاب قد يكون أمامهم عمل أكثر إذا كانت المسألة تتضمن دوال مثلثية بخلاف sine و cosine. إذا كانوا يستطيعون التوصل إلى المتطابقات باستخدام تلك الدوال الأخرى، فقد يتمكنون من حل المسائل بسرعة أكثر.

الأسئلة الداعمة

- كيف يرتبط كل من القاطع وقاطع التمام وظل التمام بالدوال المثلثية الأخرى؟
$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \csc x = \frac{1}{\sin x},$
$\cot x = \frac{1}{\tan x}$
- كيف يمكنك التحقق من المتطابقة في **الجزء c** جبريًا؟ **أقسِمُ متطابقة فيثاغورس على $\sin^2\theta$ وأطرحُ $\cot^2\theta$ من كل طرف.**



مثال 2 استخدم متطابقة فيثاغورس لحل المسائل.

إذا كنت تعرف قيمة إحدى الدوال المثلثية لزاوية، يمكنك في بعض الأحيان استخدام متطابقة فيثاغورس لإيجاد قيم الدوال المثلثية الأخرى للزاوية.

a. **التخطيط للحل** إذا كان $\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$ فهل يمكنك تحديد قيمة $\cos\theta$؟ اشرح استنتاجك.
لأن $\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$، فإن $\cos\theta = \pm\frac{3}{4}$. ليس من المحتمل تحديد علامة الإجابة دون أن نحتاج إلى مزيد من المعلومات. تكون نسبة cosine موجبة إذا كانت الزاوية تنتهي في الربع الأول أو الرابع، وسالبة إذا كانت الزاوية تنتهي في الربع الثاني أو الثالث.

b. **التخطيط للحل** إذا كان $\cos\theta = -\frac{1}{a}$ حيث $a > 0$ و $\tan\theta > 0$، فأوجد قيمة $\tan\theta$. اكتب الحل هنا.
حيث إن $1 = \left(\frac{1}{a}\right)^2 + \sin^2\theta$، فإن $\sin\theta = -\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$. إذا كان $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$. بالتعويض و $\tan\theta = \sqrt{a^2-1}$.

c. **التخطيط للحل** إذا كان $\sin\theta = \frac{x+3}{x+4}$ و $\cos\theta = \frac{x-4}{x+4}$، و $\cos\theta < 0$. فبين كيفية إيجاد قيمة (قيم) x المحتملة.
باستخدام متطابقة فيثاغورس، $\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^2 + \left(\frac{x+3}{x+4}\right)^2 = 1$. بسّط إلى $\frac{(x-4)^2}{(x+4)^2} + \frac{(x+3)^2}{(x+4)^2} = 1$ أو $(x-4)^2 + (x-3)^2 = (x+4)^2$. بالتوزيع للحصول على $x^2 - 8x + 16 + x^2 + 6x + 9 = x^2 + 8x + 16$. اجمع الحدود المتشابهة إلى $x^2 - 10x + 9 = 0$ أو $(x-9)(x-1) = 0$. الحلول هي $x = 9$ و $x = 1$. ولأن $\cos\theta < 0$، إذًا القيمة الوحيدة الصحيحة هي $x = 1$.

مثال 3 متطابقات فيثاغورس أخرى

يمكنك استخدام متطابقة فيثاغورس لاستنباط متطابقات أخرى مفيدة.

a. **استخدام البنية** اشرح كيفية استنباط نسخة أخرى من متطابقة فيثاغورس التي تنطوي على $\tan\theta$ و $\sec\theta$ فقط.
اقسم متطابقة فيثاغورس على $\cos^2\theta$. إذًا $\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$. حيث إن $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ و $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$، فعوض وستكون المتطابقة الجديدة هي $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$ أو $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$.

b. **التخطيط للحل** إذا كان $\sec\theta + \tan\theta = 3$. فمن المحتمل أن تحدد قيمة $\sec\theta - \tan\theta$؟ اشرح استنتاجك.
حلل النتيجة من الجزء a إلى عوامل. $[\sec\theta + \tan\theta][\sec\theta - \tan\theta] = 1$. عوّض واقسم كل طرف على 3. $\sec\theta - \tan\theta = \frac{1}{3}$.

c. **استخدام الأدوات** تعتبر النسخة الأخرى لمتطابقة فيثاغورس هي $\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$. كيف يمكنك إثبات صحة هذه المتطابقة باستخدام حاسبتك؟ اشرح إجابتك وبين التمثيل البياني الذي استخدمته.
مثّل الدالة $f(\theta) = \csc^2\theta - \cot^2\theta$ بيانيًا؛ ويكون التمثيل البياني هو الخط الأفقي $y = 1$.

362 الوحدة 11 المتطابقات والمعادلات المثلثية

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

م.م.ر 2 (التفكير بطريقة تجريدية وكميّة) يتطلب من الطلاب التفكير بطريقة كمية - بمعنى فهم الكميات والعلاقات بينها. في **المثال 1**،يجب على الطلاب أن يربطوا بين النسب المثلثية التي عرفوها باستخدام نظرية فيثاغورس للتحقق من المتطابقة المثلثية.

يجب أن يتمكن الطلاب من رؤية النسب المثلثية باعتبارها متغيرات يمكن تغييرها واستبدالها في نظرية فيثاغورس للتعبير عنها بشكل مختلف. يجب عليهم لاحقًا في المثال نفسه أن يفكروا في تمثيل أكثر عمومية لدائرة ويفهموا أن متطابقة فيثاغورس تظل بدون تغيير.

أخطاء شائعة

قد يجد الطلاب صعوبة في تذكر التعريفات الصحيحة للدوال المثلثية. سيخلطون أحيانًا بين الضلع المجاور و/أو الضلع المقابل و/أو الوتر في المثلث قائم الزاوية. يمكن أن يساعد الاطلاع على وسيلة SOH-CAH-TOA المساعدة للذاكرة على حثهم على تذكّر تعريفات sine وcosine وtangent.

غالبًا ما يرتبك الطلاب بسبب حقيقة أن cosine وsecant معكوسان ضربيان بينما cosecant وsine معكوسان ضربيان لبعضهما البعض. قد يسعون بشكل خاطئ لربط الدوال التي تبدأ بالسابقة نفسها اعتقادًا منهم أن cosine وcosecant ينبغي أن يكونا معكوسين ضربيين لبعضهما البعض.

قد يرتكب الطلاب أخطاء عند محاولة تحديد أي ربع يتضمن الضلع الطرفي للزاوية. حتى وإن حددوا الربع الصحيح، فقد لا يتذكرون العلامات الصحيحة لكل دالة من الدوال المثلثية في ذلك الربع.

قد يجد الطلاب صعوبة عندما يُطلب منهم إجراء تربيع أو أخذ الجذر التربيعي لكمية تتضمن جذرًا أو كسرًا. قد ينسون توزيع الأس أو الجذر على البسط والمقام في الكسر.

قد ينسى الطلاب أيضًا أن الرقم الموجب يحتوي على جذرين مربعين، أحدهما موجب والآخر سالب. قد يرغبون في بعض الحالات في إدراج كلتا القيمتين، بينما من المهم في مسائل أخرى أن يختاروا الإشارة الصحيحة.

تدريب

1. **التخطيط للحل** إذا كان $\cos\theta = \frac{2}{a}$ و $\tan\theta = \frac{2}{b}$، فعبّر عن a بدلالة b.
اكتب الحل هنا.
حيث إن $\left(\frac{2}{a}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$، فإن $\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{a^2-4}}{a}$. إذا كان $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$، فإن $\tan\theta = \frac{2}{b}$، $\frac{\pm 2}{\sqrt{a^2-4}} = \frac{2}{b}$.
وحيث إن $\theta = \frac{2}{b}$، فإن $\frac{2}{b} = \frac{\pm 2}{\sqrt{a^2-4}}$ أو $b = \pm\sqrt{a^2-4}$. بالحل بإيجاد قيمة a، فإن $a = \pm\sqrt{b^2+4}$.

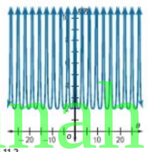
2. **التخطيط للحل** إذا كان $\sec\theta = \frac{x+10}{x-8}$ و $\tan\theta = \frac{x+9}{x-8}$، بيّن كيف يمكنك إيجاد قيمة (قيم) x المحتملة. اكتب الحل هنا.
من متطابقة فيثاغورس، $\left(\frac{x+10}{x-8}\right)^2 - \left(\frac{x+9}{x-8}\right)^2 = 1$ يبسّط إلى $(x+10)^2 - (x+9)^2 = (x-8)^2$ أو
$(x+10)^2 - (x+9)^2 = (x-8)^2$. الحلول هي $x = 15$ و $x = 3$. وحيث إنه لم يتم تحديد الربع، فكلا الحلين صحيحان.

3. **التعليق على طريقة الاستنتاج** يذكر داود أنه إذا كان $\sin^2 A + \cos^2 B = 1$ وكان لكل من A و B قياسات ما بين $0°$ و$180°$، إذًا $A = B$. هل هو على صواب؟ برر استنتاجك.
لا؛ استخدم متطابقة فيثاغورس لإعادة كتابة المعادلة $\sin^2 A + [1 - \sin^2 B] = 1$. ويُبسّط هذا إلى $\sin^2 A = \sin^2 B$،
ويكون ذلك صحيحًا إذا كان $\sin A = \sin B$ أو $\sin A = -\sin B$. لأن A و B كلاهما أقل من $180°$، إذًا $\sin A > 0$ و
$\sin B > 0$. إذًا، لا يمكن أن تكون المعادلة الثانية صحيحة. وتكون المعادلة الأولى صحيحة إذا كان $A = B$ أو إذا كان
$A = 180° - B$.

4. **استخدام البنية** أثبت صحة المتطابقة $(\sec^2\theta - 1)(\csc^2\theta - 1) = 1$ جبريًا.
باستخدام متطابقة فيثاغورس، فإن $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$. عوّض عن $\tan^2\theta$ بـ $\sec^2\theta - 1$ للحصول على
$\tan^2\theta\,(\csc^2\theta - 1) = 1$. باستخدام متطابقة فيثاغورس، فإن $\cot^2\theta = \csc^2\theta + 1$. عوّض عن $\cot^2\theta$ بـ
$\csc^2\theta - 1$ للحصول على $\tan^2\theta\cot^2\theta = 1$، أو $1 = 1$، وهذا صحيح.

5. **التخطيط للحل** إذا كان $\cos\theta = -\frac{\sqrt{10}}{5}$ و $\tan\theta > 0$، فاشرح كيفية إيجاد قيمة $\sin\theta$. هل تتغير الإجابة إذا كان $\tan\theta < 0$؟
باستخدام متطابقة فيثاغورس. $\sin^2\theta + \left(-\frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2 = 1$. يبسّط إلى $\sin^2\theta = \frac{3}{5}$ و $\theta = -\frac{\sqrt{15}}{5}$. إذا كان $\tan\theta < 0$،
فالإجابة هي $\sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

6. **استخدام الأدوات** كيف يمكنك استخدام حاسبتك لتبين أن المتطابقة $\sin^2\theta + \csc^2\theta = 1$ خطأ؟ اشرح إجابتك وبين التمثيل البياني الذي استخدمته.
مثّل الدالة $f(\theta) = \sin^2\theta + \csc^2\theta$ بيانيًا؛ لا يتقاطع التمثيل البياني أبدًا مع المستقيم $y = 1$.



التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

يمثل تطابق فيثاغورس رابطًا طبيعيًا مع **م.م.ر 7 (محاولة إيجاد البنية واستخدامها)**. في **المثال 3**، يجب أن يستخدم الطلاب هيكل متطابقة فيثاغورس الأصلية والمتطابقين الضربي والنسبي لابتكار أشكال جديدة من متطابقة فيثاغورس.

على الطلاب أن يدركوا أن كلاً من $\tan\theta$ و $\sec\theta$ يمكن التعبير عنهما بالنسبة إلى $\cos\theta$. وبذلك يمكنهم رؤية أن قسمة متطابقة فيثاغورس الأصلية على $\cos\theta$ قد تؤدي إلى نسخة جديدة بالنسبة إلى $\tan\theta$ و $\sec\theta$. وبالمثل، يجب عليهم إدراك أنه يمكنهم القسمة على $\sin\theta$ والحصول على نسخة بالنسبة إلى $\cot\theta$ و $\csc\theta$.

تدريب

التمرينان 1 و 2 يتطلبان من الطلاب استخدام متطابقة فيثاغورس لحل كل مسألة.

في **التمرين 3**، يجب على الطلاب مراعاة استنتاج متطابقة فيثاغورس واستخدامها لدعم الاستنتاج أو رفضه.

يطلب **التمرين 4** من الطلاب أن يتحققوا من متطابقة باستخدام متطابقة فيثاغورس.

التمرين 5 يتيح للطلاب إيجاد القيمة المجهولة باستخدام متطابقة فيثاغورس.

في **التمرين 6**، يميّز الطلاب متطابقة خاطئة تشبه متطابقة فيثاغورس.

التمرين 7 والتمرين 8 يطلبان من الطلاب استخدام متطابقة فيثاغورس لإيجاد القيم المثلثية المجهولة.

في **التمرينين 9 و 10**. يجب على الطلاب أن يحلوا المسائل باستخدام متطابقة فيثاغورس.

عرض المعايير

تمرين	م.م.ر
1–2	1
3	3
4	7
5	1
6	5
7–8	6
9–10	1

7. **الحساب بدقة** استخدم متطابقة فيثاغورس للإجابة على الأسئلة. قرّب إجاباتك إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

a. أوجد $\cos\theta$ إذا كان $\sin\theta = 0.6321$ و θ في الربع الثاني.
$\cos\theta = -0.7749$؛ $\cos^2\theta = 1 - (0.6321)^2$ و cosine سالب في الربع الثاني.

b. أوجد $\sin\theta$ إذا كان $\cos\theta = -0.2863$ و θ في الربع الثالث.
$\sin\theta = -0.9581$؛ $\sin^2\theta = 1 - (-0.2863)^2$ و sine سالب في الربع الثالث.

c. أوجد $\cos\theta$ إذا كان $\sin\theta = -0.9376$ و θ في الربع الرابع.
$\cos\theta = 0.3477$؛ $\cos^2\theta = 1 - (-0.9376)^2$ و cosine موجب في الربع الرابع.

d. أوجد $\sin\theta$ إذا كان $\cos\theta = 0.4284$ و θ في الربع الرابع.
$\sin\theta = -0.9036$؛ $\sin^2\theta = 1 - (0.4284)^2$ و sine سالب في الربع الرابع.

8. **الحساب بدقة** استخدم متطابقة فيثاغورس $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$ للإجابة على الأسئلة. قرّب إجاباتك إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

a. أوجد $\tan\theta$ إذا كان $\sec\theta = 4.6$ و θ في الربع الأول.
$\tan\theta = 4.4900$؛ $\tan^2\theta = (4.6)^2 - 1$ وظل الزاوية موجب في الربع الأول.

b. أوجد $\sec\theta$ إذا كان $\tan\theta = -37.1$ و θ في الربع الثاني.
$\sec\theta = -37.1135$؛ a $\sec^2\theta = (-37.1)^2 + 1$ والقاطع سالب في الربع الثاني.

c. أوجد $\sec\theta$ إذا كان $\tan\theta = 5.6$ و θ في الربع الثالث.
$\sec\theta = -5.6886$؛ $\sec^2\theta = (5.6)^2 + 1$ والقاطع سالب في الربع الثالث.

d. أوجد $\tan\theta$ إذا كان $\sec\theta = -12.3$ و θ في الربع الثاني.
$\tan\theta = -12.2593$؛ $\tan^2\theta = (-12.3)^2 - 1$ وظل الزاوية سالب في الربع الثاني.

9. **تفسير المسائل** افترض أن $f(\theta) = 3 - \sin\theta$ و $g(\theta) = 3 + \sin\theta$.

a. أوجد وبسّط تعبير $f(\theta)g(\theta)$ بدلالة $\cos\theta$.
$f(\theta)g(\theta) = (3 - \sin\theta)(3 + \sin\theta) = 9 - \sin^2\theta = 8 + (1 - \sin^2\theta) = 8 + \cos^2\theta.$

b. إذا كان $f(\theta) - g(\theta) = 1.54$ و θ في الربع الثالث. فأوجد $\cos(\theta)$.
$f(\theta) - g(\theta) = -2\sin\theta = 1.54$. إذًا $\sin\theta = -0.77$. باستخدام متطابقة فيثاغورس، فإن $\cos^2\theta = 1 - (-0.77)^2$ و cosine سالب في الربع الثالث. إذًا $\cos\theta \approx -0.6380$.

10. **التخطيط للحل** إذا كان $\sin(\theta) = \frac{2x-1}{x-5}$ و $\cos(\theta) = \frac{6+5x}{x-5}$، فأوجد القيم المحتملة لـ x.
باستخدام متطابقة فيثاغورس، $\left(\frac{6+5x}{x-5}\right)^2 + \left(\frac{2x-1}{x-5}\right)^2$. بسّط إلى $1 = \frac{(6+5x)^2}{(x-5)^2} + \frac{(2x-1)^2}{(x-5)^2}$، أو $(2x-1)^2 + (6+5x)^2 = (x-5)^2$. توسّع للحصول على $4x^2 - 4x + 1 + 36 + 60x + 25x^2 = x^2 - 10x + 25$
اجمع الحدود المتشابهة للحصول على $28x^2 + 66x + 12 = 0$. الحلول هي $x = \frac{33+\sqrt{753}}{28}$ و $x = \frac{33-\sqrt{753}}{28}$. لم يتم تحديد الأرباع. إذًا كلا الحلين صحيح.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

م.م.ر 3 (بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين)
يرتبط **بالتمرين 3**، الذي يجب على الطلاب فيه أن يحللوا استنتاجًا لتحديد ما إذا كانوا يتفقون أم يختلفون معه. يجب على الطلاب أن يفكروا في كيفية تحليل معادلة تحتوي على زاويتين تبدوان غير مرتبطتين. يجب أن يدركوا أن استخدام متطابقة فيثاغورس لاستبدال إحدى الدوال يؤدي إلى معادلة أبسط بدون قيم ثابتة. يمكنهم بعد ذلك مواصلة عزل الدوال وأخذ الجذر التربيعي لكل طرف. سيكون عليهم أن يعتمدوا على معرفتهم بقيم الدوال المثلثية في الأرباع الأربعة ويقرروا رفض الاستنتاج المعروض عليهم.

11.3 متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما

المعايير

معايير الممارسات في الرياضيات:
1, 2, 3, 4, 6, 7, 8

المتطلبات الأساسية

- استخدام المتطابقات المثلّثية الأساسية

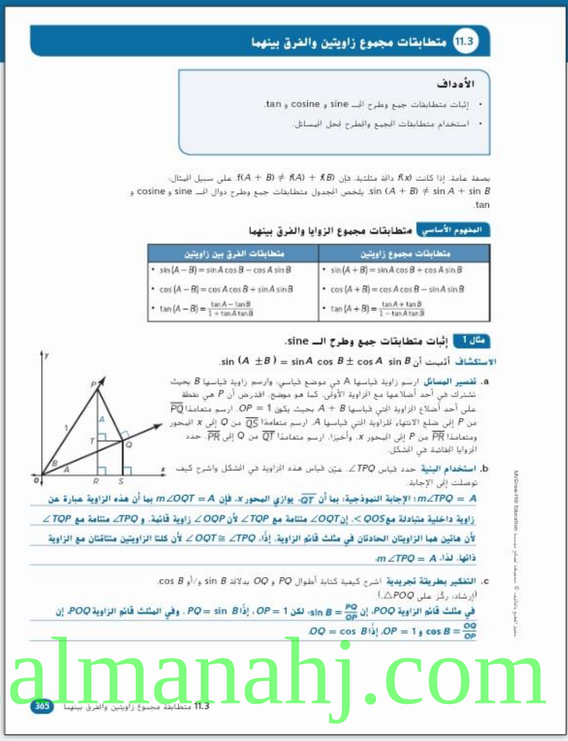
مثال 1

نصيحة للتدريس
م.م.ر 1

يتضمن هذا البرهان عدة خطوات، ولذلك قد يكون من المفيد أن تحدد العناصر الرئيسية للبرهان قبل أن يبدأ الطلاب في استخدام التفاصيل. لتحقيق ذلك الهدف، أوضح أن الشكل المذكور يشمل مثلثًا قائم الزاوية $\triangle POR$، بزاوية حادة يبلغ قياسها $A + B$. الفكرة الأساسية للبرهان هي إظهار أن $\sin (A + B) = PR$ والتعبير عن PR من حيث أطوال الأضلاع الأخرى في الشكل.

الأسئلة الداعمة

- في الجزء **b**، كيف يمكنك التوصل إلى $m\angle OQT$؟ **استخدم حقيقة أن الخطوط المتوازية التي يتطعها قاطع تحتوي على زوايا داخلية متبادلة.**
- ما الذي يمكنك استنتاجه بخصوص الزاويتين المكملتين للزاوية نفسها؟ **الزاويتان متطابقتان.**
- كيف يمكنك استخدام هذه الحقيقة في الجزء **b**؟
$\angle TPQ$ و $\angle OQT$ كلتاهما مكملتان للزاوية $\angle TQP$، إذًا $\angle TPQ \cong \angle OQT$ وهو ما يجعل من الممكن أن $m\angle TPQ = A$.



11.3 متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما

الأهداف
- إثبات متطابقات جمع وطرح الـ sine و cosine و tan.
- استخدام متطابقات الجمع والطرح لحل المسائل.

بصفة عامة، إذا كانت $f(x)$ دالة مثلثية، فإن $f(A + B) \neq f(A) + f(B)$. على سبيل المثال، $\sin (A + B) \neq \sin A + \sin B$. يلخص الجدول متطابقات جمع وطرح دوال الـ sine و cosine و tan.

المفهوم الأساسي متطابقات مجموع الزوايا والفرق بينهما

متطابقات مجموع زاويتين	متطابقات الفرق بين زاويتين
$\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$	$\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
$\cos (A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$	$\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
$\tan (A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$	$\tan (A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

مثال 1 إثبات متطابقات جمع وطرح الـ sine.

الاستكشاف أثبت أن $\sin (A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$.

a. تفسير المسائل ارسم زاوية قياسها A في موضع قياسي، وارسم زاوية قياسها B بحيث تشترك في أحد أضلاعها مع الزاوية الأولى، كما هو موضح. افترض أن P هي نقطة على أحد أضلاع الزاوية التي قياسها $A + B$ بحيث يكون $OP = 1$. ارسم متعامدًا $\overline{PQ}$ من P إلى ضلع الانتهاء للزاوية التي قياسها A. ارسم متعامدًا $\overline{QS}$ من Q إلى المحور x ومتعامدًا $\overline{PR}$ من P إلى المحور x. وأخيرًا، ارسم متعامدًا $\overline{QT}$ من Q إلى $\overline{PR}$. حدد الزوايا القائمة في الشكل.

b. استخدام البنية حدد قياس $\angle TPQ$. عيّن قياس هذه الزاوية في الشكل واشرح كيف توصلت إلى الإجابة.
$m\angle TPQ = A$؛ الإجابة النموذجية: بما أن $\overline{QT}$ يوازي المحور x، فإن $m\angle OQT = A$ بما أن هذه الزاوية عبارة عن زاوية داخلية متبادلة مع $QOS >$. إن $\angle OQT$ متتامة مع $\angle TQP$ لأن $\angle OQP$ زاوية قائمة. و $\angle TPQ$ متتامة مع $\angle TQP$ لأن هاتين هما الزاويتان الحادتان في مثلث قائم الزاوية. إذًا، $\angle TPQ \cong \angle OQT$ لأن كلتا الزاويتين متتامتان مع الزاوية ذاتها. لذا، $m\angle TPQ = A$.

c. التفكير بطريقة تجريدية اشرح كيفية كتابة أطوال PQ و OQ بدلالة $\sin B$ و/أو $\cos B$.
(إرشاد: ركّز على $\triangle POQ$.)
في مثلث قائم الزاوية POQ، إن $\sin B = \frac{PQ}{OP}$، لكن $OP = 1$، إذًا $PQ = \sin B$. وفي المثلث قائم الزاوية POQ، إن $\cos B = \frac{OQ}{OP}$ و $OP = 1$، إذًا $OQ = \cos B$.

365 11.3 متطابقة مجموع زاويتين والفرق بينهما

معلومات أساسية رياضية

في هذا الدرس، يثبت الطلاب متطابقتي المجموع والفارق بالنسبة إلى دوال sine و cosine و tangent. ترتبط القوانين الستة جميعها عن كثب ويكمُن معظم العمل لإثبات هذه القوانين في إثبات متطابقتي المجموع لدالتي sine و cosine. بمجرد إثبات هذين المتطابقتين، تأتي المتطابقات الأخرى بعد ذلك بسرعة. مثلاً، $\cos (A - B)$ هو ببساطة $\cos (A + (-B))$. إذًا يمكن التوصل إلى متطابقة الفارق من متطابقة المجموع وحقيقة أن $\cos (-B) = \cos B$ و $\sin (-B) = -\sin B$.

لاحظ أيضًا أن متطابقتي مجموع وفارق الزاوية في هذا الدرس هما نقطة البدء لتطوير متطابقات مثلثية سيستخدمها الطلاب في دورات الرياضيات المستقبلية. يؤدي متطابقة الجمع مثلاً لدوال sine.

وهو $\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$. بشكل مباشر إلى المتطابقة المفيدة لضعف الزاوية. $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$.

مثال 2

نصيحة للتدريس م.م.ر 1

قد تريد أن تبدأ في مناقشة معنى القيمة الدقيقة لـ $\frac{7\pi}{12}$ cosine. أوضح أن الطلاب يمكنهم أن يجدوا هذه القيمة باستخدام حاسباتهم. لكن أي قيمة تعيدها الحاسبة ستكون تقريبًا لكسر عشري. الهدف هو كتابة قيمة cosine على أساس الجذور التربيعية. اذكر مثالاً محددًا: $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ قيمة محددة.

بينما قيمة الحاسبة لـ $\sin\frac{\pi}{4}$، 0.7071067812، تمثل قيمة تقريبية.

الأسئلة الداعمة

- ما الأنماط أو العلاقات التي يمكن أن تساعدك على استكمال الجدول؟ **الإجابة النموذجية:** $\cos\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$
- كيف يمكنك استخدام حاسبة للتحقق من صحة إجابتك؟ **استخدم الحاسبة للتحقق من أن قيمة $\cos\frac{7\pi}{12}$ تساوي قيمة $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.**

d. **التفكير بطريقة تجريدية** استخدم أطوال أضلاع $\triangle TPQ$ لكتابة نسبة $\cos A$. ثم استخدم **جزء c** لكتابة تعبير لطول PT الذي يشمل sines و/أو cosines لـ A و/أو B.

في $\triangle TPQ$، إن $\cos A=\frac{PT}{PQ}$. لذا، $PT=PQ\cos A$ ولكن من الجزء c، فإن $PQ=\sin B$. وبالتعويض، $PT=\sin B\cos A$.

e. **التفكير بطريقة تجريدية** استخدم أطوال أضلاع $\triangle QOS$ لكتابة نسبة $\sin A$. ثم استخدم **جزء c** لكتابة تعبير لطول QS الذي يشمل sines و/أو cosines لـ A و/أو B.

في $\triangle QOS$، إن $\sin A=\frac{QS}{OQ}$. لذا، $QS=OQ\sin A$. لكن من الجزء c، فإن $OQ=\cos B$ وبالتعويض، فإن $QS=\cos B\sin A$.

f. **بناء فرضيات** اشرح كيف يمكنك إثبات متطابقة مجموع الـ sines عن طريق استخدام عملك من الخطوات السابقة $\triangle POR$ لكتابة تعبير لـ $\sin(A+B)$. (إرشاد: استخدم مسلمة جمع القطع المستقيمة لكتابة طول PR باعتبار ذلك مجموعًا للأطوال التي عبّرت عنها بالفعل في صورة مجموع نواتج ضرب الـ sines و cosines.)

في $\triangle POR$، إن $\sin(A+B)=\frac{PR}{OP}=PR=PT+TR$ عن طريق مسلمة جمع القطع المستقيمة. من الجزء d، إن $PT=\sin B\cos A$. وأيضًا، $TR=QS$ لأن $TQRS$ هو مستطيل، ومن الجزء e، فإن $QS=\cos B\sin A$ وبالتعويض، فإن $\sin(A+B)=\sin B\cos A+\cos B\sin A=\sin A\cos B+\cos A\sin B$.

g. **بناء فرضيات** اشرح كيفية استخدام متطابقة مجموع الـsines لإثبات متطابقة الفرق لـ sines. استخدم حقيقة أن $\sin(A-B)=\sin(A+(-B))$.

$\sin(A-B)=\sin(A+(-B))=\sin A\cos(-B)+\cos A\sin(-B)$. لكن $\cos(-B)=\cos B$ و $\sin(-B)=-\sin B$، لذلك $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$.

مثال 2 إيجاد قيمة مثلثية دقيقة

اتبع الخطوات التالية لإيجاد القيمة الدقيقة لـ $\cos\frac{7\pi}{12}$.

a. **التخطيط للحل** أكمل الجدول، ثم اشرح كيف يمكنك الاستعانة بالجدول لمساعدتك في إيجاد القيمة الدقيقة لـ $\cos\frac{7\pi}{12}$.

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$
sine	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
cosine	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

الإجابة النموذجية: اكتب $\cos\frac{7\pi}{12}$ لأن $\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$. ثم استخدم متطابقة مجموع cosine والقيم الموضحة بالجدول لإيجاد قيمة التعبير.

b. **الحساب بدقة** وضّح كيفية إيجاد القيمة الدقيقة لـ $\cos\frac{7\pi}{12}$.

$$\cos\frac{7\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

c. **تقييم مدى الصحة** هل هناك طريقة أخرى لإيجاد القيمة الدقيقة لـ $\cos\frac{7\pi}{12}$؟ هل تعطي نفس النتيجة؟ اشرح.

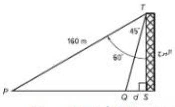
نعم، يمكنك استخدام متطابقة الفارق: $\cos\frac{7\pi}{12}=\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{3\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{3\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$، وهي النتيجة نفسها.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

حسب م.م.ر 8 **(البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك)**، يعمل الطلاب الماهرون رياضيًا "باستمرار على تقييم منطقية نتائجهم الوسيطة." يقدم **المثال 2** فرصًا متعددة للطلاب ليتحققوا من منطقية عملهم. قد يلاحظ الطلاب مثلاً أن $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ سالبة لأن $\sqrt{2}<\sqrt{6}$. إلا أنه من المنطقي أن $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ سالبة لأن $\frac{7\pi}{12}$ تمثل زاوية يقع ضلعها الطرفي في الربع الثاني حيث cosine سالبة.

مثال 3 استخدام متطابقات الجمع أو الطرح لحل المسائل

برج إذاعي مثبت بكابل يمتد من قمة البرج إلى الأرض. يبلغ طول الكابل 160 m، ويصنع مع البرج زاوية قياسها 60°. يثبّت فريق العمل كابلاً جديدًا يمتد من قمة البرج إلى الأرض، ويصنع هذا الكابل الجديد مع الكابل الأصلي زاوية قياسها 45°. يريد الفريق معرفة المسافة بالضبط d من قاعدة البرج التي يجب عندها تثبيت الكابل الجديد في الأرض.



a. **استخدام النماذج** اشرح كيفية إيجاد ارتفاع البرج.

إن $\triangle PTS$ هو مثلث قائم الزاوية قياسات زواياه 90°—60°—30°، وبه وتر طوله 160 m، إذًا طول TS هو 80 m.

b. **استخدام البنية** استخدم النسبة المثلثية التي تشمل d وارتفاع البرج. اشرح إجابتك.

$\tan 15° = \frac{d}{80}$، في $\triangle QTS$, $m\angle QTS = 60 - 45 = 15$

c. **الحساب بدقة** كيفية استخدام إجابتك في **الجزء b** ومتطابقة الجمع أو الفارق لإيجاد القيمة الدقيقة لـ d.

$d = 80 \tan 15° = 80 \tan (60° - 45°) = 80 \cdot \frac{\tan 60° - \tan 45°}{1 + \tan 60° \tan 45°} = 80 \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = 80 \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} \cdot \frac{1 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} =$
$80(-\sqrt{3} + 2)$. So $d = (160 - 80\sqrt{3})$ m.

تدريب

1. استخدم الشكل من **المثال 1** لإثبات أن $\cos (A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$. يبدأ الإثبات بنفس طريقة **الجزأين a–c** في **المثال 1**.

a. **التفكير بطريقة تجريدية** استخدم أطوال أضلاع $\triangle QOS$ لكتابة نسبة $\cos A$. ثم استخدم ذلك، وتعابير PQ و OQ من **الجزء c** في **المثال 1**، لكتابة تعبير عن طول OS حيث يشمل sines و/أو cosines لـ A و/أو B.

في $\triangle QOS$، $\cos A = \frac{OS}{OQ}$، لذلك، فإن $OS = OQ \cos A$. ولكن من المثال 1، إن $OQ = \cos B$ وبالتعويض، فإن $OS = \cos B \cos A$.

b. **التفكير بطريقة تجريدية** استخدم أطوال أضلاع $\triangle TPQ$ لكتابة نسبة $\sin A$. ثم استخدم ذلك، وتعابير PQ و OQ من **الجزء c** في **المثال 1** لكتابة تعبير عن طول QT حيث يشمل sines و/أو cosines لـ A و/أو B.

في $\triangle TPQ$ إن $\sin A = \frac{QT}{PQ}$، ولذلك، $QT = PQ \sin A$. ولكن من المثال 1، إن $PQ = \sin B$، إذًا وبالتعويض، فإن $QT = \sin B \sin A$.

c. **بناء فرضيات** اشرح كيفية إثبات متطابقة المجموع لـ cosines مستعينًا بعملك في الخطوات السابقة.

في $\triangle POR$، إن $\cos (A + B) = \frac{OR}{OP} = OR = OS - RS$ عن طريق مسلمة جمع القطع المستقيمة. من الجزء a، إن $OS = \cos B \cos A$. كذلك، $RS = QT$ لأن $TQRS$ هو مستطيل، ومن الجزء b، إن $QT = \sin B \sin A$. إذًا، $\cos (A + B) = \cos B \cos A - \sin B \sin A = \cos A \cos B - \sin A \sin B$.

11.3 متطابقة مجموع زاويتين والفرق بينهما 367

مثال 3

نصيحة للتدريس م.م.ر 6

ذكّر الطلاب بأنهم عندما يكتبون قيمة دقيقة لدالة مثلثية، فقد يحتاجون إلى إنطاق المقام. استغرق لحظة عند الضرورة لمراجعة هذه العملية مع الطلاب. ذكّر الطلاب بأن الخطوة الرئيسية لإنطاق مقام هي ضرب البسط والمقام في مرافق المقام. على سبيل المثال، لإنطاق مقام $\frac{1}{1+\sqrt{3}}$ اضرب في $\frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$.

الأسئلة الداعمة

- ما نوع المثلث المثلث قائم الزاوية $\triangle PTS$؟ **مثلث قائم الزاوية 30°-60°-90°**
- ما الذي يدل عليه ذلك بخصوص أطوال أضلاع المثلث $\triangle PTS$؟ **أطوال الأضلاع بالتناسب 2-$\sqrt{3}$-1.**
- كيف يمكنك التحقق من منطقية إجابتك؟ **الإجابة النموذجية: أستخدم حاسبة للتوصل إلى قيمة تقريبية لـ $160 - 80\sqrt{5}$؛ ثم أستخدم الحاسبة لتقييم $80 \tan 15°$ لرؤية ما إذا كانت النتيجة واحدة.**

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

تتضمن م.م.ر 3 **(بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين)** استخدام "الافتراضات والتعريفات المذكورة والنتائج المعروفة سابقًا." ترتبط براهين متطابقتي المجموع والفارق جميعها في هذا الدرس معًا وينبغي أن يدرك الطلاب أنه يجب برهنة القوانين بالترتيب الصحيح كي يمكن استخدام النتائج المعروفة سابقًا في البراهين اللاحقة. على سبيل المثال، بمجرد البرهنة على قوانين المجموع لدوال sine و cosine، يمكن استخدامها في البرهنة على متطابقة المجموع لدوال tangent كما في **التمرين 3**. هذه الفكرة المتمثلة في بناء براهين جديدة بناءً على نتائج معروفة سابقًا صحيحة منطقيًا وتوفر في خطوات العمل كذلك. الاعتماد على قوانين المجموع في دوال sine و cosine يجعل البرهنة على متطابقة المجموع في دوال tangent أكثر سهولة من البراهين السابقة.

تدريب

في **التمرين 1**، يبرهن الطلاب على متطابقة الجمع لدوال cosine.

في **التمرين 2**، يبرهن الطلاب على متطابقة الطرح لدوال cosine.

يطلب التمرين 3 من الطلاب أن يبرهنوا على متطابقتي الجمع والطرح لدوال tangent.

في **التمارين 7–4**، يستخدم الطلاب متطابقتي الجمع والطرح في دوال sine و cosine وtangent لحل المسائل.

عرض المعايير

تمرين	م.م.ر
1	2, 3
2-3	3
4	3, 7
5	6
6	4
7	7

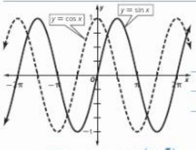
2. **بناء فرضيات** اشرح كيفية استخدام متطابقة المجموع لـ cosines لإثبات متطابقة الفرق لـ cosines.
$\cos(A-B)=\cos(A+(-B))=\cos A\cos(-B)-\sin A\sin(-B)$. لكن $\cos(-B)=\cos B$ و $\sin(-B)=-\sin B$، إذًا $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$.

3. **بناء فرضيات** يمكنك استخدام متطابقات المجموع والفارق لـ sines و cosines لإثبات متطابقات المجموع والفرق لـ tan.

a. أثبت متطابقة المجموع للمماسات.
$\tan(A+B)=\frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B-\sin A\sin B}$. اقسم بسط ومقام هذا الكسر على $\cos A\cos B$. هذا يعطي $\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\frac{\frac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B}+\frac{\cos A\sin B}{\cos A\cos B}}{\frac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B}-\frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}}$.

b. أثبت متطابقة الفارق لـ tan.
$\tan(A-B)=\tan(A+(-B))=\frac{\tan A+\tan(-B)}{1-\tan A\tan(-B)}$، لكن $\tan(-B)=-\tan B$، إذًا $\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$.

4. يبين الشكل التمثيلات البيانية لـ $y=\sin\theta$ و $y=\cos\theta$.



a. **استخدام البنية** اشرح كيفية استخدام التمثيلات البيانية لإيجاد قيمة h في المعادلة $\sin(\theta-h)=\cos\theta$.
التمثيل البياني لـ $y=\cos\theta$ هو إزاحة أفقية بمقدار $\frac{\pi}{2}$ وحدة إلى يسار التمثيل البياني لـ $y=\sin\theta$، إذًا قيمة h تساوي $-\frac{\pi}{2}$.

b. **بناء فرضيات** استخدم واحدًا أو أكثر من متطابقات المجموع أو الفارق لإثبات توصلك للقيمة الصحيحة لـ h.
عندما يكون $h=-\frac{\pi}{2}$، فإن الطرف الأيسر من المعادلة في الجزء a هو $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$. باستخدام متطابقة المجموع، يساوي ذلك $\sin\theta\cos\frac{\pi}{2}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{2}$، ولكن $\cos\frac{\pi}{2}=0$ و $\sin\frac{\pi}{2}=1$، إذًا التعبير يساوي $\cos\theta$.

5. **الحساب بدقة** وضح كيفية إيجاد القيمة الدقيقة لـ $\sin\frac{13\pi}{12}$.
الإجابة النموذجية:
$\sin\frac{13\pi}{12}=\sin\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{5\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

6. **استخدام النماذج** يقف أيمن على بعد 1.8 m من قاعدة سارية علم وينظر إلى قمة السارية بزاوية ارتفاع قياسها 75°. يبلغ ارتفاع عينيه عن سطح الأرض 1.5 m. أوجد ارتفاع السارية بالضبط. ثم، أوجد الارتفاع إلى أقرب جزء من عشرة من المتر.
$(5.1+1.8\sqrt{3})\text{ m}\approx 8.22\text{ m}$

7. **استخدام البنية** حل $\cos(\theta+\pi)=\sin(\theta-\pi)$ جبريًا، علمًا بأن $0\le\theta\le\pi$. اشرح خطواتك.
$\theta=\frac{\pi}{4}$. عن طريق متطابقات المجموع والفارق، يمكن كتابة المعادلة بصيغة $\cos\theta\cos\pi-\sin\theta\sin\pi=\sin\theta\cos(-\pi)-\cos\theta\sin(-\pi)$، أو $-\cos\theta=-\sin\theta$ مما يثبت أن $\theta=\frac{\pi}{4}$.

أخطاء شائعة

في **التمرين 6**. قد ينسى بعض الطلاب احتساب ارتفاع عيني ديمتري فوق الأرض. الطلاب الذين يقعون في هذا الخطأ قد يتوصلون إلى الإجابة $3.6+1.8\sqrt{3}$. قد يكون من المفيد أن تجعل الطلاب يضعون علامة على الشكل عن طريق التسمية وتحديد رؤوس المثلث قائم الزاوية والنقطة التي تلتقي عندها سارية العلم مع الأرض. ثم اجعل الطلاب يستخدموا أسماء القطع المستقيمة المعنية لكتابة تعبير يمثل ارتفاع سارية العلم.

الاسم ______________ التاريخ ______________ المدّة ______________

الوحدة 12 المتتاليات والمتسلسلات

قبل القراءة

قبل قراءة الوحدة، أجب عن العبارات التالية.

1. اكتب **أوافق** إذا كنت توافق على العبارة.
2. اكتب **لا أوافق** إذا كنت لا توافق على العبارة.

قبل القراءة	المتتاليات والمتسلسلات
أوافق	• المتتالية هي دالة مجالها مجموعة جزئية من الأعداد الطبيعية.
لا أوافق	• المتسلسلة الحسابية هي مجموع حدود متتالية هندسية.
أوافق	• لإيجاد النسبة المشتركة لمتتالية هندسية، اقسم أي حد على الحد الذي يسبقه.

نصائح تدوين الملاحظات

- **عليك دراسة ملاحظاتك يوميًا.**
  مراجعة كميات قليلة في المرة الواحدة يساعدك على الاحتفاظ بالمعلومات.
- **من المفيد قراءة ملاحظاتك قبل بدء واجباتك المنزلية.**
  راجع المواد التي يشار إليها في الصفحات.

الاسم ________________ التاريخ ____________ المدّة ____________

الوحدة 12 المتتاليات والمتسلسلات

النقاط الأساسية

ادرس الصفحات بهذه الوحدة. اكتب حقيقة واحدة على الأقل حول كل درس. على سبيل المثال، في الدرس الذي يتناول المتتاليات الحسابية، ربما تكون الحقيقة هي أنه في المتتالية الحسابية يكون الفرق بين حدين متتاليين ثابتًا. بعد إكمال الوحدة، يمكنك استخدام هذا الجدول في المراجعة الخاصة باختبار الوحدة.

الدرس	الحقيقة
12-2 المتتاليات والمتسلسلات الحسابية	**الإجابة النموذجية: من الممكن كتابة صيغة تكرارية(ضمنية) وصيغة صريحة لإيجاد الحد النوني n في متتالية حسابية.**
12-3 المتتاليات الهندسية والمتسلسلات الهندسية	**الإجابة النموذجية: الحدود التي تقع بين حدين غير متتاليين تسمى أوساطًا هندسية.**

الاسم ________________ التاريخ ____________ المدّة ____________

12-2 المتتاليات والمتسلسلات الحسابية

ما ستتعلمه

ادرس الأمثلة بالدرس 12-2. توقع شيئين تعتقد أنك سوف تتعلمهما عن المتتاليات الحسابية والمتسلسلات الحسابية.

1. **الإجابة النموذجية: كيفية كتابة الصيغة الصريحة والصيغة التكرارية (الضمنية)**

2. **الإجابة النموذجية: كيفية إيجاد مجموع n حدًّا الأولى الحدود الأولى في متسلسلة حسابية**

الدرس 12-2

المفردات المستخدمة

المفردات الجديدة صِل كل مصطلح بتعريفه برسم خط يصل بين الاثنين.

أوساط حسابية	الفرق الحاصل من طرح أي حد في المتتالية الحسابية من الحد الذي يليه
متتاليات حسابية	الفرق المشترك في متتالية حسابية
متسلسلة حسابية	الحدود الموجودة بين أي حدين غير متتاليين في متتالية حسابية
فرق *مشترك*	مجموعة أعداد يكون فيها الفرق بين كل حدين متتاليين ثابتًا
الفرق الأول	مجموع حدود المتتالية الحسابية
الفرق الثاني	فروق الفروق الأولى المتتالية

الاسم ______ التاريخ ______ المدة ______

الدرس 12-2 (تابع)

الفكرة الرئيسة | **التفاصيل**

المتتاليات الحسابية

اكتب المتتالية الحسابية التي تحتوي على خمسة أوساط حسابية بين 7 و 2−. لاحظ أن $a_7 = -2$.

أولاً. أوجد الفرق المشترك مستخدمًا	ثم حدّد الأوساط الحسابية باستخدام
$a_7 = \underline{-2}$ و	$d = \underline{-1.5}$
$a_1 = \underline{7}$ و $n = \underline{S7}$	$a_2 = 7 + \underline{-1.5} = \underline{5.5}$
$a_n = a_1 + (n-1)d$	
$\underline{-2} = \underline{7} + (\underline{7} - 1)d$	$a_3 = \underline{5.5} + -1.5 = \underline{4}$
$-2 = 7 + 6d$	$a_4 = 4 + \underline{-1.5} = 2.5$
$d = \underline{-1.5}$	$a_5 = \underline{-1.5} + -1.5 = 1$
	$a_6 = \underline{1} + \underline{-1.5} = \underline{-0.5}$

المتتالية هي $7, \underline{5.5}, \underline{4}, \underline{2.5}, \underline{1}, \underline{-0.5}, -2$.

المتسلسلة الحسابية

أوجد $\sum_{n=8}^{32} 4n - 11$.

أوجد a_1 و a_n و n.

حد أعلى مطروحًا منه حد أدنى مضافًا إليه 1 — $n = \underline{32 - 8 + 1 = 25}$

حد أدنى = $\underline{8}$ — $a_1 = \underline{4(8) - 11}$

بسّط. — $= \underline{21}$

حد أعلى = $\underline{32}$ — $a_{25} = \underline{4(32) - 11}$

بسّط. — $= \underline{117}$

استخدم قانون المجموع الأول لمتسلسلة حسابية نهائية.

قانون مجموع متسلسلة حسابية نهائية — $S_n = \underline{\frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$

$n = 25$ و $a_1 = 21$ و $a_n = 117$ — $S_{25} = \underline{\frac{25}{2}(21 + 117)}$

بسّط. — $S_{25} = \underline{1725}$

ولذلك، $\underline{\sum_{n=8}^{32} 4n - 11 = 1725}$

الاسم ______________ التاريخ __________ المدّة __________

12-3 المتتاليات والمتسلسلات الهندسية

ما ستتعلمه

ادرس النص بالدرس 12-3. اكتب حقيقتين تعلمتهما عن المتتاليات الهندسية والمتسلسلات الهندسية.

1. **الإجابة النموذجية: الحد النوني a_n لمتتالية هندسية حدها الأول a_1 والنسبة المشتركة بها r تحدّدها الصيغة $a_n = a_1 r^{n-1}$.**

2. **الإجابة النموذجية: المتسلسلة الهندسية هي مجموع حدود المتتالية الهندسية.**

المفردات المستخدمة

مراجعة المفردات عرّف المتتالية بكلمات من عندك.

الإجابة النموذجية: المتتالية هي دالة مجالها يتكون من مجموعة جزئية من الأعداد الطبيعية والمدى هو مجموعة من الأعداد الحقيقية في ترتيب معين.

المفردات الجديدة املأ كل فراغ بالمصطلح الصحيح.

نسبة مشتركة

أوساط هندسية

متتالية هندسية

متسلسلة هندسية

متسلسلة هندسية هي مجموع حدود متتالية هندسية.

المتتالية التي فيها تكون النسبة بين الحدود المتتالية ثابتة تسمى **متتالية هندسية**.

نسبة مشتركة في متتالية هندسية هي ثابت يتم الحصول عليه بقسمة أي حد في المتتالية على الحد الذي يسبقه.

الحدود التي بين حدين غير متتاليين في متتالية هندسية تسمى **أوساط هندسية**.

الدرس 12-3

الفكرة الرئيسة | التفاصيل

المتتاليات الهندسية

استخدم المتتالية الهندسية ... ,0.1 ,1 ,10 ,100 في إكمال خريطة المفاهيم.

الخطوة 1: حدد الحد الأول في المتتالية.

100

الخطوة 2: أوجد النسبة المشتركة.

0.1

الخطوة 3: اكتب صيغة صريحة لإيجاد الحد النوني a_n في المتتالية.

$a_n = 100(0.1)^{n-1}$

الخطوة 4: اكتب صيغة تكرارية (ضمنية) لإيجاد الحد النوني a_n في المتتالية.

$a_1 = 100$

$a_n = 0.1a_{n-1}$

الخطوة 5: أوجد الحدود الثلاثة التالية في المتتالية.

0.01, 0.001, 0.0001

المتسلسلات الهندسية

لكل متسلسلة هندسية لا نهائية، أوجد النسبة المشتركة. ثم اكتب نعم أو لا للإشارة إلى مدى وجود مجموع لكل منها. إن كان لها مجموع، فأوجده.

المتسلسلة	النسبة المشتركة	المجموع؟ نعم أو لا	المجموع
40, 20, 10, 5, ...	$\frac{1}{2}$	نعم	80
−3, −6, −12, −24, ...	2	لا	لا يوجد
$\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$	$\frac{1}{3}$	نعم	$\frac{1}{2}$

الاسم ______________ التاريخ ______________ المدة ______________

الوحدة 12 المتتاليات والمتسلسلات

اربطها معًا

اذكر مثالاً لكل موقف يمكن أن يستخدم في إكمال الجدول.

متتالية حسابية منتهية		متسلسلة هندسية لا نهائية	
الإجابة النموذجية: $-2, 2, 6, 10, 14$		**الإجابة النموذجية:** $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$	
تحديد الفرق المشترك: 4		تحديد النسبة المشتركة: $\frac{1}{2}$	
صيغة صريحة لإيجاد الحد النوني a_n:	صيغة تكرارية (ضمنية) لإيجاد الحد النوني a_n:	صيغة صريحة لإيجاد الحد النوني a_n:	صيغة تكرارية (ضمنية) لإيجاد الحد النوني a_n:
$a_n = a_1 + (n-1)d$ $a_n = -2 + (n-1) \cdot 4$	$a_1 = -2$ $a_n = a_{n-1} + 4$	$a_n = a_1 r^{n-1}$ $a_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$	$a_1 = \frac{1}{4}$ $a_n = \frac{1}{2} a_{n-1}$
كتابة المتتالية في صورة متسلسلة: $-2 + 2 + 6 + 10 + 14$		كتابة المتتالية في صورة متسلسلة: $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$	
أوجد المجموع بمعلومية a_1 و a_n: $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ $S_5 = \frac{5}{2}(-2 + 14)$ $= 30$	أوجد المجموع بمعلومية a_1 و d: $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ $S_n = \frac{5}{2}[2 \cdot -2 + (5-1) \cdot 4]$ $= 30$	هل للمتسلسلة مجموع؟ **نعم** إن كان الجواب بنعم، فلماذا؟ $\lvert r \rvert < 1$ أوجد المجموع، إن كان موجودًا. $S = \frac{a_1}{1-r}$ $S = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$	

أعد كتابة مثلث باسكال الموجود على اليمين باستخدام الرمز $_nC_r$.

1	الصف 0	$_0C_0$
1 1	الصف الأول	$_1C_1$ $_1C_0$
1 2 1	الصف الثاني	$_2C_2$ $_2C_1$ $_2C_0$
1 3 3 1	الصف الثالث	$_3C_3$ $_3C_2$ $_3C_1$ $_3C_0$

الاسم ______________ التاريخ ______________ المدة ______________

الوحدة 12 المتتاليات والمتسلسلات

قبل الاختبار

الآن قد قمت بقراءة الوحدة ودراستها. فكّر فيما تعلمته. أكمل الجدول أدناه وقارن بين إجاباتك السابقة وإجاباتك التالية.

1. اكتب **أوافق** إذا كنت توافق على العبارة.

2. اكتب **لا أوافق** إذا كنت لا توافق على العبارة.

المتتاليات والمتسلسلات	بعد القراءة
• المتتالية هي دالة مجالها مجموعة جزئية من الأعداد الطبيعية.	أوافق
• المتسلسلة الحسابية هي مجموع حدود متتالية هندسية.	لا أوافق
• لإيجاد النسبة المشتركة لمتتالية هندسية، اقسم أي حد على الحد الذي يسبقه.	أوافق

هل أنت مستعد لاختبار الوحدة؟

استخدم قائمة التحقق هذه لمساعدتك في الدراسة.

☐ أكملت دليل الدراسة والمراجعة الخاص بالوحدة 12 في الكتاب المدرسي.

☐ أجريت تدريبًا على الاختبار خاصًا بالوحدة 12 في الكتاب المدرسي.

☐ راجعت واجباتي المنزلية وقمت بتصويب الإجابات غير الصحيحة.

☐ راجعت جميع مفردات المصطلحات التي وردت في الوحدة.

12-2 تمرين

المتتاليات والمتسلسلات الحسابية

حدّد الفرق المشترك، وأوجد الحدود الأربعة التالية في كل متتالية حسابية.

1. $-1.1, 0.6, 2.3, \ldots$

$1.7;\ 4, 5.7, 7.4, 9.1$

2. $16, 13, 10, \ldots$

$-3;\ 7, 4, 1, -2$

أوجد كلاً من الصيغة الصريحة والصيغة التكرارية (الضمنية) لإيجاد الحد *النوني* لكل متتالية حسابية.

3. $9, 13, 17, \ldots$

$a_n = 9 + (n - 1)4$
$a_1 = 9;\ a_n = a_{n-1} + 4$

4. $75, 70, 65, \ldots$

$a_n = 75 + (n - 1)(-5)$
$a_1 = 75;\ a_n = a_{n-1} - 5$

أوجد القيمة المحدّدة للمتتالية الحسابية ذات الخصائص المعطاة.

5. إذا كان $a_1 = -27$ و $d = 3$. فأوجد a_{24}.

42

6. إذا كان $a_n = 27$ و $a_1 = -12$ و $d = 3$. فأوجد n.

14

7. إذا كان $a_{23} = 32$ و $a_1 = -12$. فأوجد d.

2

8. إذا كان $a_6 = 5$ و $d = -3$. فأوجد a_1.

20

أوجد الأوساط الحسابية المحددة لكل زوجٍ من الحدود غير المتعاقبة.

9. 3 أوساط؛ 35 و 45

37.5, 40, 42.5

10. وسيطان؛ -7 و 2.75

$-3.75, -0.5$

أوجد المجموع المحدّد لكل متسلسلة حسابية.

11. S_{13} لـ $-5 + 1 + 7 + \ldots + 67$ **403**

12. المجموع الجزئي الثاني والستون لـ $-23 + (-21.5) + (-20) + \ldots$ **1410.5**

13. أوجد المجموع $\sum_{n=5}^{21} (-6n + 4)$. **$-1258$**

14. أوجد نموذجًا تربيعيًا للمتتالية $6, 11, 18, 27, 38, 51, \ldots$. **$a_n = n^2 + 2n + 3$**

15. **تصميم** يوجد في قاعة المسرح 26 صفًا، والصف الأول به 22 مقعدًا، ويزيد عدد المقاعد في كل صف بمعدل 4 مقاعد كلما اتجهت إلى الجزء الخلفي من القاعة.

a. كم عدد المقاعد في الصف الأخير؟ **122 مقعدًا**

b. كم تبلغ سعة الجلوس في القاعة؟ **1872**

16. **العمل** يبلغ راتب العام الأول لموظفة AED 34,500، ويزيد راتبها السنوي كل عام فيما بعد بمعدل AED 750.

a. كم سيكون راتبها في العام العاشر لها في العمل؟ **AED 41,250**

b. كم سيبلغ إجمالي ما تقاضته في 25 عامًا من العمل؟ **AED 1,087,500**

12-3 تمرين

المتتاليات الهندسية والمتسلسلات الهندسية

حدّد النسبة المشتركة، وأوجد الحدود الثلاثة التالية في كل متتالية هندسية.

1. $-1, 2, -4, \ldots$

$-2;\ 8, -16, 32$

2. $-4, -3, -\frac{9}{4}, \ldots$

$\frac{3}{4};\ -\frac{27}{16}, -\frac{81}{64}, -\frac{243}{256}$

اكتب صيغة صريحة وصيغة تكرارية (ضمنية) لإيجاد الحد *النوني* لكل متتالية هندسية.

3. $2, 10, 50, \ldots$

$a_n = 2(5)^{n-1}$

$a_1 = 2;\ a_n = (5)\ a_{n-1}$

4. $12, -18, 27, \ldots$

$a_n = 12\left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

$a_1 = 12;\ a_n = \left(-\frac{3}{2}\right) a_{n-1}$

أوجد الحد المذكور لكل متتالية هندسية، أو للمتتالية ذات الخصائص المعطاة.

.5 a_5 لـ $20, 0.2, 0.002, \ldots$

0.0000002

.6 a_3 حيث $a_6 = \frac{1}{32}$، $r = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{4}$

.7 a_1 حيث $a_4 = 28$ ، $r = 2$

$\frac{7}{2}$

.8 a_9 لـ $\sqrt{3}, -3, 3\sqrt{3}, \ldots$

$81\sqrt{3}$

أوجد الأوساط الهندسية المحددة لكل زوج من الحدود غير المتتالية.

.9 2 و 0.25؛ وسيطان

$1, 0.5$

.10 -32 و -2؛ 3 أوساط

$16, -8, 4$ أو $-16, -8, -4$

أوجد مجموع كل مما يلي.

.11 أول ثمانية حدود في $\frac{3}{4} + \frac{9}{20} + \frac{27}{100} + \ldots$

≈ 1.84351

.12 $a_1 = -3$, $a_n = 786{,}432$, $r = -4$

$629{,}145$

13. $\sum_{n=3}^{11} -2(1.5)^{n-1}$ ≈ -336.99

14. $\sum_{n=2}^{6} 3(0.2)^{n-1}$ 0.74976

إذا كان ذلك ممكنًا، فأوجد مجموع كل متسلسلة لا نهائية.

15. $10 + 5 + 2.5 + \ldots$

20

16. $\sum_{n=2}^{\infty} 6\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

3

.17 **تعداد السكان** يزيد عدد السكان في مدينة بها 100,000 شخص بمعدل 2.5% في العام. بافتراض أن معدل النمو هذا يظل ثابتًا، قدّر عدد سكان المدينة بعد خمسة أعوام من الآن.

128,848 تقريبًا