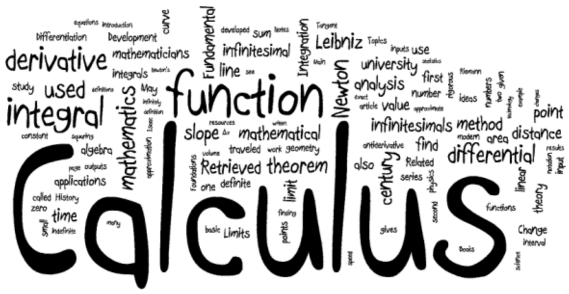
اوراق عمل - مادة الرياضيات
الصف الثاني عشر-المسار المتقدم
الفصل الثالث
2016/2017

الوحدة السابعة / الدرس الأول
التكامل



اعداد : محمود مناصرة
www.facebook.com/manasra.math
0558570980

الدرس الاول – المشتقات العكسية (الدوال الأصلية) والتكامل غير المحدود

المشتقة العكسية :

الدالة F (x) هي المشتقة العكسية للدالة $f\,(x)$ حيث $F'(x) = f(x)$

للدالة $f\,(x)$ عدد لا نهائي من المشتقات العكسية

تعريف : التكامل غير المحدود $\boxed{\int f\,(x)\,dx = F(x) + C}$

مجموعة كل المشتقات العكسية للدالة $f\,(x)$ هي التكامل غير المحدود للدالة f بالنسبة إلى x و يرمز له بالرمز $\int f\,(x)\,dx$. الرمز ∫ يعبر عن علامة التكامل و الدالة f هي الدالة المكاملة في التكامل ، x هي متغير التكامل و الثابت C هو ثابت التكامل .

نظرية: إذا كانت F (x) مشتقة عكسية للدالة $f\,(x)$ و G (x) مشتقة عكسية أيضاً للدالة $f\,(x)$ على الفترة I فإن G (x) = F (x) + C حيث C ثابت .

نتيجة :أي أن G (x) - F (x) = C (الفرق بين أي مشتقتين عكسيتين للدالة f هو دالة ثابتة)

$$\boxed{F'(x) = G'(x) = f(x)}$$

تمرين :أوجد المشتقة العكسية (الدالة الأصلية) لكل من الدوال الآتية :

$f(x) = x^3$	$f(x) = x^2$
$f(x) = 2x + 3$	$f(x) = \cos x$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$f(x) = 3x^2 - 2x + 5$

التكامل غير المحدود

النظرية 1.2 (قاعدة القوة)

لأي قوة نسبية $r \neq -1$،

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$$

هنا إذا كان $r < -1$. فالفترة I التي يكون عليها هذا معرفا يمكن أن تكون فترة لا تتضمن $x = 0$.

نظرية (2) : قاعدة القوى . الأس عدد نسبي :

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ , \ n \neq -1$$

تمرين: اوجد التكاملات التالية :

$\int x^{-3} dx$	$\int x^2 dx$
$\int \frac{1}{x^5} dx$	$\int x^{11} dx$
$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$	$\int \sqrt{x} \, dx$
$\int x^{\frac{2}{5}} dx$	$\int \sqrt[3]{x^2} \, dx$
$\int x^{-\frac{3}{2}} dx$	$\int \frac{1}{x^{-7}} dx$

قواعد أساسية للتكامل غير المحدود

قاعدة المشتقة	التكامل غير المحدود
$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=x^n \ , \ n\neq -1$	$(1)\ \int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \ , \ n\neq -1$
$\frac{d}{dx}\left(-\frac{\cos kx}{k}\right)=\sin kx$	$(2)\ \int \sin kx\,dx=-\frac{\cos kx}{k}+C$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin kx}{k}\right)=\cos kx$	$(3)\ \int \cos kx\,dx=\frac{\sin kx}{k}+C$
$\frac{d}{dx}\tan x=\sec^2 x$	$(4)\ \int \sec^2 x\,dx=\tan x+C$
$\frac{d}{dx}(-\cot x)=\csc^2 x$	$(5)\ \int \csc^2 x\,dx=-\cot x+C$
$\frac{d}{dx}\sec x=\sec x\tan x$	$(6)\ \int \sec x\tan x\,dx=\sec x+C$
$\frac{d}{dx}(-\csc x)=\csc x\cot x$	$(7)\ \int \csc x\cot x\,dx=-\csc x+C$
$\frac{d}{dx}(e^{kx})=ke^{kx}$	$(8)\ \int e^{kx}dx=\frac{e^{kx}}{k}+c$
$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(9)\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\sin^{-1}x+c$
$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=\frac{1}{1+x^2}$	$(10)\ \int \frac{1}{1+x^2}dx=\tan^{-1}x+c$
$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x)=\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$	$(11)\ \int \frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}dx=\sec^{-1}x+c$
$\frac{d}{dx}(\ln\lvert x\rvert)=\frac{1}{x}$	$(12)\ \int \frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+c$
نتيجة هامة :	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln\lvert f(x)\rvert+c$

خواص التكاملات غير المحدودة

ليكن k عدداً حقيقياً

(1) قاعدة الضرب في ثابت : $\int k\ f(x)\,dx=k\int f(x)\,dx$

(2) قاعدة الجمع و الطرح : $\int (f(x)\pm g(x))\,dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx$

تمرين : أوجد التكاملات التالية

(1) $\int (3\cos x + 4x^7)\, dx =$

(2) $\int (3e^x - \frac{2}{1+x^2})\, dx =$

(3) $\int (3x^4 - 6x^2)\, dx =$

(4) $\int (3\sqrt{x} - \frac{1}{x^4})\, dx =$

(5) $\int (2x^{-2} - \frac{1}{\sqrt{x}})\, dx =$

(6) $\int \frac{x^{\frac{1}{3}} - 3}{x^{\frac{2}{3}}}\, dx =$

(7) $\int \frac{x + 2x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{5}{4}}}\, dx =$

(8) $\int (2\sin x + \cos x)\, dx =$

(9) $\int \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$

(10) $\int 5\sec^2 x\, dx =$

(11) $\int (3e^x - 2)\, dx =$

(12) $\int (4x - 2e^x)\, dx =$

(13) $\int \frac{2x}{x^2+5}\, dx =$

(14) $\int \frac{3}{4x^2+4}\, dx =$

(15) $\int (3\cos x - \frac{1}{x})\, dx =$

(16) $\int (2\cos x - \sqrt{e^{2x}})\, dx =$

(17) $\int x^{\frac{1}{4}}(x^{\frac{5}{4}} - 4)\, dx =$

(18) $\int \frac{e^x}{e^x + 4}\, dx =$

(19) $\int \frac{e^x + 4}{e^x}\, dx =$

(20) $\int 4 \frac{\cos x}{\sin^2 x}\, dx =$

(21) $\int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}\, dx =$

(22) $\int \frac{(1-x)^2}{4}\, dx =$

(23) $\int 2 \sec x \tan x\, dx =$

(24) $\int (5x - \frac{3}{x^2})\, dx =$

تمرين : في الاسئلة التالية دالتين حدد اي منهما يمكن ايجاد الدالة العكسية لها بالقواعد الأساسية ومن ثم اوجدها

$\int (\sqrt{x^3}+4)dx$	$\int \sqrt{x^3+4}\, dx$

$\int \frac{x^2}{3x^2-4}\, dx$	$\int \frac{3x^2-4}{x^2}\, dx$

تمرين : أوجد الدالة $f(x)$ **التي تحقق الشروط التالية :**

(1) $f'(x)=3e^x+x \quad , f(0)=4$

(2) $f''(x)=12x^2+2e^x \quad , f'(0)=2 , f(0)=3$

(3) $f''(t)=2t+2 \quad , f(0)=2 , f(3)=2$

تمرين : أوجد كل الدوال **التي تحقق الشروط التالية :**

(1) $f''(x) = 3\sin x + 4x^2$

(2) $f'''(x) = 4 - \dfrac{2}{x^3}$

تمرين : أوجد الدالة $f(x)$ **تكون فيها النقطة** $(1, 2)$ **على التمثيل البياني للدالة ، وميل المماس** $(1, 2)$ **يساوي 3**
و $f''(x) = x - 1$

التطبيقات الفيزيائية: تعطى السرعة $\boldsymbol{v = ds / dt}$ أو العجلة $a = dv / dt$ لجسم يتحرك على خط إحداثي

دالة العجلة (التسارع) : $a(t)$ دالة السرعة $v(t)$: دالة الموقع $S(t)$:

$$\int v(t)\,dt = s(t) + c$$

$$\int a(t)\,dt = v(t) + c$$

s (المسافة) ⟵ v (السرعة) ⟵ a (العجلة)

تمرين: تسارع جسم عند الهبوط هو $y''(t) = -9.8\,m/s^2$ على فرض أن السرعة المتجهة الابتدائية هي $y'(t) = -30\,m/s$ والموقع الابتدائي هو $y(0) = 30000\,m$. أوجد الدالة المكانية $y(t)$

تمرين : حدد الدالة المكانية أذا كانت دالة السرعة المتجهة هي $v(t) = 3 - 12t$ والموقع الابتدائي هو $s(0) = 3$