يمكنك الحصول على جميع الملفات من أوراق عمل وامتحانات ومذكرات وملخصات لجميع الصفوف وجميع المواد الخاصة بالمنهاج الإماراتي من خلال الرابط التالي

https://www.almanahj.com

كما يمكنك الحصول على جميع الملفات لجميع الفصول عبر تحميل تطبيق المناهج من خلال الرابط التالي:

https://play.google.com/store/apps/details?id=com.almanahj.UAEapplication

يمكنك الحصول على جميع الروابط الخاصة بمجموعات المناهج الإماراتية على مواقع التواصل الاجتماعي واتساب وفيسبوك وتلغرام من خلال الدخول على الرابط التالي:

http://t.me/almanahj

الاسم _____ التاريخ _____

1-1

التبرير الاستقرائي والتخمين

كتابة التخمينات:

التبرير الاستقرائي هو التبرير الذي يعتمد على معلومات نتجت عن أمثلة مختلفة؛ للتوصل إلى نتيجة أو عبارة تُسمّى تخمينًا.

مثال 1 اكتب تخمينًا يتعلق بالعدد التالي في المتتابعة: ..., 1, 3, 9, 27, 81 .

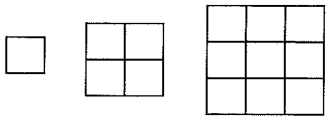
ابحث عن نمط:

كل واحد من هذه الأعداد هو قوة للعدد 3.

1	3	9	27	81
3^0	3^1	3^2	3^3	3^4

التخمين: سيكون العدد التالي 3^5، أيْ 243.

مثال 2 اكتب تخمينًا حول عدد المربعات الصغيرة في الشكل التالي في المتتابعة الآتية:



ابحث عن نمط:

أطوال أضلاع المربعات هي: 1, 2, 3 وحدات.

التخمين: سيكون طول ضلع المربع في الشكل التالي 4 وحدات، إذن سيكون في الشكل التالي 16 مربعًا صغيرًا.

www.almanahj.com

تمارين

اكتب تخمينًا يصف النمط في كلٍّ من المتتابعات الآتية، ثم استعمل هذا التخمين لكتابة الحد التالي في كلٍّ منها:

1) $-5, 10, -20, 40, \ldots$

2) $1, 10, 100, 1000, \ldots$

3) $1, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \ldots$

اكتب تخمينًا يعبّر عن كل قيمة أو علاقة هندسية ممّا يأتي:

4) $A(-1, -1), B(2,2), C(4,4)$

5) الزاويتان $\angle 1$ و $\angle 2$ تكوّنان زاوية قائمة.

6) $\angle ABC$ و $\angle DBE$ زاويتان متقابلتان بالرأس.

7) $\angle E$ و $\angle F$ زاويتان قائمتان.

1-1

التبرير الاستقرائي والتخمين

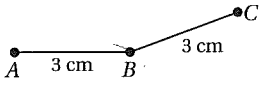
إيجاد مثال مضاد:

يكون التخمين خطأً، إذا وُجد مثال واحد يكون التخمين فيه غير صحيح. وهذا المثال يسمى **مثالًا مضادًّا**.

مثال **أوجد مثالًا مضادًّا يبيِّن عدم صحة التخمين الآتي.**

إذا كانت $\overline{AB} \cong \overline{BC}$، فإن B نقطة منتصف $\overline{AC}$.

هل يمكنك أن ترسم شكلًا تكون فيه $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ ، على ألّا تكون B نقطة منتصف $\overline{AC}$ ؟



يُعدّ الشكل المجاور مثالًا مضادًّا؛ لأن B ليست واقعة على $\overline{AC}$. إذن التخمين خطأ.

تمارين

حدِّد ما إذا كان كل تخمين ممّا يأتي صحيحًا أم خطأً:

1) إذا وقعت النقاط A, B, C على استقامة واحدة، فإن $AC=BC+AB$.

2) إذا كانت $\angle R$ و $\angle S$ متكاملتين، و $\angle T$ و $\angle R$ متكاملتين أيضًا، فإن $\angle S$ و $\angle T$ متطابقتان.

www.almanahj.com

3) إذا كانت $\angle ABC$ و $\angle DEF$ متكاملتين، فإنهما متجاورتان على خط مستقيم.

4) إذا كانت $\overline{DE} \perp \overline{EF}$، فإن $\angle DEF$ قائمة.

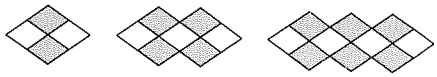
الاسم _____ التاريخ _____

1-1

التبرير الاستقرائي والتخمين

اكتب تخمينًا يصف النمط لكلٍّ من المتتابعات الآتية، ثم استعمله لإيجاد الحد التالي في المتتابعة:

1)



2) $8, 5, 2, -1, -4$

3) $4, \frac{9}{2}, 5, \frac{11}{2}, 6$

4) $-2, 4, -8, 16, -32$

اكتب تخمينًا لكلٍّ من القيم أو العلاقات الهندسية الآتية:

5) تقع النقاط A, B, C على استقامة واحدة، وتقع النقطة D بين B, C.

6) النقطة P هي نقطة منتصف $\overline{NQ}$.

www.almanahj.com

7) تشكل $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ أربعة أزواج زوايا متجاورة على خط مستقيم.

8) $\angle 3 \cong \angle 4$

حدّد ما إذا كانت التخمينات الآتية صحيحة أم خطأً، وإذا كانت خطأً فأعطِ مثالًا مضادًّا:

9) إذا كانت $\angle ABC$ و $\angle CBD$ متجاورتين على خط مستقيم ، فإن $\angle CBD \cong \angle ABC$.

10) إذا كانت $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ متطابقة، فإن النقاط A, B, C تقع على خط مستقيم.

11) إذا كان $AB + BC = AC$، فإن $AB = BC$.

12) إذا كانت $\angle 1$ متمِّمة لـ $\angle 2$، وكانت $\angle 1$ متممة لـ $\angle 3$ أيضًا، فإن $\angle 2 \cong \angle 3$.

1-1 تدريبات حل المسألة

التبرير الاستقرائي والتخمين

1) السطح المائل: دحرج عليٌّ كرات زجاجية على سطح مائل، وكان يقيس المسافة التي تقطعها الكرة كل ثانية، وسجّل البيانات في الجدول الآتي:

الثانية	الأولى	الثانية	الثالثة	الرابعة
المسافة (بالسنتمترات)	20	60	100	140

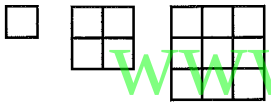
اكتب تخمينًا للمسافة التي ستقطعها الكرة في الثانية الخامسة.

2) الأعداد الأولية: العدد الأولي هو عدد أكبر من 1، ويقبل القسمة على نفسه وعلى 1 فقط، وقد قرأ سعد أن الأعداد الأولية مهمة جدًّا في عملية الترميز، لذا قرّر أن يجد طريقة منهجية لتحديد الأعداد الأولية. وبعد عدة محاولات وضع تخمينًا مُفاده أن $2^n - 1$ يكون عددًا أوليًّا لأيِّ عدد صحيح n، حيث $n > 1$.
أعط مثالًا مضادًّا لهذا التخمين.

3) عِلْمُ الأنساب: وضعت فاطمة مخططًا لنَسبِها، ممثّلًا بثلاثة رسوم كما هو موضح أدناه، حيث تمثل النقطَة الأولى فاطمة، ويمثل الرسم الثاني فاطمة ووالديها، ويمثل الرسم الثالث فاطمة ووالديها وجدَّيها وجدَّتيها.
ارسم الشكل التالي في هذه المتتابعة.

4) ميداليات: كُلِّفت هند بتوزيع 31 ميدالية على أعضاء 6 فِرَق رياضية متنافسة، فاستنتجت هندُ أن فريقًا واحدًا على الأقل سيحرز أكثر من 5 ميداليات. فهل استنتاجها صحيح؟ برِّر إجابتك.

5) أنماط: يوضح الشكل الآتي متتابعة مربعات، كل منها يتكون من بلاطات متطابقة مربعة الشكل.



www.almanahj.com

a) ابدأ من العدد صفر من البلاطات، كم بلاطة تحتاج لتكوين أول مربع؟ وكم بلاطة تضيف إلى المربع الأول لتكوين المربع الثاني؟ وكم بلاطة تضيف إلى المربع الثاني لتكوين المربع الثالث؟

b) كوّن تخمينًا حول مجموعة الأعداد التي تحصل عليها من إجابتك للفرع a.

c) كوّن تخمينًا حول مجموع أول n من الأعداد الفردية.

1-1 التدريبات الإثرائية

الأمثلة المضادة

عندما تتوصل إلى استنتاج بعد اختبارك لعدة حالات معيَّنة، فإنك تستعمل **التبرير الاستقرائي**. ومع ذلك كن حذرًا في أثناء استعمالك لهذا النوع من التبرير؛ لأنه في حالة وجود **مثال مضادٍّ** واحد، فإنك تكون قد أثبتّ عدم صحة هذا الاستنتاج.

مثال **هل العبارة $\frac{1}{x} \leq 1$ صحيحة عند التعويض عن x بالأعداد 1, 2, 3 ؟ وهل هذه العبارة صحيحة أيضًا لكل الأعداد الحقيقية؟ أوجد مثالًا مضادًّا إن كان ذلك ممكنًا.**

$\frac{1}{1} = 1,\ \frac{1}{2} < 1,\ \frac{1}{3} < 1$. لكن عندما $x = \frac{1}{2}$، فإن $\frac{1}{x} = 2$. ويثبت هذا المثال المضاد أن العبارة ليست صحيحة دائمًا.

تمارين

1) سُجلّت أعلى درجة حرارة في مكة المكرمة على مدار خمسة أعوام متتالية في شهر أغسطس، فهل نستنتج أنه سوف تُسجل أعلى درجة حرارة لهذا العام في مكة المكرمة في شهر أغسطس أيضًا؟

2) إذا علمت أن حمدان لم يتمكن من ركوب حافلة المدرسة يوم الثلاثاء على مدار أربعة أسابيع متتالية. فهل يمكن استنتاج أنه لن يتمكن من ركوب حافلة المدرسة في كل ثلاثاء؟

www.almanahj.com

3) هل المعادلة $\sqrt{k^2} = k$ صحيحة في حالة التعويض عن k بالأعداد 3, 2, 1؟وهل هذه المعادلة صحيحة لكل الأعداد الصحيحة أيضًا؟ هات مثالًا مضادًّا إن أمكن.

4) هل العبارة $2x = x + x$ صحيحة عند التعويض عن x بالأعداد $\frac{1}{2}$, 4, 0.7؟ وهل هذه العبارة صحيحة لكل الأعداد الحقيقيّة أيضًا؟ هات مثالًا مضادًّا إن أمكن.

$$\sqrt{(-2)^2} \neq -2$$

5) افترض أنك عيّنت أربع نقاط A, B, C, D، ثم رسمت القطع المستقيمة $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$. فهل تُعطي هذه الطريقة شكلًا رباعيًّا دائمًا أم أحيانًا؟ وضح إجابتك بالرسم.

6) افترض أنك رسمت دائرة، ووضعت عليها ثلاث نقاط، ثم وصلت بينها. فهل تكون زوايا المثلث الناتج حادة دائمًا أم أحيانًا؟ وضّح إجابتك بالرسم.

1-2

المنطق

تحديد قيم الصواب العبارة هي جملة خبرية تحتمل الصواب والخطأ. ويرمز إلى قيمة الصواب بـ (T) إذا كانت العبارة صحيحة، وبالرمز (F) إذا كانت خاطئة، ويمكن أن نرمز إلى أي عبارة بأحد الحروف وليكن p . فمثلًا يمكن أن نرمز إلى العبارة "الرياض مدينة سعودية" بالرمز p، وتكون هذه العبارة صائبة T.

ويمكننا ربط عبارات عدة بعضها ببعض لتكوين **عبارة مركبة**.

النفي: نفي العبارة p هو ليس p.	**عبارة الوصل**: هي الربط بين العبارة p والعبارة q بأداة الربط "و".	**عبارة الفصل**: هي الربط بين العبارة p والعبارة q بأداة الربط "أو".
الرمز: $\sim p$ (يُقرأ: ليس p)	الرمز: $p \wedge q$ (يُقرأ: p وq)	الرمز: $p \vee q$ (يُقرأ: p أو q)
قيم الصواب للعبارتين p و $\sim p$ متعاكسة.	تكون عبارة الوصل $p \wedge q$ صائبةً فقط عندما تكون كل من p وq صائبة.	تكون عبارة الفَصْل $p \vee q$ صائبةً إذا كانت p صائبة أوq صائبة أو كلتاهما صائبتين.

مثال 1 **استعمل العبارتين الآتيتين لكتابة عبارة مركبة لعبارتي الوصل الآتيتين، ثم أوجد قيمة صوابها:**

p: الفيل من الثدييات.

q: للمربع أربع زوايا قوائم.

a) $p \wedge q$.

اربط العبارتين بأداة الربط "و": الفيل من الثدييات، و للمربع أربع زوايا قوائم. لمّا كانت العبارتان p, q صائبتين، فإن هذه العبارة المركبة صائبة.

b) $\sim p \wedge q$

$\sim p$ هي العبارة "الفيل ليس من الثدييات". اربط $\sim p$ وq بالأداة "و" .

الفيل ليس من الثدييات وللمربع أربع زوايا قوائم.

الجزء الأول من العبارة المركبة $\sim p$ خطأ. إذن العبارة المركبة خطأ.

مثال 2 **استعمل العبارتين الآتيتين لكتابة عبارة مركبة لعبارتي الفصل الآتيتين، ثم أوجد قيمة صوابها:**

p: قطر الدائرة يساوي ضعفي نصف قطرها.

q: للمستطيل أربعة أضلاع متساوية الطول.

a) $p \vee q$

اربط العبارتين p وq بأداة الربط "أو".

قطر الدائرة يساوي ضعفي نصف قطرها، أو للمستطيل أربعة أضلاع متساوية الطول. الجزء الأول من العبارة المركبة صائب، إذن العبارة المركبة صائبة.

b) $\sim p \vee q$

اربط $\sim p$ وq بأداة الربط "أو" .

قطر الدائرة لا يساوي ضعفي نصف قطرها، أو للمستطيل أربعة أضلاع متساوية الطول. جُزءا هذه العبارة المركبة خطأ، لذا العبارة المركبة خطأ.

www.almanahj.com

تمارين

استعمل العبارات الآتية لكتابة العبارة المركبة لكل " عبارة وصل" أو " عبارة فصل" ممّا يأتي، ثم أوجد قيمة الصواب لها:

p: $10 + 8 = 18$ q: عدد أيام شهر سبتمبر 30 يومًا. r: للمستطيل أربعة أضلاع.

1) q و p

2) $p \vee r$

3) q أو r

4) $q \wedge \sim r$

1-2

المنطق

جداول الصواب: إحدى طرق تنظيم قيم الصواب للعبارات هي إنشاء **جدول الصواب**. يظهر جهة اليسار جداول الصواب لكلٍّ من عبارات النفي والوصل والفَصْل.

النفي	
p	$\sim p$
T	F
F	T

الفصل		
p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

الوصل		
p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

مثال 1 كوّن جدول الصواب للعبارة المركبة q أو r.

استعمل جدول صواب عبارة الفصل.

q	r	r أو q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

مثال 2 كوّن جدول الصواب للعبارة المركبة p و(q أو r).

استعمل جدول صواب عبارة الفصل، لكتابة قيم الصواب للعبارة (q أو r)، ثم استعمل جدول الوصل لكتابة قيم الصواب للعبارة p و(q أو r).

p	q	r	r أو q	p و(r أو q)
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	F
F	T	F	T	F
F	F	T	T	F
F	F	F	F	F

www.almanahj.com

تمارين

كوّن جدول صواب لكلٍّ من العبارات المركبة الآتية:

1) p أو r

2) $\sim p \vee q$

3) $q \wedge \sim r$

4) $\sim p \wedge \sim r$

5) q أو (r وp)

الاسم _____ التاريخ _____

1-2

المنطق

استعمل العبارات الآتية لكتابة عبارة مركبة لكل عبارة وصل أو فصل ممّا يأتي، ثم أوجد قيمة الصواب لها:

p: $-3-2=-5$

q: الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة.

r: $2+8>10$

s: مجموع قياسي الزاويتين المتتامتين يساوي $90°$.

1) p و q

2) $p \wedge r$

3) p أو s

4) $r \vee s$

www.almanahj.com

5) $p \wedge \sim q$

6) $q \vee \sim r$

أكمل كلًّا من جدولي الصواب الآتيين:

7)

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$\sim(\sim p \wedge q)$
T	T			
T	F			
F	T			
F	F			

8)

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$
T	T	F	
T	F	T	
F	T	F	
F	F	T	

أنشئ جدول صواب لكلٍّ من العبارتين المركبتين الآتيتين:

9) $\sim q \wedge r$

10) $\sim p \vee \sim r$

1-2

المنطق

1) كرة القدم: سأل كمال صديقه حامدًا إن كان فريق كرة القدم الذي يشارك فيه قد فاز في المباراة ليلة أمس، وهل سجَّل هدفًا. فأجاب حامد "نعم". ثم سأل كمال لاعبًا آخر في الفريق يُدعى سالمًا، هل سجل هو أو حامد هدفًا في المباراة؟فأجاب سالم بـ"نعم" أيضًا. ما الذي يمكنك استنتاجه حول ما إذا كان سالم قد سجَّل هدفًا أم لا؟

2) شوكولاتة: لدى نعيم صندوق يحوي نوعين مختلفين من قطع الشوكولاتة الصغيرة هما الأبيض والأسود.وقد تناول نعيم قطعة شوكولاتة من الصندوق. فهل العبارة $(\sim p \wedge \sim q) \sim$ صحيحة بناءً على المعطيات أدناه:

p: الشوكولاتة من النوع الأسود.

q: الشوكولاتة من النوع الأبيض.

3) ألعاب فيديو: يمكن أن يلعب عامر بلعبة الفيديو إذا رتّب غرفته أو نقل القُمامة إلى الخارج. ولكن إذا لم يحل عامر واجبه المنزلي فلن يُسمح له باللعب بلعبة الفيديو مطلقًا. أكمل جدول الصواب أدناه مستعملًا العبارات الآتية:

p: رتّب عامر غرفته.

q: نقل عامر القمامة إلى الخارج.

r: حلّ عامر واجبه المنزلي.

s: يمكن أن يلعب عامر بلعبة الفيديو.

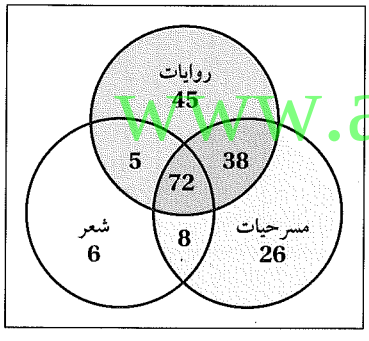
p	q	r	s
T	T	T	
T	T	F	
T	F	T	
T	F	F	
F	T	T	
F	T	F	
F	F	T	
F	F	F	

4) أنشئ جدول صواب للعبارة الآتية:

$$(q \vee r) \wedge (\sim q \vee \sim r)$$

V V V ∧ V

5) مطالعة: سُئل 200 شخصٍ عن نوع الكتب الأدبية التي يحبون قراءَتها من بين الروايات والشعر والمسرحيات. فكانت النتيجة على الصورة التي يوضحها شكل ڤن الآتي.



a) ما عدد الأشخاص الذين يحبُّون قراءة الأنواع الثلاثة من الأدب؟

b) ما عدد الأشخاص الذين يحبُّون قراءة الشعر؟

c) ما النسبة المئوية للأشخاص الذين يحبُّون قراءة الشعر والروايات من بين أولئك الذين يحبون قراءة المسرحيات؟

www.almanahj.com

1-2 التدريبات الإثرائية

السودوكو

السودوكو أُحجية رياضية يتطلب حلها استعمال المنطق.
وتتألف عادة من شبكة مربعة مكونة من 9 مربعات؛ قُسّم كل واحد منها إلى تسعة مربعات صغيرة. تبدأُ الأحجية بوضع بضعة أعداد، ويُطلب إلى اللاعب
ملء المربعات المتبقية باستعمال القواعد الآتية:

- يجب أن يحوي كل صف وكل عمود الأعداد من 1 إلى 9 دون تكرار أيٍّ منها.
- يجب أن تحوي كل شبكة جزئية الأعداد من 1 إلى 9، دون تكرار أيٍّ منها.

5				1		2		
1	7		3		5	9		8
2		8	4	7	9		3	
9			1		6			7
	8	6	9		7	1		
		3					5	9
		2	7			3	1	
3	5				1			6
8			5		3	7		

www.almanahj.com

تمارين

1) ما البداية الجيدة لحل الأحجية؟ ولماذا؟

2) وضّح كيف يمكنك استعمال القاعدة الثانية من أجل استعمال الأعداد كلها لحل الأحجية الكبيرة.

3) أكمل هذه الأُحْجية.

1-3

العبارات الشرطية

عبارات إذا كان ... فإن...: عبارة (إذا كان ...فإن...) هي عبارة مثل "إذا كنت تقرأ هذه الصفحة، فإنك تدرس رياضيات". وتُسمّى العبارة التي يمكن كتابتها على الصورة (إذا كان ... فإن...) عبارة شرطية. والجملة التي تلي كلمة "إذا" تُسمّى **الفرض**، والجملة التي تلي كلمة "فإن" تسمّى **النتيجة**.

ويمكن تمثيل العبارة الشرطية بالرموز على النحو الآتي: $p \rightarrow q$ ، وتقرأ "p تؤدي إلى q "، أو "إذا كان p، فإن q".

مثال 1 **حدّد الفرض والنتيجة في العبارة الشرطية.**

إذا كانت $\angle X \cong \angle R$, $\angle R \cong \angle S$ فإن $\angle X \cong \angle S$.

الفرض — النتيجة

مثال 2 **حدّد الفرض والنتيجة، واكتب العبارة على صورة (إذا كان... فإن...)**

سوف تحصل على بيتزا مجانية مقابل 12 بطاقة.

إذا كان لديك 12 بطاقة، فإنك ستحصل على بيتزا مجانية.

الفرض — النتيجة

www.almanahj.com

تمارين

حدّد الفرض والنتيجة في العبارات الشرطية الآتية:

1) إذا كان اليوم الجمعة، فإنه لا يوجد دوام مدرسي.

2) إذا كان $x - 8 = 32$، فإن $x = 40$.

3) إذا كان لمضلع أربع زوايا قائمة، فإن المضلع مستطيل.

اكتب العبارات الآتية على صورة (إذا كان ... فإن..):

4) كل القِردة تُحب الموز.

5) مجموع قياسي الزاويتين المتتامتين يساوي 90°.

6) النقاط الواقعة على استقامة واحدة هي النقاط التي تقع على المستقيم نفسه.

حدّد قيمة الصواب لكل عبارة من العبارات الشرطية الآتية، فإذا كانت صائبة، فوضّح تبريرك. وإن لم تكن كذلك، فأعط مثالًا مضادًا:

7) إذا كان اليوم الأربعاء، فقد كان يوم أمس الجمعة.

8) إذا كان a عددًا موجبًا، فإن $10a$ أكبر من a.

1-3

العبارات الشرطية

العكس، والمعكوس، والمعاكس الإيجابي: إذا غيّرت الفرض أو النتيجة في العبارة الشرطية، فإنك ستحصل على العبارات الشرطية المرتبطة. ويبيّن الجدول أدناه ثلاثة أنواع من العبارات الشرطية المرتبطة هي: العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي، وكيفية ارتباطها بالعبارة الشرطية.

العبارة	بالرموز	مكوّنة من	أمثلة
الشرطية	$p \rightarrow q$	فرض مُعطًى ونتيجة	إذا كانت الزاويتان متقابلتين بالرأس، فإنهما متطابقتان.
العكس	$q \rightarrow p$	تبديل الفرض والنتيجة	إذا كانت الزاويتان متطابقتين، فإنهما متقابلتان بالرأس.
المعكوس	$\sim p \rightarrow \sim q$	نفي كلٍّ من الفرض والنتيجة في العبارة الشرطية.	إذا لم تكن الزاويتان متقابلتين بالرأس، فإنهما غير متطابقتين.
المعاكس الإيجابي	$\sim q \rightarrow \sim p$	نفي كلٍّ من الفرض والنتيجة في العبارة الشرطية، ومن ثم تبديل موقعيهما.	إذا لم تكن الزاويتان متطابقتين، فإنهما غير متقابلتين بالرأس.

مثلما تكون العبارة الشرطية إما صائبة أو خطأ، من الممكن أن تكون العبارات الشرطية المرتبطة إما صائبة أو خطأ أيضًا.

للعبارة الشرطية ومعاكسها الإيجابي قيمة الصواب نفسها دائمًا. وكذلك فإن للعكس والمعكوس قيمة الصواب نفسها دائمًا.

www.almanahj.com

تمارين

اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي لكلٍّ من العبارات الشرطية الآتية، وحدّد إن كانت العبارة الشرطية المرتبطة صائبة أم خطأ، وإذا كانت خطأً، فأعط مثالًا مضادًّا.

1) إذا كنت تقيم في الرياض، فإنك تقيم في المملكة العربية السعودية.

2) إذا كان المضلع مستطيلًا، فإنه مربع.

3) إذا كانت الزاويتان متتامتين، فإن مجموع قياسيهما يساوي $90°$.

الاسم _____ التاريخ _____

1-3

العبارات الشرطية

حدّد الفرض والنتيجة في كلٍّ من العبارات الشرطية الآتية:

1) إذا اشتريت جهاز حاسب آلي ولم يعجبك، فإنك تستطيع إرجاعه خلال 30 يومًا.

2) إذا كان $x + 8 = 4$ ، فإن $x = -4$.

3) إذا تفوّق أحمد في الدراسة وحصل على مرتبة الشرف، فإنه سيُكافأ برحلة سياحية إلى أبها.

اكتب العبارات الشرطية الآتية في صورة (إذا كان ... فإن...):

4) المضلع ذو الأضلاع الأربعة شكل رباعي.

5) قياس الزاوية الحادة أقل من $90°$.

www.almanahj.com

حدّد قيمة الصواب لكلٍّ من العبارات الشرطية الآتية، فإذا كانت صحيحة فوضّح تبريرك. وإذا لم تكن كذلك فأعطِ مثالًا مضادًّا.

6) إذا كان لديك 5 ريالات، فإن لديك 5 أوراق نقود من فئة الريال الواحد.

7) إذا رُمي مكعبان عدديان، وكان مجموع العددين الظاهرين على الوجهين العلويين يساوي 11، فإن أحد هذين العددين يكون 5.

8) إذا كانت الزاويتان متكاملتين، فإن إحداهما تكون زاوية حادة.

9) اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي للعبارة الشرطية الآتية، وحدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم خطأ. وإذا كانت خطأً، فاكتب مثالًا مضادًّا. "إذا كان 89 يقبل القسمة على 2، فإن 89 عدد زوجيٌّ".

1-3

العبارات الشرطية

1) قرأ عليّ في أحد الأبحاث أن الأشخاص الذين يتعرضون لأشعة الشمس فترات طويلة يكُونون أكثر عرضة للإصابة بسرطان الجلد. فهل يمكن أن يستنتج عليٌّ من هذه المعلومة أنه سيقلل احتمال إصابته بسرطان الجلد إذا امتنع عن التعرض لأشعة الشمس لفترات طويلة؟

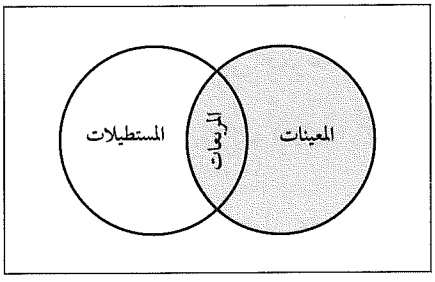
2) **متوازي الأضلاع**: يقول زيد إن متوازي الأضلاع شكل رباعي زواياه المتقابلة متطابقة. اكتب هذه العبارة في صورة (إذا كان ... فإن...).

3) **السفر جوًّا**: سمع سعد في أثناء انتظاره في قاعة المسافرين الإعلان الآتي:"إذا كنت ستجلس في الصفوف من 10 إلى 20، فعليك الصعود إلى الطائرة حالًا" اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي لهذه العبارة.

4) **دواء**: كُتب على قارورة دواء العبارة الآتية "إذا كنت ستقود السيارة، فيجب ألا تتناول هذا الدواء". اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي لهذه العبارة.

5) **أشكال ڤن**: رسم مجاهد شكل ڤن؛ ليوضح العلاقة بين الأشكال الرباعية والمستطيلات والمربعات والمعيَّنات. (المُعين شكل رباعي له أربعة أضلاع متطابقة).

الأشكال الرباعية



إذا كان Q ترمز إلى شكل رباعي، فحدّد ما إذا كانت كل عبارة ممّا يأتي صحيحة أم خطأ، وإذا كانت خطأ، فأعط مثالًا مضادًّا.

a) إذا كان Q مربعًا، فإن Q مستطيل.

b) إذا لم يكن Q مستطيلًا، فإن Q ليس معيَّنًا.

c) إذا كان Q مستطيلًا ولكن ليس مربعًا، فإن Q ليس معينًا.

d) إذا لم يكن Q معيَّنًا، فإن Q ليس مربعًا.

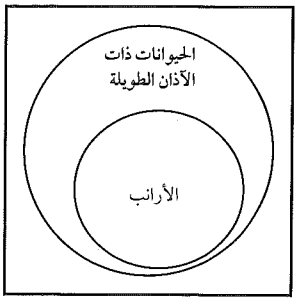
www.almanahj.com

الاسم _____ التاريخ _____

1-3 التدريبات الإثرائية

أشكال فن

هي نوع من الرسوم التي يمكن استعمالها لتوضيح العبارات الشرطية، وتعتمد هذه الأشكال على رسم دوائر تمثل مجموعاتٍ من الأشياء. لتمثيل العبارة "جميع الأرانب لها آذان طويلة" بأشكال فن، فإننا نرسم دائرة كبيرة تمثل جميع الحيوانات التي لها آذان طويلة، ونرسم دائرة صغيرة داخلها لتمثل جميع الأرانب. يوضح شكل فن أن كل أرنب جزء من مجموعة الحيوانات ذات الآذان الطويلة.



تُسمّى مجموعة الأرانب **مجموعة جزئية** من مجموعة الحيوانات ذات الآذان الطويلة.

ويسهّل استعمال أشكال فن كتابة العبارة (جميع الأرانب لها آذان طويلة) في صورة (إذا كان... فإن...)

نلاحظ أن كل أرنب يقع ضمن مجموعة الحيوانات ذات الآذان الطويلة،

لذا إذا كان الحيوان أرنبًا فإن له آذانًا طويلة.

تمارين

ارسم شكل فن لكلٍّ عبارة ممّا يأتي، ثم اكتبها في صورة (إذا كان...فإن...).

1) كل الكلاب لها شعر طويل.

2) كل الأعداد النسبية هي أعداد حقيقية.

www.almanahj.com

3) كل المربعات مضلعات محدبة.

4) يُسمح لأعضاء هيئة التدريس دخول قاعة استراحة الكلّية.

1-4

التبرير الاستنتاجي

قانون الفَصْل المنطقي. التبرير الاستنتاجي هو عملية استعمال الحقائق أو القواعد أو التعريفات أو الخصائص، للوصول إلى نتائج منطقية. أحد أشكال التبرير الاستنتاجي الذي يتوصل بواسطته إلى نتيجة من عبارة شرطية صائبة $p \rightarrow q$، وعبارة صائبة p ، يُدعى **قانون الفَصْل المنطقي**.

قانون الفَصْل المنطقي	إذا كانت $q \rightarrow p$ صائبة، وكانت p صائبة، فإن q صائبة.

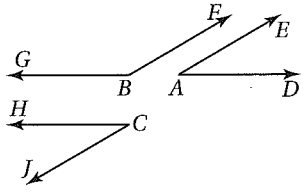
مثال

حدّد ما إذا كانت النتيجة في كلٍّ مما يأتي صحيحة أم لا، اعتمادًا على المعطيات، وفسّر تبريرك.

a) المعطيات: الزاويتان المكمّلتان للزاوية نفسها تكونان متطابقتين.

$\angle C$ و$\angle A$ مكمّلتان للزاوية $\angle B$.

النتيجة: $\angle C$ و $\angle A$متطابقتان.



العبارة $\angle C$ و$\angle A$ مكمّلتان للزاوية $\angle B$ ، هي الفرض في العبارة الشرطية. إذن النتيجة صحيحة بحسب قانون الفَصْل.

b) المعطيات: إذا أراد أحمد أن يشترك في سباق الدراجات، فإنه يلبس خوذة على رأسه.

لبس أحمد خوذة على رأسه.

النتيجة: يريد أحمد أن يشترك في سباق الدراجات.

www.almanahj.com

العبارة المعطاة هي النتيجة في العبارة الشرطية الصائبة. ولكن معرفة صواب العبارة الشرطية وصواب نتيجتها لا تجعل الفرض صائبًا. يُمكن أن يكون أحمد قد ارتدى الخوذة لسبب آخر غير الاشتراك في سباق الدراجات. لذا فالنتيجة غير صحيحة.

تمارين

حدّد ما إذا كانت النتيجة في كلٍّ مما يأتي صحيحة أم لا، اعتمادًا على المعطيات، وفسّر تبريرك.

1) المعطيات: إذا كان العدد يقبل القسمة على 6، فإنه يقبل القسمة على 3.

العدد 18 يقبل القسمة على 6.

النتيجة: العدد 18 يقبل القسمة على 3.

2) المعطيات: إذا كان الحيوان الأليف أرنبًا، فإنه يأكل الجزر.

اشترى هيثم حيوانًا أليفًا يأكل الجزر.

النتيجة: الحيوان الأليف الذي اشتراه هيثم هو الأرنب.

3) المعطيات: إذا كانت الدجاجة حمراء اللون، فإنها تضع بيضًا بنّي اللون.

دجاجة أسماء حمراء اللون.

النتيجة: تضع دجاجة أسماء بيضًا بني اللون.

1-4

التبرير الاستنتاجي

قانون القياس المنطقي هناك طريقة أخرى لاستنباط النتائج، هي استعمال قانون القياس المنطقي. ويمكّنك هذا القانون من الوصول إلى نتائج من عبارتين شرطيتين صائبتين، إذا كانت نتيجة إحداهما فرضًا للأخرى.

قانون القياس المنطقي	إذا كانت $p \rightarrow q$ صائبة، وكانت $q \rightarrow r$ صائبة، فإن $p \rightarrow r$ صائبة.

مثال **كلتا العبارتين الشرطيّتين أدناه صائبتان. استعمل قانون القياس المنطقي للتوصل إلى نتيجة صحيحة، واذكرها.**

(1) إذا كان العدد طبيعيًّا، فإنه عدد صحيح.

(2) إذا كان العدد صحيحًا، فإنه عدد نسبي.

p: العدد طبيعي.

q: العدد صحيح.

r: العدد نسبي.

العبارتان الشرطيتان هما $p \rightarrow q$ و $q \rightarrow r$. بتطبيق قانون القياس المنطقي، نتوصل إلى نتيجة صحيحة هي $p \rightarrow r$. والعبارة التي تمثّل $p \rightarrow r$ هي: "إذا كان العدد طبيعيًّا، فإنه عدد نسبي".

www.almanahj.com

تمارين

استعمل قانون القياس المنطقي، للتوصل إلى نتيجة صحيحة من كل مجموعة من العبارات المعطاة إن أمكن ذلك. وإلّا فاكتب " لا توجد نتيجة صحيحة ".

1) إذا أكل الخروف العشب، فإنه سيكون سعيدًا.
الخروف سعيد.

2) إذا كانت الزاوية مكمّلة لزاوية منفرجة، فإنها زاوية حادة.
وإذا كانت الزاوية حادة، فإن قياسها أقل من $90°$.

3) إذا كان قياس $\angle A$ أقل من $90°$، فإنها زاوية حادة.
وإذا كانت $\angle A$ زاوية حادة، فإن $\angle A \cong \angle B$.

4) إذا كانت الزاوية قائمة، فإن قياسها يساوي $90°$.
وإذا تعامد مستقيمان، فإنهما يصنعان زاوية قائمة.

5) إذا ذاكرتَ استعدادًا للاختبار، فإنك ستحصل على درجة مرتفعة.
درجتك في الاختبار مرتفعة.

الاسم _____ التاريخ _____

1-4

التبرير الاستنتاجي

حدِّد ما إذا كانت النتيجة صحيحةً اعتمادًا على المعطيات. وإذا لم تكن كذلك فاكتب "غير صحيحة"، وفسّر تبريرك.

1) المعطيات: إذا كان مجموع قياسي زاويتين يساوي $180°$، فإن الزاويتين متكاملتان.
$m\angle A + m\angle B = 180°$.

النتيجة: $\angle A$ و $\angle B$ زاويتان متكاملتان.

2) المعطيات: إذا كان مجموع قياسي زاويتين يساوي $90°$، فإن الزاويتين متتامتان.
$m\angle ABC = 45°$ و $m\angle DEF = 48°$.

النتيجة: $\angle ABC$ و $\angle DEF$ زاويتان متتامتان.

3) المعطيات: إذا كان مجموع قياسي زاويتين يساوي $180°$، فإن الزاويتين متكاملتان.
$\angle 1$ و $\angle 2$ زاويتان متجاورتان على خط مستقيم.

النتيجة: $\angle 1$ و $\angle 2$ زاويتان متكاملتان.

www.almanahj.com

استعمل قانون القياس المنطقي للحصول على نتيجة صحيحة من العبارات المعطاة إن أمكنك ذلك. وإلّا فاكتب "لا يمكن". وفسّر تبريرك.

4) إذا كانت الزاويتان متتامتين، فإن مجموع قياسيهما يساوي $90°$.
وإذا كان مجموع قياسي الزاويتين يساوي $90°$، فإن الزاويتين حادتان.

5) إذا استمرت موجة الحر، فسيزداد استعمال المكيّفات.
وإذا زاد استعمال المكيّفات، فستزداد تكلفة الطاقة.

6) إذا كان اليوم الثلاثاء، فسيأخذ عثمان حصة كيمياء.
وإذا أخذ عثمان حصة كيمياء، فإنه سيصل إلى البيت الساعة 4 مساءً.

7) إذا كان الحيوان البحري (نجم البحر)، فإنه يعيش في منطقة المدّ من المحيط.
ومنطقة المدّ من المحيط هي المنطقة الأقل استقرارًا من بين مناطق المحيط.

1-4

التبرير الاستنتاجي

1) **شواخص**: وُضع هذان الشاخصان على مدخل مغارة الأشباح في مدينة الألعاب:

لا يُسمح بدخول من هم دون **5** سنوات.	لا يُسمح بدخول من هم دون **8** سنوات إلا بصحبة أحد الوالدين.

وفي داخل المغارة وجد طفل مع أحد والديه. فماذا يمكن أن تستنتج حول عمر هذا الطفل، اعتمادًا على الشاخصين المعلقين على مدخل المغارة؟

2) **منطق**: عندما ذهب والد محمد إلى عمله أعطى محمدًا بعض التعليمات. "إذا احتجت إلي...، يمكنك محادثتي على هاتفي المحمول...، وإذا لم أُجبك فهذا يعني أنني في اجتماع، مع العلم أن هذا الاجتماع لن يستمر أكثر من 30 دقيقة، وسوف أتصل بك مرة أخرى عند انتهاء الاجتماع".اتصل محمد بوالده بواسطة هاتفه المحمول، ولكن والده لم يرد على مكالمته، لأنه كان مشاركًا في الاجتماع. فاستنتج محمد أن عليه الانتظار 30 دقيقة على الأكثر، قبل أن يحصل على مكالمة من والده. ما القانون المنطقي الذي استعمله محمد للوصول إلى هذه النتيجة؟

3) إذا كان الحاج قادمًا من نجد إلى مكة، فإنه يُحرم من قرن المنازل. اكتب نتيجة صحيحة للفرض الآتي: "إذا لم يُحرم فايزٌ من قرن المنازل..."

4) **اتجاهات**: أراد همام مقابلة المدير المالي في مكتبه في الطابق الخامس عشر في عمارة. وعندما وصل إلى العمارة أشار عليه موظف الاستقبال أن يستعمل المصعد الأحمر للوصول إلى الطابق الخامس عشر. وفي أثناء بحثه عن المصعد الأحمر أشار رجل أمن العمارة إلى أن المصعد يقع بجانب خزانة تُعرضُ فيها عملات قديمة نادرة. وعندما وجد المصعد الأحمر واستقلّه وقابل المدير المالي، رحَّب به المدير وسأله:"هل أعجبتك العملات الموجودة في الخزانة؟" فكيف استنتج المدير أن همّامًا رأى خزانة العملات؟

5) **قوانين**: ينص القانون على أنه لا يحق لمن يقلُّ عُمره عن 21 عامًا أن يتقدم لوظيفة مدير مالي، ومن يقل عمره عن 18 عامًا لا يحق له التصويت في الانتخابات.حدّد الأعمار الممكنة التي تصفها كلُّ حالةٍ فيما يأتي:

a) لا يحق لِـ "جابر" أن يتقدم لوظيفة مدير مالي، ولكن يحق له التصويت.

b) لا يحق لِـ "خالدٍ" التصويت، ولكن يحق له أن يتقدم لوظيفة مدير مالي.

www.almanahj.com

الاسم _____ التاريخ _____

1-4 التدريبات الإثرائية

الاستنتاجات الصحيحة والاستنتاجات الخاطئة

ماذا يمكنك أن تستنتج من العبارات المجاورة؟

(1) البلبل طائر.

(2) البلبل يُغرّد.

(3) الطائر يُغرِّد إذا كان سعيدًا.

نستطيع أن نستنتج من العبارتين (1) و (3) أن البلبل يغرِّد إذا كان سعيدًا.
لكنه من الخطأ أن نستنتج من العبارتين (2) و (3) أن البلبل سعيد.

ويمكن كتابة العبارة (3) في صورة (إذا كان...، فإن...) على النحو الآتي: (إذا كان الطائر سعيدًا، فإنه يُغرِّد).
وعادةً يستعمل صانعو الإعلانات المنطق المغلوط بخفية، من أجل بيع سلع معيَّنة. ادرس الاستنتاجات الآتية لتحدّد أيها صحيح وأيها خطأ.

حدّد ما إذا كانت الاستنتاجات الآتية صحيحة أم خطأ:

1) I إذا اشتريت حقيبة من نوع "الجلدية المبطّنة"، فإنها تعمّر طويلًا.

II اشترى عُمر حقيبة من نوع "الجلدية المبطنة".
نتيجة: حقيبة عُمر تعمّر طويلًا.

2) I إذا اشتريت حقيبة من نوع "الجلدية المبطنة"، فإنها تعمّر طويلًا.

II حقيبة عُمر عمّرت طويلًا.
نتيجة: حقيبة عُمر من نوع "الجلدية المبطنة".

3) I إذا استعملت معجون أسنان من نوع "العلامة البيضاء"، فسوف تحظى بأسنان بيضاء جميلة.

II أسنان نواف بيضاء جميلة.
نتيجة: استعمل نواف معجون أسنان من نوع "العلامة البيضاء".

4) I إذا قرأتِ كتاب "المأكولات الشهية"، فسوف تعدّين طعامًا شهيًّا بسهولة.

II قرأت نعمية كتاب "المأكولات الشهية".
نتيجة: تستطيع نعيمة أن تعدّ طعامًا شهيًّا.

5) I إذا اشتريت برمجية مُعالج النصوص، فسوف تستطيع أن تكتب رسائل بسرعة أكبر.

II اشترى أحمد برمجية معالج النصوص.
نتيجة: يستطيع أحمد أن يكتب الرسائل بسرعة أكبر.

6) I السبّاحون المشهورون يرتدون ملابس السباحة من نوع "الخط المائي".

II ارتدى قاسم ملابس سباحة من نوع "الخط المائي".
نتيجة: قاسم سباح مشهور.

7) اكتب مثالًا على استنتاج منطقيٍّ مغلوط شاهدته في بعض الإعلانات.

www.almanahj.com

1-5

المسلّمات والبراهين الحرة

النقطة والمستقيم والمستوى. المسلّمة في الهندسة هي العبارة التي تُقبل على أنها صحيحة دون برهان، والمسلّمات تصف علاقات أساسية في الهندسة.

المسلّمة 1 . 1:	كل نقطتين مختلفتين يمر بهما مستقيم واحد.
المسلّمة 1 . 2:	كل ثلاث نقاط مختلفة ولا تقع على مستقيم واحد يمرُّ بها مستوى واحد.
المسلّمة 1 . 3:	كل مستقيم يحوي نقطتين على الأقل.
المسلّمة 1 . 4:	كل مستوى يحوي ثلاث نقاط مختلفة على الأقل ليست على استقامة واحدة.
المسلّمة 1 . 5:	إذا وقعت نقطتان في مستوى، فإن المستقيم الذي يحوي هاتين النقطتين يقع كليًّا في ذلك المستوى.
المسلّمة 1 . 6:	إذا تقاطع مستقيمان، فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة فقط.
المسلّمة 1 . 7:	إذا تقاطع مستويان، فإن تقاطعهما خط مستقيم.

مثال

بيّن ما إذا كانت العبارات الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا:

a) يوجد مستوى واحد فقط يحوي النقاط الثلاث A, B, C.

صحيحة أحيانًا؛ إذا كانت النقاط A, B, C على استقامة واحدة، فإنه يوجد عدَّة مستويات تحويها. أما إذا لم تكن هذه النقاط على استقامة واحدة، فإنه يوجد مستوًى واحد فقط يحويها.

b) النقطتان E و F يمرّ بهما مستقيم واحد.

صحيحة دائمًا؛ حسب المسلّمة الأولى التي تنصّ على أنه يوجد مستقيم واحد فقط يمرّ بأي نقطتين.

c) يتقاطع مستقيمان في نقطتين مختلفتين M و N.

غير صحيحة أبدًا؛ يتقاطع المستقيمان في نقطة واحدة فقط.

www.almanahj.com

تمارين

بيّن ما إذا كانت العبارات الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا:

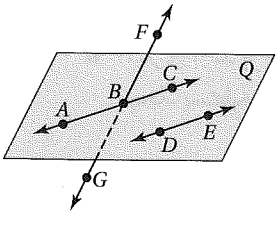
1) يمرّ المستقيم بنقطة واحدة فقط.

2) أيُّ مستقيمين l و m يكونان متقاطعين.

3) إذا وقعت النقطتان G و H في المستوى M، فإن $\overline{GH}$ يكون عموديًّا على المستوى M.

4) يتقاطع المستويان R و S في النقطة T.

5) إذا لم تكن النقاط A, B, C على استقامة واحدة، فإن القطع المستقيمة $\overline{CA}, \overline{BC}, \overline{AB}$ تقع في مستوى واحد فقط.



في الشكل المجاور، $\overline{DE}$, $\overline{AC}$ واقعتان في المستوى Q، و $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$. اذكر المسلّمة التي يمكن استعمالها لإثبات صحة كلٍّ من العبارتين الآتيتين:

6) يوجد مستوى واحد فقط يحتوي على النقاط F, B, E.

7) يقع $\overleftrightarrow{BE}$ في المستوى Q.

الاسم _____ التاريخ _____

1-5

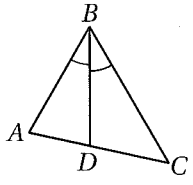
المسلّمات والبراهين الحرة

البراهين الحرة: الحجة المنطقية التي تستعمل التبرير الاستنتاجي للوصول إلى نتيجة صحيحة تُسمى **برهانًا**. وأحد أنواع البراهين، هو البرهان الحر الذي تكتب فيه فقرة تفسر الأسباب التي تجعل العبارة صحيحة.

تسمَّى العبارة التي يمكن إثبات صحتها **نظرية**. ويمكنك استعمال المفردات غير المعرّفة، والتعريفات والمسلّمات والنظريات المبرهنة في إثبات صحة عبارات أخرى.

مثال

في ΔABC، $\overline{BD}$ منصّف الزاوية $\angle ABC$ ، اكتب برهانًا حرًّا لإثباتِ أنَّ $\angle ABD \cong \angle CBD$.



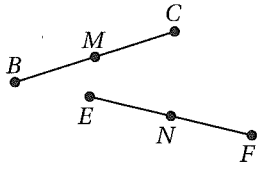
نعلم من تعريف منصّف الزاوية أنه يقسمها إلى زاويتين متطابقتين. ولما كانت $\overline{BD}$ منصف زاوية، فإنها تقسم $\angle ABC$ إلى زاويتين متطابقتين. ولذا فإن $\angle ABD \cong \angle CBD$.

تمارين

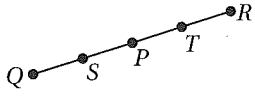
1) إذا علمت أن $\angle A \cong \angle D$، وأن $\angle D \cong \angle E$، فاكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن $\angle A \cong \angle E$.

www.almanahj.com

2) إذا علمت أن $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ وأن M نقطة منتصف $\overline{BC}$ ، وأن N نقطة منتصف $\overline{EF}$ ، فاكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن $BM = EN$.



3) إذا علمت أن S نقطة منتصف $\overline{QP}$، وأن T نقطة منتصف $\overline{PR}$ ، وأن P نقطة منتصف $\overline{ST}$، فاكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن $QS = TR$.

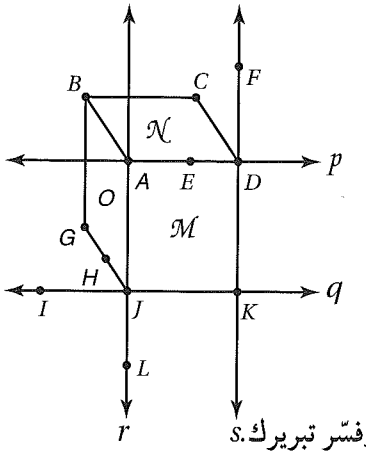


الاسم _____ التاريخ _____

1-5

المسلّمات والبراهين الحرة

اشرح كيف يوضح الشكل المجاور صحة كلٍّ من العبارتين الآتيتين، ثم اذكر المسلّمة المستعملة لبيان صحة كل عبارة:



1) يتقاطع المستويان O و $\mathcal{M}$ في المستقيم r.

2) يقع المستقيم p في المستوى $\mathcal{N}$.

حدّد ما إذا كانت العبارات الآتية صحيحة دائمًا أوصحيحة أحيانًا أو ليست صحيحة أبدًا. وفسّر تبريرك.

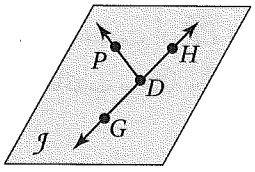
3) النقاط الثلاث التي تقع على استقامة واحدة تحدّد مستوى واحدًا.

4) تحدّد النقطتان A , B مستقيمًا واحدًا.

www.almanahj.com

5) يحتوي المستوى ثلاثة مستقيمات على الأقل.

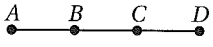
في الشكل المجاور، يقع كلٌّ من $\overleftrightarrow{DG}$ و $\overrightarrow{DP}$ في المستوى $\mathcal{J}$، وتقع H على $\overleftrightarrow{DG}$.



اذكر المسلّمة التي يمكن استعمالها لإثبات أن كل عبارة من العبارتين الآتيتين صحيحة:

6) G و P تقعان على الخط المستقيم نفسه.

7) تقع النقاط D, H, P في المستوى نفسه.



8) برهان: في الشكل المجاور، النقطة B نقطة منتصف $\overline{AC}$، والنقطة C نقطة منتصف $\overline{BD}$. اكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن $AB = CD$.

1-5

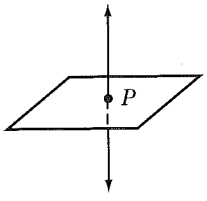
المسلّمات والبراهين الحرة

1) بناء: يقوم أحمد وأسعد ببناء سطح لمنزلهما. ويريدان أن يتكوّن السطح من مستويين مائلين يلتقيان عند قنطرة منحنية. فهل ذلك ممكن؟

2) خطوط جوية: تريد شركة طيران أن توفر رحلات جوية إلى المدن الآتية: حائل، المدينة المنورة، الرياض، جدة، الدمام، جازان. فرسم مدير الشركة مستقيمات يصل الواحد منهما بين اثنتين من هذه المدن على الخريطة. إذا لم تكن أيٌّ ثلاثٍ من هذه المدن على المستقيم نفسه، فكم مستقيمًا رسم المدير؟

3) مثلثات: حاول بحّار رصْد حوتٍ بواسطة منظاره. ولكن الحوت كان بعيدًا جدًّا، ولم يظهر على شاشة الرادار. لكنَّ البحّار رأى قاربًا بعيدًا فاتصل به من أجل تحديد اتجاه الحوت. فسّر كيف يمكن أن تساعد هذه المعلومة البحّار على تحديد موقع الحوت، ومتى تكون هذه المعلومة غير مُفيدة؟

4) نقاط: يدّعي خالد أن المستقيم يقطع المستوى في نقطة واحدة فقط، ووضّح ادّعاءَه هذا بالرسم الآتي:



ويعتقد عامر أنه يمكن أن يتقاطع المستقيم مع المستوى في أكثر من نقطة. فأيهما على صواب؟ فسّر إجابتك.

5) صداقة: تتألف شركة صغيرة من 16 موظفًا. لاحظ مالك هذه الشركة أن موظفيه لا يعرف بعضهم بعضًا بصورة جيدة، فقرر رسم خريطة الصداقة في الشركة. فوضع 16 نقطة على قطعة من الورق على ألا تقع ثلاث نقاط على استقامة واحدة. وجعل كل نقطة تمثل أحد موظفي هذه الشركة. وسأل كل موظف عن أصدقائه، ومن ثمَّ رسم قطعًا مستقيمة تربط كل موظف بأصدقائه.

a) ما أكبر عدد من القطع المستقيمة التي يمكن رسمها، بحيث تصل كل واحدة منها بين نقطتين من 16 نقطة؟

b) عندما انتهى مالك الشركة من رسم خريطة الصداقة، وجد أن موظفيه توزَّعوا ضمن مجموعتين؛ إحداهما تحوي 10 أشخاص والثانية تحوي 6 أشخاص. وتربط الأشخاص ضمن المجموعة الواحدة جميعًا علاقة صداقة، غير أنه لا توجد علاقة صداقة بين أيٍّ من أفراد المجموعة الأولى مع أيّ شخص من المجموعة الثانية. فما عدد القطع المستقيمة المرسومة على هذه الخريطة؟

www.almanahj.com

الاسم _____ التاريخ _____

1-5 التدريبات الإثرائية

زوجيٌّ وفرديٌّ

لتحديد ما إذا كان العدد زوجيًّا، ننظر إن كان رقم آحاده يقبل القسمة على 2 أم لا. ومع ذلك فإن هذا ليس تعريف العدد الزوجي. ولكن التعريف الرياضي للعدد الزوجِيِّ ينصُّ على أن العدد يكون زوجيًّا إذا استطعنا كتابته في صورة $2k$ لعدد صحيح k.

يوظف البرهان الآتي هذا التعريف لإثبات أن مجموع عددين زوجيَّين يكون عددًا زوجيًّا أيضًا.

افرض أن m و n عددان زوجيَّان، وعليه يمكن، حسب تعريف العدد الزوجيِّ كتابتهما في صورة $m = 2\ell$ و$n = 2j$، حيث j , ℓ عددان صحيحان. نريد أن نبيّن أنه يمكن كتابة $m + n$ في صورة $2k$ ، لعدد صحيح k ؛ لإثبات أن $m + n$ عدد زوجي. ويمكن كتابة $m + n$ في الصورة $2\ell + 2j$ أو $2(\ell + j)$ باستعمال خاصية التوزيع. ولمّا كان ℓ و j عددين صحيحين، فإن $\ell + j$ يساوي عددًا صحيحًا وليكن k، أيْ أن $m + n$ يساوي $2k$ ، حيث k ، عدد صحيح، وعليه فإن $m + n$ عدد زوجي.

وينصُّ تعريف العدد الفردي على أن العدد يكون فرديًّا، إذا أمكن أن نكتبه في صورة $2k + 1$ لعدد صحيح k .

استعمل تعريف العدد الزوجي والعدد الفردي؛ لكتابة برهانٍ حرٍّ لكلٍّ من العبارات الآتية:

1) مجموع عددين فرديين يكون عددًا زوجيًّا.

www.almanahj.com

2) ناتج ضرب عددين فرديين يكون عددًا فرديًّا.

3) ناتج ضرب عددين زوجيين يكون عددًا زوجيًّا.

الاسم _____ التاريخ _____

1-6

البرهان الجبري

البرهان الجبري هو مصطلح يُطلق على سلسلة الخطوات الجبرية المُتخذة لحل مسألة مع تبرير كلِّ خُطوة. والجدول الآتي يبيِّن خصائص درَسْتَها سابقًا. وهذه الخصائص صحيحة لأيِّ أعداد حقيقية مثل: a, b, c.

خاصيتا الإضافة والطرح للمساواة	إذا كان $a = b$، فإن $a+c = b+c$ و $a-c = b-c$.
خاصيتا الضرب والقسمة للمساواة	إذا كان $a = b$ و $c \neq 0$ فإن $a \cdot c = b \cdot c$، و $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.
خاصية الانعكاس للمساواة	$a = a$.
خاصية التماثل للمساواة	إذا كان $a = b$، فإن $b = a$.
خاصية التعدي للمساواة	إذا كان $a = b$ و $b = c$، فإن $a = c$.
خاصية التعويض للمساواة	إذا كان $a = b$، فإنه يمكن استبدال a بالعدد b في أيِّ معادلة أو عبارة.
خاصية التوزيع	$a(b+c) = ab + ac$.

مثال حُلّ المعادلة $6x + 2(x-1) = 30$، واكتب تبريرًا لكلِّ خطوة.

الخطوات الجبرية	الخصائص
$6x + 2(x-1) = 30$	المُعطيات
$6x + 2x - 2 = 30$	خاصية التوزيع
$8x - 2 = 30$	خاصية التعويض للمساواة
$8x - 2 + 2 = 30 + 2$	خاصية الإضافة للمساواة
$8x = 32$	خاصية التعويض للمساواة
$\frac{8x}{8} = \frac{32}{8}$	خاصية القسمة للمساواة
$x = 4$	خاصية التعويض للمساواة

www.almanahj.com

تمارين

أكمل البُرهانين الآتيين:

1) المعطيات: $\frac{4x+6}{2} = 9$

المطلوب: إثبات أن $x = 3$

البرهان:

العبارات	المبرّرات
a) $\frac{4x+6}{2} = 9$	a) _____
b) $2(\frac{4x+6}{2}) = 2(9)$	b) خاصية الضرب
c) $4x + 6 = 18$	c) _____
d) $4x + 6 - 6 = 18 - 6$	d) _____
e) $4x =$ _____	e) خاصية التعويض
f) $\frac{4x}{4} =$ _____	f) خاصية القسمة
g) _____	g) خاصية التعويض

2) المعطيات: $4x + 8 = x + 2$

المطلوب: إثبات أن $x = -2$

البرهان:

العبارات	المبرّرات
a) $4x+8 = x+2$	a) _____
b) $4x+8-x = x+2-x$	b) _____
c) $3x + 8 = 2$	c) خاصية التعويض
d) _____	d) خاصية الطرح
e) _____	e) خاصية التعويض
f) $\frac{3x}{3} = -\frac{6}{3}$	f) _____
g) _____	g) خاصية التعويض

الاسم _____ التاريخ _____

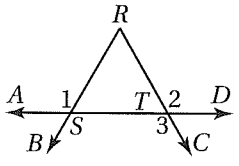
1-6

البرهان الجبري

البرهان الهندسي تُعبِّر الأعداد في الهندسة عن قياسات، ولذلك يمكن استعمال خصائص الأعداد في البرهان الهندسي. والجدول الآتي يوضح بعض الخصائص الجبرية التي تستعمل في البراهين.

الخاصية	القطع المستقيمة	الزوايا
الانعكاس	$AB = AB$	$m\angle 1 = m\angle 1$
التماثل	إذا كان $AB = CD$، فإن $CD = AB$.	إذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$، فإن $m\angle 2 = m\angle 1$.
التعدّي	إذا كان $AB = CD$ و $CD = EF$ فإن $AB = EF$.	إذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$ و $m\angle 2 = m\angle 3$، فإن $m\angle 1 = m\angle 3$.

مثال اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات صحة التخمين الآتي.



المعطيات: $m\angle 1 = m\angle 2,\ m\angle 2 = m\angle 3$

المطلوب: إثبات أن $m\angle 1 = m\angle 3$

البرهان:

العبارات	المبرّرات
1) $m\angle 1 = m\angle 2$	1) معطيات
2) $m\angle 2 = m\angle 3$	2) معطيات
3) $m\angle 1 = m\angle 3$	4) خاصية التعدّي للمساواة

www.almanahj.com

تمارين

اذكر الخاصية التي تبرّر كل عبارة ممّا يأتي:

1) إذا كان $m\angle 2 = m\angle 1$، فإن $m\angle 1 = m\angle 2$.

2) إذا كان $m\angle 1 = 90°$ و $m\angle 2 = m\angle 1$، فإن $m\angle 2 = 90°$.

3) إذا كان $AB = RS$ و $RS = WY$، فإن $AB = WY$.

4) إذا كان $AB = CD$، فإن $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$.

5) إذا كان $m\angle 1 + m\angle 2 = 110°$ و $m\angle 2 = m\angle 3$، فإن $m\angle 1 + m\angle 3 = 110°$.

6) $RS = RS$

7) إذا كان $AB = RS$ و $TU = WY$، فإن $AB + TU = RS + WY$.

8) إذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$ و $m\angle 2 = m\angle 3$، فإن $m\angle 1 = m\angle 3$.

9) إذا كان قانون مساحة المثلث $A = \frac{1}{2}bh$، فإن bh تساوي مِثْلَي مساحة المثلث.
اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات صحة هذا التخمين.

الاسم _____ التاريخ _____

1-6

البرهان الجبري

اذكر الخاصية التي تبرِّر كل عبارة ممّا يأتي:

1) إذا كان $m\angle A = 80^\circ$، فإن $m\angle A = 80^\circ$.

2) إذا كان $RS = TU$ و $TU = YP$، فإن $RS = YP$.

3) إذا كان $7x = 28$، فإن $x = 4$.

4) إذا كان $VR + TY = EN + TY$، فإن $VR = EN$.

5) إذا كان $m\angle 1 = 30^\circ$ و $m\angle 1 = m\angle 2$، فإن $m\angle 2 = 30^\circ$.

أكمل البرهان الآتي:

المعطيات: $8x - 5 = 2x + 1$

المطلوب: إثبات أن $x = 1$

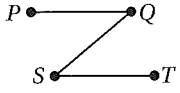
البرهان:

العبارات		المبرّرات
a)	$8x - 5 = 2x + 1$	a) _____
b)	$8x - 5 - 2x = 2x + 1 - 2x$	b) _____
c)	_____	c) خاصية التعويض
d)	_____	d) خاصية الإضافة
e)	$6x = 6$	e) _____
f)	$\frac{6x}{6} = \frac{6}{6}$	f) _____
g)	_____	g) _____

www.almanahj.com

اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات صحة التخمين الآتي:

6) إذا كان $\overline{PQ} \cong \overline{QS}$ و $\overline{QS} \cong \overline{ST}$، فإن $PQ = ST$.



الاسم _____ التاريخ _____

1-6

البرهان الجبري

1) ماعز: لدى كلٍّ من قاسم وعابد العدد نفسه من الماعز. وكذلك لدى كلٍّ من عابد وجميل العدد نفسه من الماعز. نستطيع أن نستنتج أن لدى كلٍّ من قاسم وجميل العدد نفسه من الماعز، دون معرفة عدد الماعز لدى أيٍّ منهما. فما الخاصية التي تُستعمل للوصول إلى هذا الاستنتاج؟

2) نقود: لدى كل من عثمان وشعبان المبلغ نفسه من النقود. ويريدان أن يتشاركا في شراء حلوى، وأن يقتسما ثمنها بالتساوي. فهل يبقى مع كلٍّ منهما المبلغ نفسه بعد شراء الحلوى؟ وما الخاصية التي تساعدك على الإجابة؟

3) تصنيع: تنتج شركة قطعًا إلكترونية صغيرة. قيمة كل قطعة 6.50 ريالاتٍ. وينتج خط الإنتاج الأول 4443 قطعة، وينتج خط الإنتاج الثاني 5557 قطعة، ولمَّا سُئل المُشرف على الإنتاج عن القيمة الكلية للقطع، أجاب على الفور "65000 ريالٍ". من الواضح أن المشرف أعطى الإجابة بهذه السرعة دون إجراء العمليات الحسابية بضرب 6.50 ريالاتٍ في 4443، وإضافة الناتج إلى حاصل ضرب 6.50 ريالاتٍ في 5557. فسّر كيف استطاع المشرف إعطاء النتيجة بهذه السرعة.

4) آنية فخّارية: تقوم كلٌّ من آمنة وفاطمة بطلاء جرار فخارية. وبإمكان كلٍّ منهما طلاء 8 جرار كلَّ ساعة. وفي أحد الأيام عملت فاطمة 6 ساعات، في حين عملت آمنة 9 ساعات. فما عدد الجِرار التي قامتا بطلائها في ذلك اليوم؟ وضّح كيف تتوصل إلى الجواب باستعمال خاصية التوزيع.

5) أعمار: يزيد عُمر والد حسن ثماني سنواتٍ على 4 أمثال عُمر حسن، وعُمر والد حسن يساوي 36 سنةً.

a) عبّر عن هذه المعطيات بمعادلة جبرية بالمتغير x مفترضًا أن عمر حسن يساوي x.

www.almanahj.com

b) املأ الفراغات في الجدول أدناه، والذي يبيّن الخطوات المستعملة لإيجاد قيمة x مع الخاصية التي تبرِّر كلَّ خطوة.

الخطوات الجبرية	الخصائص
1) $4x + 8 = 36$	1) المعادلة الأصلية
2) _____	2) خاصية الطرح
3) $4x = 28$	3) _____
4) $\frac{4x}{4} = \frac{28}{4}$	4) _____
5) _____	5) خاصية التعويض

الاسم _____ التاريخ _____

1-6 التدريبات الإثرائية

خصائص التماثل والانعكاس والتعدي

تحقق علاقة المساواة ثلاث خصائص مهمة هي:

الانعكاس $a = a$

التماثل إذا كان $a = b$ ، فإن $b = a$.

التعدي إذا كان $a = b$ و $b = c$ ، فإن $a = c$.

وهناك علاقات أُخرى تحقق بعض هذه الخصائص أو كلَّها. خذ العلاقة الآتية "بجانب" لثلاثة أشياء أسماؤها هي (X, Y, Z).
أيُّ الخصائص أعلاه تكون صحيحة لهذه العلاقة؟

X بجانب X. خطأ

إذا كانت X بجانب Y، فإن Y بجانب X. صحيحة

إذا كانت X بجانب Y و Y بجانب Z، إذن X بجانب Z. خطأ

أيْ أن خاصية التماثل وحدها صحيحة للعلاقة "بجانب".

اذكر أيّ الخصائص (التماثل، الانعكاس، التعدي) تكون صحيحة لكلٍّ من العلاقات الآتية:

www.alnanahj.com

1) أطول من

2) من ذُرية

3) عمودي على

4) لايساوي

5) أشدُّ دفئًا من

6) أقل من أويساوي

7) أختٌ لِـ

8) صديق لِـ

9) اكتب مثالين لعلاقتين، واذكر أيّ الخصائص الثلاث تحققها هاتان العلاقتان.

الاسم _____ التاريخ _____

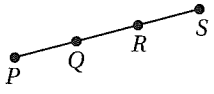
1-7

إثبات علاقات بين القطع المستقيمة

جمع القطع المستقيمة. هناك مسلّمتان أساسيتان في التعامل مع القطع المستقيمة وأطوالها هما: مسلّمة المسطرة التي يقوم عليها خط الأعداد، ومسلّمة جمع القطع المستقيمة، التي توضح معنى أن تقع نقطة بين نقطتين أخريين.

مسلّمة المسطرة	النقاط الواقعة على مستقيم أو قطعة مستقيمة يمكن ربطها بأعداد حقيقية. وكلّ عدد حقيقي يقابل نقطة واحدة على المستقيم أو القطعة المستقيمة.
مسلّمة جمع القطع المستقيمة	إذا كانت A، B، C، ثلاث نقاط على استقامة واحدة، فإن النقطة B تقع بين A و C إذا وفقط إذا كان $AB + BC = AC$.

مثال **اكتب برهانًا ذا عمودين**



المعطيات: Q نقطة منتصف $\overline{PR}$، R نقطة منتصف $\overline{QS}$

المطلوب: إثبات أن $QS = PR$

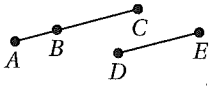
البرهان:

العبارات	المبرّرات
1) Q نقطة منتصف $\overline{PR}$ وَ R نقطة منتصف $\overline{QS}$	1) معطيات
2) $PQ = QR$, $QR = RS$	2) تعريف نقطة المنتصف
3) $PQ = RS$	3) خاصية التعدّي
4) $PQ + QR = QR + RS$	4) خاصية الإضافة
5) $PQ + QR = PR$, $QR + RS = QS$	5) مسلّمة جمع القطع المستقيمة
6) $PR = QS$	6) خاصية التعويض

www.almanahj.com

تمارين

أكمل كلًّا من البرهانين الآتيين:



1) **المعطيات:** $BC = DE$

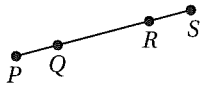
المطلوب: إثبات أن $AB + DE = AC$

البرهان:

العبارات	المبرّرات
1) $BC = DE$	1) _____
2) _____	2) مسلّمة جمع القطع المستقيمة
3) $AB + DE = AC$	3) _____

2) **المعطيات:** Q تقع بين P و R، و S تقع بين Q و R، و $PR = QS$

المطلوب: إثبات أن $PQ = RS$



البرهان:

العبارات	المبرّرات
1) Q تقع بين P و R	1) معطيات
2) $PQ + QR = PR$	2) _____
3) R تقع بين Q و S	3) _____
4) _____	4) مسلّمة جمع القطع المستقيمة
5) $PR = QS$	5) _____
6) $PQ + QR = QR + RS$	6) _____
7) $PQ + QR - QR = QR + RS - QR$	7) _____
8) _____	8) خاصية التعويض

الاسم _____ التاريخ _____

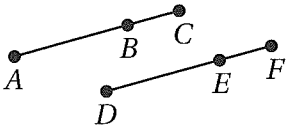
1-7

إثبات علاقات بين القطع المستقيمة

تطابق القطع المستقيمة. تذكّر أن أطوال القطع المستقيمة أعداد تحقّق خصائص الانعكاس والتماثل والتعدّي للمساواة. ولمّا كانت القطع المستقيمة التي لها الطول نفسه متطابقة، فإن تطابق القطع المستقيمة يحقّق خصائص الانعكاس والتماثل والتعدّي أيضًا.

خاصية الانعكاس	$\overline{AB} \cong \overline{AB}$
خاصية التماثل	إذا كان $\overline{CD} \cong \overline{AB}$، فإن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$
خاصية التعدّي	إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ و $\overline{CD} \cong \overline{EF}$، فإن $\overline{AB} \cong \overline{EF}$.

مثال اكتب برهانًا ذا عمودين



المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{DE}$، و $\overline{BC} \cong \overline{EF}$

المطلوب: إثبات أن $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

البرهان:

العبارات	المبرّرات
1) $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$	1) معطيات
2) $AB = DE$, $BC = EF$	2) تعريف تطابق القطع المستقيمة
3) $AB + BC = DE + EF$	3) خاصية الإضافة
4) $AB + BC = AC$, $DE + EF = DF$	4) مسلّمة جمع القطع المستقيمة
5) $AC = DF$	5) خاصية التعويض
6) $\overline{AC} \cong \overline{DF}$	6) تعريف تطابق القطع المستقيمة

www.almanahj.com

تمارين

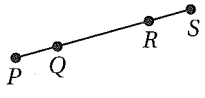
برّر كلًّا من العبارات الآتية بإحدى خصائص التطابق:

1) إذا كان $\overline{GH} \cong \overline{DE}$، فإن $\overline{DE} \cong \overline{GH}$.

2) إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{RS}$، و $\overline{RS} \cong \overline{WY}$ فإن $\overline{AB} \cong \overline{WY}$.

3) $\overline{RS} \cong \overline{RS}$

4) أكمل البرهان الآتي:



المعطيات: $\overline{PR} \cong \overline{QS}$

المطلوب: إثبات أن $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$

البرهان:

العبارات	المبرّرات
a) $\overline{PR} \cong \overline{QS}$	a) _____
b) $PR = QS$	b) _____
c) $PQ + QR = PR$	c) _____
d) _____	d) مسلّمة جمع القطع المستقيمة
e) $PQ + QR = QR + RS$	e) _____
f) _____	f) خاصية الطرح
g) _____	g) تعريف تطابق القطع المستقيمة

الاسم _____ التاريخ _____

1-7

إثبات علاقات بين القطع المستقيمة

برّر كل عبارة ممّا يأتي مستعملًا إحدى خصائص المساواة أو التطابق أو إحدى المسلّمات:

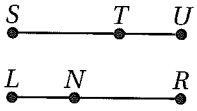
1) $QA = QA$

2) إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ و $\overline{BC} \cong \overline{CE}$ ، فإن $\overline{AB} \cong \overline{CE}$.

3) إذا كانت Q بين P و R ، فإن $PR = PQ + QR$.

4) إذا كان $AB + BC = EF + FG$ و $AB + BC = AC$، فإن $EF + FG = AC$.

برهان: أكمل كلًّا من البرهانين الآتيين:



5) المعطيات: $\overline{SU} \cong \overline{LR}$

$\overline{TU} \cong \overline{LN}$

المطلوب: إثبات أن $\overline{ST} \cong \overline{NR}$

البرهان:

العبارات	المبرّرات
a) $\overline{SU} \cong \overline{LR}, \overline{TU} \cong \overline{LN}$	a) _____
b) _____	b) تعريف القطع المستقيمة المتطابقة
c) $SU = ST + TU$ $LR = LN + NR$	c) _____
d) $ST + TU = LN + NR$	d) _____
e) $ST + LN = LN + NR$	e) _____
f) $ST + LN - LN = LN + NR - LN$	f) _____
g) _____	g) خاصية التعويض
h) $\overline{ST} \cong \overline{NR}$	h) _____

www.almanahj.com

6) المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

المطلوب: إثبات أن $\overline{CD} \cong \overline{AB}$

البرهان:

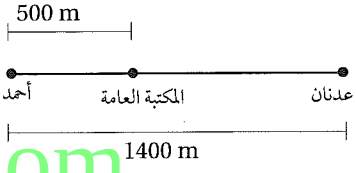
العبارات	المبرّرات
a) _____	a) معطيات
b) $AB = CD$	b) _____
c) $CD = AB$	c) _____
d) _____	d) تعريف القطع المستقيمة المتطابقة

1-7

إثبات علاقات بين القطع المستقيمة

1) عائلة: خالد أقصر من شقيقه سالم بـ 11cm، وبندر أقصر من أخيه سلطان بـ 11cm. إذا كان خالد أقصر من بندر، فقارن بين طولي سالم وسلطان، وقارن بين طوليهما إذا كان طول خالد يساوي طول بندر.

2) مسافة: يسكن أحمد على بُعد 1400 m من بيت عدنان، وتقع مكتبة عامة بين بيتيهما، وهي على بُعد 500 m من بيت أحمد.



ما المسافة بين المكتبة العامة وبين بيت عدنان؟

3) أخشاب: يعمل سعيد في ورشة خشب. فطلب صاحب الورشة من سعيد أن يتحقق مِمَّا إذا كان لمجموعة من قطع الخشب الطول نفسه. وقد كانت القطع مرقّمة من 1 إلى 12. فاختار سعيد قطعة الخشب رقم 1 وقارنها مع بقية القطع فوجدها جميعًا تساويها في الطول. فسّر كيف تعرف أن القطعتين 7 , 10 لهما الطول نفسه، على الرغم من أن سعيدًا لم يقارن بين طوليهما مباشرةً؟

4) جِوارٌ: يقيم زيد وجعفر ومحمد في ثلاثة بيوتٍ تقع كُلُّها على المستقيم نفسه. في حين يقع بيت جعفر بين بيتي زيد ومحمد، والمسافة بين بيت زيد وبيت محمد ميل واحد. فهل يمكن أن يبعُد بيت جعفر ميلًا واحدًا عن كلٍّ من بيت زيد وبيت محمد؟

5) إضاءة: وضعت المصابيح A, B, C, D, E في صفٍّ واحد. وكان المِصباح الأوسط هو نقطة منتصف المسافة بين المصباحين الثاني والرابع. وهو أيضًا نقطة منتصف المسافة بين المِصباحين الأول والأخير.

a) ارسم شكلًا يوضح هذا الوضع.

www.almanahj.com

b) أكمل البرهان الآتي:

المعطيات: C نقطة منتصف كلٍّ من $\overline{BD}$ و $\overline{AE}$.

المطلوب: إثبات أن $AB = DE$.

العبارات	المبرّرات
1) C نقطة منتصف $\overline{BD}$ و $\overline{AE}$	1) معطيات
2) $BC = CD$	2) _____
3) $AC = AB + BC$، و _____ $CE = CD + DE$	3) مسلّمة جمع القطع المستقيمة
4) $AB = AC - BC$	4) _____
5) _____	5) خاصية التعويض
6) $DE = CE - CD$	6) خاصية الطرح
7) _____	7) _____

الاسم _____ التاريخ _____

1-7 التدريبات الإثرائية

نقطة المنتصف

إذا كان إحداثيًّا A هما (x_1, y_1) وإحداثيًّا B هما (x_2, y_2)، وكانت M نقطة منتصف $\overline{AB}$، فإنه يمكن إيجاد إحداثيي M باستعمال الصيغة الآتية:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

افرض أن النقطة P تقع على $\overline{AB}$ وبُعدها عن A يساوي $\frac{1}{4}$ المسافة من A إلى B.

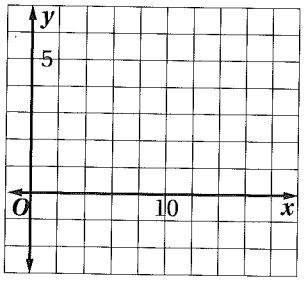
يقول مجاهد إنه يمكن إيجاد إحداثيات P باستعمال الصيغة التالية:

$$P = \left(\frac{x_1 + x_2}{4}, \frac{y_1 + y_2}{4}\right).$$

1) هل صيغة مجاهد لإيجاد P صحيحة أم لا؟ فسّر إجابتك.

www.almanahj.com

2) استعمل صيغة نقطة المنتصف لإيجاد إحداثيات النقطة P، واكتب الناتج بدلالة x_1, y_1, x_2, y_2.



استعمل المستوى الإحداثي المجاور للإجابة عن الأسئلة 3-5.

3) عيّن النقطتين $A(2, -2)$ و $B(14, 4)$.

4) عيّن النقطة P بين A و B على أن يكون $AP = \frac{1}{4}(AB)$، وأوجد إحداثيات P.

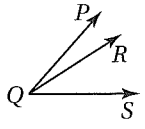
5) عيّن النقطة C على أن تقع B بين A و C، ويكون $BC = \frac{1}{4}(AB)$. وأوجد إحداثيات C.

الاسم _____ التاريخ _____

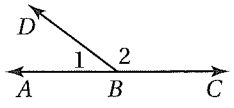
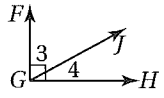
1-8

إثبات علاقات بين الزوايا

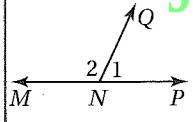
الزوايا المتتامة والمتكاملة. هناك مسلّمتان أساسيتان للتعامل مع الزوايا هما: مسلّمة المنقلة والتي تربط قياسات الزوايا بالأعداد. ومسلّمة جمع الزوايا، والتي تبيِّن العلاقة بين أجزاء الزاوية مع الزاوية نفسها.

مسلّمة المنقلة	يرتبط قياس أيّ زاوية بعدد حقيقي واحد يقع بين $0°$ و $180°$.	
مسلّمة جمع الزوايا	تقع النقطة R داخل $\angle PQS$، إذا وفقط إذا كان $m\angle PQR + m\angle RQS = m\angle PQS$.	

يمكن استعمال هاتين المسلّمتين لإثبات النظريتين الآتيتين:

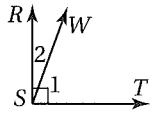
نظرية الزاويتين المتكاملتين	إذا كانت زاويتان متجاورتين على مستقيم ، فإنهما متكاملتان. مثال: $\angle 2$ و $\angle 1$ زاويتان متجاورتان على مستقيم، لذا فإن $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$.	
نظرية الزاويتين المتتامتين	إذا كوّن الضلعان غير المشتركين في زاويتين متجاورتين زاوية قائمة، فإن الزاويتين تكونان متتامّتين. مثال: في الشكل المجاور $\overleftrightarrow{GH} \perp \overleftrightarrow{GF}$ ، لذا فإن $m\angle 3 + m\angle 4 = 90°$.	

مثال 1 إذا كانت $\angle 2$ و $\angle 1$ زاويتين متجاورتين على مستقيم ، وكان $m\angle 2 = 115°$، فأوجد $m\angle 1$.



$m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$	نظرية الزوايتين المتكاملتين
$m\angle 1 + 115° = 180°$	بالتعويض
$m\angle 1 = 65°$	خاصية الطرح

مثال 2 إذا كوّنت $\angle 1$ و $\angle 2$ زاوية قائمة. وكان $m\angle 2 = 20°$، فأوجد $m\angle 1$.



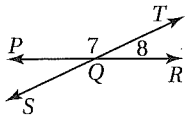
$m\angle 2 + m\angle 1 = 90°$	نظرية الزاويتين المتتامتين
$m\angle 1 + 20° = 90°$	بالتعويض
$m\angle 1 = 70°$	خاصية الطرح

www.almanahj.com

تمارين

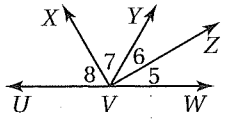
أوجد قياس كلٍّ من الزوايا المُرقّمة، ثم اذكر النظرية التي تبرّر إجابتك:

1)



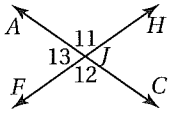
$m\angle 7 = (5x + 5)°$
$m\angle 8 = (x - 5)°$

2)



$m\angle 5 = (5x)°$, $m\angle 6 = (4x + 6)°$
$m\angle 7 = (10x)°$
$m\angle 8 = (12x - 12)°$

3)



$m\angle 11 = (11x)°$
$m\angle 13 = (10x + 12)°$

الاسم _____ التاريخ _____

1-8

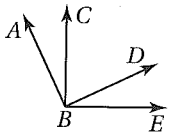
إثبات علاقات بين الزوايا

الزوايا المتطابقة والزوايا القائمة: تتحقّق خصائص الانعكاس والتماثل والتعدّي جميعها في علاقة تطابق الزوايا.

كما تنطبق النظريات الآتية على الزوايا أيضًا.

1.6 نظرية تطابق المكمِّلات	الزاويتان المكمّلتان للزاوية نفسها أو لزاويتين متطابقتين تكونان متطابقتين.
1.7 نظرية تطابق المتمِّمات	الزاويتان المتمّمتان للزاوية نفسها أو لزاويتين متطابقتين تكونان متطابقتين.
1.8 نظرية الزوايتين المتقابلتين بالرأس	الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان.
النظرية **1.9**	يتقاطع المستقيمان المتعامدان ويكوّنان أربع زوايا قوائم.
النظرية **1.10**	جميع الزوايا القائمة متطابقة.
النظرية **1.11**	المستقيمان المتعامدان يكوّنان زوايا متجاورة متطابقة.
النظرية **1.12**	إذا كانت الزاويتان متطابقتين ومتكاملتين، فإنهما قائمتان.
النظرية **1.13**	إذا كانت الزاويتان المتطابقتان متجاورتين على مستقيم، فإنهما قائمتان.

مثال **اكتب برهانًا ذا عمودين**



المعطيات: $\angle ABC$ و$\angle CBD$ زاويتان متتامّتان، $\angle DBE$ و$\angle CBD$ تكوّنان زاوية قائمة.

المطلوب: إثبات أن $\angle ABC \cong \angle DBE$

البرهان:

العبارات	المبرّرات
1) $\angle ABC$ و $\angle CBD$ متتامّتان.	1) معطيات
$\angle DBE$ و $\angle CBD$ تكوّنان زاوية قائمة.	
2) $\angle DBE$ و $\angle CBD$ متتامّتان.	2) نظرية الزاويتين المتتامتين.
3) $\angle ABC \cong \angle DBE$	3) الزاويتان المتمّمتان للزاوية نفسها أو لزاويتين متطابقتين تكونان متطابقتين.

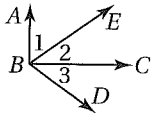
www.almanahj.com

تمارين

أكمل البرهانين الآتيين:

1) **المعطيات:** $\overline{AB} \perp \overline{BC}$

$\angle 1$ و$\angle 3$ متتامّتان



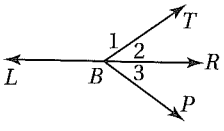
المطلوب: إثبات أن $\angle 3 \cong \angle 2$

البرهان:

العبارات	المبرّرات
a) $\overline{AB} \perp \overline{BC}$	a) _____
b) _____	b) تعريف التعامد
c) $m\angle ABC = 90°$	c) تعريف الزاوية القائمة.
d) $m\angle ABC = m\angle 1 + m\angle 2$	d) _____
e) $90° = m\angle 1 + m\angle 2$	e) بالتعويض
f) $\angle 1$ و$\angle 2$ متتامّتان	f) _____
g) _____	g) معطيات
h) $\angle 3 \cong \angle 2$	h) _____

2) **المعطيات:** الزاويتان $\angle 1$ و$\angle 2$ متجاورتان على مستقيم.

$m\angle 1 + m\angle 3 = 180°$



المطلوب: إثبات أن $\angle 3 \cong \angle 2$

البرهان:

العبارات	المبرّرات
a) $\angle 2$, $\angle 1$ زاويتان متجاورتان على مستقيم.	a) معطيات
$m\angle 1 + m\angle 3 = 180°$	
b) _____	b) نظرية الزاويتين المتكاملتين.
c) $\angle 1$ مكمّلة لـ $\angle 3$	c) _____
d) _____	d) الزاويتان المكمّلتان للزاوية نفسها أو لزاويتين متطابقتين تكونان متطابقتين.

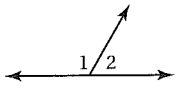
الاسم _____ التاريخ _____

1-8

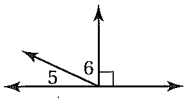
إثبات علاقات بين الزوايا

أوجد قياس كلٍّ من الزوايا المرقّمة مع ذكر النظرية التي تبرِّر استنتاجك:

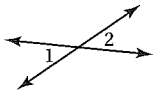
1) $m\angle 2 = 57°$



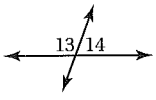
2) $m\angle 5 = 22°$



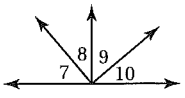
3) $m\angle 1 = 38°$



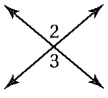
4) $m\angle 13 = (4x + 11)°$
$m\angle 14 = (3x + 1)°$



5) $\angle 9$ و $\angle 10$ متتامتان،
$\angle 7 \cong \angle 9, m\angle 8 = 41°$



6) $m\angle 2 = (4x - 26)°$
$m\angle 3 = (3x + 4)°$



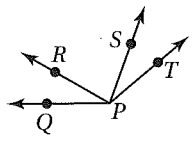
www.almanahj.com

7) أكمل البرهان الآتي:

المعطيات: $\angle QPS \cong \angle TPR$

المطلوب: إثبات أن $\angle QPR \cong \angle TPS$

البرهان:



العبارات	المبرّرات
a) _____	a) _____
b) $m\angle QPS = m\angle TPR$	b) _____
c) $m\angle QPS = m\angle QPR + m\angle RPS$ $m\angle TPR = m\angle TPS + m\angle RPS$	c) _____
d) _____	d) خاصية التعويض
e) _____	e) _____
f) _____	f) _____

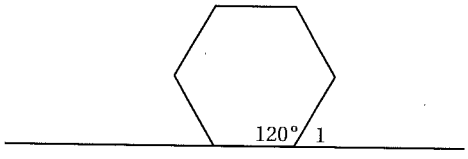
1-8

إثبات علاقات بين الزوايا

1) مجسّمات: أرادت مجموعة من الطلاب تصميم مجسّم كبير، له عشرون وجهًا كلها عبارة عن مثلثات متطابقة. وعُهِد إلى الطالب جابر مسؤولية ضبط جودة عَمل الطلاب. ويتعين عليه أن يتأكد من أن لجميع المثلثات قياسات الزوايا نفسها. فقام جابر بقص نموذج مثلث وقارن زواياه بزوايا كلِّ مثلث من المثلثات التي يصممها الطلاب. فكيف تضمن الطريقةُ التي استعملها أن جميع المثلثات لها قياسات الزوايا نفسها؟

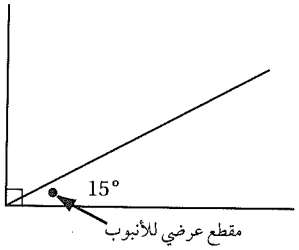
2) مناظر طبيعية: إذا نظرت إلى الأمام فسوف ترى شلالًا، وإذا أدرت رأسك إلى اليسار $25°$ فسوف ترى قمة جبل. وإذا أدرت رأسك $35°$ أخرى إلى اليسار فسوف ترى شلالًا آخر. فإذا كنت تنظر إلى الأمام فكم درجة سوف تدير رأسك إلى اليسار كي ترى الشلال الثاني؟

3) أنابيب: وُضع على الأرض أُنبوب مقطَعُه العرضي في صورة مضلَّع سُداسي كالموضح أدناه.



ما قياس $\angle 1$ في الشكل المُعطى، إذا علمت أن قياس كل واحدة من زوايا السداسي يساوي $120°$؟

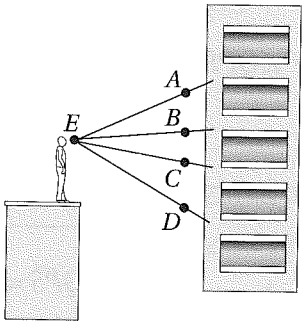
4) طلاء: يقوم الطلاب بطلاء سقف غرفة فصلهم، وأرادوا أن يرسموا مستقيمًا في السقف، بحيث يتقاطع مع أحد الأركان كما في الشكل أدناه، ويصنع زاويةً قياسها $15°$ مع إحدى حوافِّ السقف.



إلا أنهم لم يتمكنوا من قياس تلك الزاوية لوجود أنبوب للماء بين المستقيم وحافة السقف؛ ولذا قرر الطلاب أن يقيسوا الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الحافة الأُخرى للسقف. إذا علمت أن الزاوية بين حافتي السقف قائمة، فما قياس الزاوية الأخرى؟

www.almanahj.com

5) بنايات: ينظرعبد الله إلى بناية من النقطة E.وكان قياس $\angle AEC$مساويًا لقياس$\angle BED$.



a) ما الزاوية التي يُضاف قياسها إلى قياس$\angle AEB$ ؛ لتكون النتيجة قياس $\angle AEC$؟

b) ما الزاوية التي يُضاف قياسها إلى قياس$\angle CED$ ؛ لتكون النتيجة قياس$\angle BED$؟

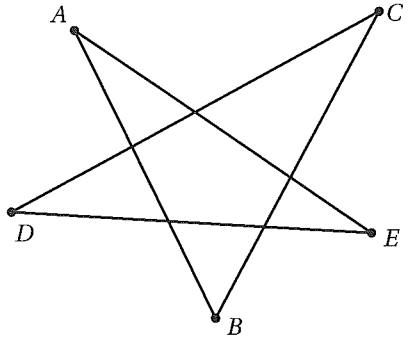
c) هل صحيح أن $m\angle AEB$ يساوي $m\angle CED$؟

الاسم _____ التاريخ _____

1-8 التدريبات الإثرائية

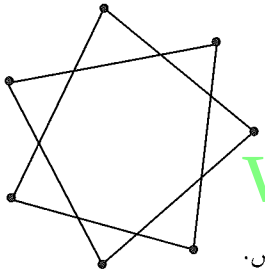
نجوم

هناك أنواع عديدة من النجوم، بعضها له 5 رؤوس أو 6 رؤوس أو 7 رؤوس أو أكثر، ويعتمد مجموع قياسات زوايا النجوم على عدد رؤوسها.



1) أوجد مجموع قياسات زوايا رؤوس النجمة الخماسية.

2) أوجد مجموع قياسات زوايا رؤوس النجمة السُّباعية.



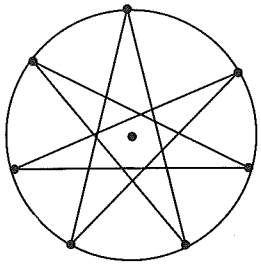
www.almanahj.com

3) أكمل الجدول الذي يُعطي مجموع قياسات زوايا رؤوس النجمة ذات العدد المُعطى من الرؤوس.

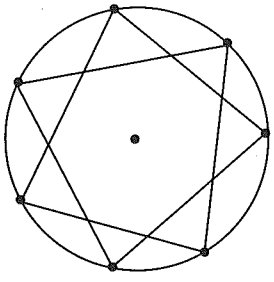
عدد الرؤوس	5	7	9
مجموع قياسات الزوايا			

4) كوّن تخمينًا لصيغة حساب مجموع قياسات زوايا رؤوس النجمة ذات n من الرؤوس. وأوجد هذه الصيغة مستعملًا مجموع قياسات زوايا رؤوس نجمة ذات 12 رأسًا.

5) استعن بالشكلين المُجاورين، لتحديد ما إذا كان القانون صحيحًا دائمًا. فسّر إجابتك.



الشكل 1



الشكل 2