كل ما يحتاجه الطالب في جميع الصفوف من أوراق عمل واختبارات ومذكرات، يجده هنا في الروابط التالية لأفضل مواقع تعليمي إماراتي 100 %

تطبيق المناهج الإماراتية	الاجتماعيات	الرياضيات
الصفحة الرسمية على التلغرام	الاسلامية	العلوم
الصفحة الرسمية على الفيسبوك	الانجليزية	
التربية الاخلاقية لجميع الصفوف	اللغة العربية	
التربية الرياضية		

مجموعات التلغرام.	مجموعات الفيسبوك	قنوات تلغرام	قنوات الفيسبوك
الصف الأول	الصف الأول	الصف الأول	الصف الأول
الصف الثاني	الصف الثاني	الصف الثاني	الصف الثاني
الصف الثالث	الصف الثالث	الصف الثالث	الصف الثالث
الصف الرابع	الصف الرابع	الصف الرابع	الصف الرابع
الصف الخامس	الصف الخامس	الصف الخامس	الصف الخامس
الصف السادس	الصف السادس	الصف السادس	الصف السادس
الصف السابع	الصف السابع	الصف السابع	الصف السابع
الصف الثامن	الصف الثامن	الصف الثامن	الصف الثامن
الصف التاسع عام	الصف التاسع عام	الصف التاسع عام	الصف التاسع عام
الصف التاسع متقدم	الصف التاسع متقدم	الصف التاسع متقدم	تاسع متقدم
الصف العاشر عام	الصف العاشر عام	الصف العاشر عام	عاشر عام
الصف العاشر متقدم	الصف العاشر متقدم	الصف العاشر متقدم	عاشر متقدم
الحادي عشر عام	الحادي عشر عام	الحادي عشر عام	حادي عشر عام
الحادي عشر متقدم	الحادي عشر متقدم	الحادي عشر متقدم	حادي عشر متقدم
ثاني عشر عام	الثاني عشر عام	الثاني عشر عام	الثاني عشر عام
ثاني عشر متقدم	الثاني عشر متقدم	ثاني عشر متقدم	ثاني عشر متقدم

الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربية والتعليم

عام التسامح

2018 - 2019

نسخة المعلم

10

McGraw-Hill Education

الرياضيات

المسار العام

نسخة الإمارات العربية المتحدة

دليل الطالب التفاعلي

Mc Graw Hill Education

مفتاح الإجابات

McGraw-Hill Education

الرياضيات

المسار العام

نسخة الإمارات العربية المتحدة

دليل الطالب التفاعلي

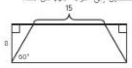
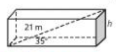
2018 - 2019

10

8 الهدف الأساسي من الوحدة

8 المثلثات قائمة الزاوية وحساب المثلثات

الهدف الأساسي من الوحدة تعرف على ما ستكتشفه في هذه الوحدة. أجب عن الأسئلة التمهيدية. أثناء استكمالك لكل درس، راجع هذه الصفحات للتحقق من عملك.

الدروس المستفادة	السؤال التمهيدي
الدرس 8.2: نظرية فيثاغورس وعكسها	
أثبت نظريات حول المثلثات. استخدم النسب المثلثية ونظرية فيثاغورس لإيجاد قيم المثلثات قائمة الزاوية في المسائل التطبيقية.	الأعداد a و b و c تشكل ثلاثية فيثاغورس، حيث c هو طول الوتر. ويزعم عمار أن $3a$ و $3b$ و $3c$ أيضًا تشكل ثلاثية فيثاغورس. فهل توافق؟ برّر إجابتك. **حيث إن النقاط a و b و c تشكل ثلاثية فيثاغورس، فإن $a^2 + b^2 = c^2$. بحسب خاصية الضرب في المعادلة، فإن $9a^2 + 9b^2 = 9c^2$ والتي يمكن كتابتها في الصورة $(3a)^2 + (3b)^2 = (3c)^2$. إذًا بحسب التعريف فإن $3a$ و $3b$ و $3c$ تشكل ثلاثية فيثاغورس.**
الدرس 8.3: المثلثات القائمة الخاصة	
استوعب أنه من خلال التشابه، تكون نسب أضلاع المثلثات قائمة الزاوية خواص للزوايا في المثلث، مما يؤدي إلى تعريفات للنسب المثلثية المتعلقة بالزوايا الحادة.	يتألف المستطيل أدناه من شبه منحرف متساوي الساقين ومثلثين تبلغ قياسات زوايا كل منهما $90°-60°-30°$. فما محيط المستطيل إلى أقرب جزء من مئة؟  **64.48 وحدة**
الدرس 8.4: حساب المثلثات	
اشرح واستخدم العلاقة بين Sine و Cosine للزوايا المتتامة. استخدم النسب المثلثية ونظرية فيثاغورس لإيجاد قيم المثلثات قائمة الزاوية في المسائل التطبيقية. استخدم الأشكال الهندسية وقياساتها وخواصها لوصف الأشياء (على سبيل المثال، تمثيل جذع شجرة أو جذع إنسان باعتباره شكلاً أسطوانيًا). استوعب أنه من خلال التشابه، تكون نسب أضلاع المثلثات قائمة الزاوية خواص للزوايا في المثلث، مما يؤدي إلى تعريفات للنسب المثلثية المتعلقة بالزوايا الحادة.	أوجد ارتفاع المنشور المستطيل مع التقريب إلى أقرب جزء من مئة. برّر إجابتك.  **12.05 m; $\sin 35 = \frac{h}{21}$; $21 \sin 35 = h$; $h \approx 12.05$**

استخدام دليل الطالب التفاعلي

يمكن استخدام دليل الطالب التفاعلي (ISG) مع كتاب الرياضيات للصف العاشر المسار العام.

درس دليل الطالب التفاعلي	الرياضيات للصف 10 المسار العام
8.1	الدرس 2–8
8.2	الدرس 2–8
8.3	الدرس 4–8
8.4	الدرس 5–8

نصيحة للتدريس م.م.ر 3

يوفر السؤال التمهيدي للدرس 8.1 فرصة التمرن على الممارسة **م.م.ر 3 (بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين)**. يُطلب من الطلاب أن يحددوا ما إذا كان ضرب ثلاثية فيثاغورس تنتج عنه ثلاثية فيثاغورس أيضًا. يحتاج الطلاب لاستخدام كل من نظرية فيثاغورس ومعكوسها لتبرير استنتاجهم.

الدروس المستفادة	السؤال التمهيدي
الدرس 8.5: زوايا الارتفاع والانخفاض	
استخدم النسب المثلثية ونظرية فيثاغورس لإيجاد قيم المثلثات قائمة الزاوية في المسائل التطبيقية.	رُصد قارب من أعلى منارة طولها 46 m. وتبلغ زاوية الانخفاض من أعلى المنارة إلى القارب 48°. اكتب معادلة وأوجد حلها لإيجاد المسافة من القارب إلى المنارة. قرّب إلى أقرب متر. $\tan 42 = \frac{d}{46}$ ؛ 41 m تبلغ زاوية الارتفاع من نقطة في قاعدة جبل إلى قمته 23°. وإذا كانت مسافة الخط المستقيم من النقطة إلى القمة هو 6437.4 m. فاكتب معادلة وأوجد حلها لإيجاد عدد الأمتار التي ترتفع بها القمة عن النقطة الموجودة في القاعدة. قرّب إلى أقرب متر. $\sin 32 = \frac{h}{21{,}120}$ ؛ 3411.3 m

نصيحة للتدريس

م.م.ر 1

يوضح السؤال التمهيدي للدرس 8.3 الممارسة م.م.ر 1 **(فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها)**. يحتاج الطلاب أولاً إلى فهم كيف يرتبط قطر الموشور بارتفاعه. اقترح أن يرسم الطلاب أولاً المثلث الأيمن الذي شكله قطر الموشور وقطر القاعدة والارتفاع. حال الانتهاء من ذلك، يجب أن يفهم الطلاب احتياجهم لاستخدام حساب المثلثات لإيجاد الارتفاع.

نصيحة للتدريس

م.م.ر 4

قد يؤدي السؤال التمهيدي الأول للدرس 8.4 إلى نقاش بشأن الممارسة م.م.ر 4 **(استخدام نماذج الرياضيات)**. ابدأ باقتراح تصميم الطلاب لرسم تخطيطي لتمثيل الموقف. ذكرهم بأن يتحققوا من صحة إجاباتهم. ولأن زاوية الانخفاض تبلغ 48°، فالمثلث أقرب لأن يكون متساوي الساقين وبذلك تصبح المسافة بين القارب والمنارة قد تكون قريبة من ارتفاع المنارة.

8.2 نظرية فيثاغورس وعكسها

المعايير

معايير الممارسات الرياضية: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

المتطلبات الأساسية

- حل المسائل باستخدام المثلثات المتشابهة
- كتابة التناسبات وحلها
- تحويل المربعات والجذور التربيعية لأبسط صورها
- تربيع ذي الحدين

مثال 1

نصيحة للتدريس م. م. ر 7

من أهم مبادئ هذا الاستكشاف هو التعرف على المثلثات المتشابهة وتحديد رؤوسها المتقابلة. قد يكون من المفيد للطلاب ملاحظة ذلك في **الأجزاء من b إلى d**. فكل المثلثات مسماة بطريقة متوافقة.

الأسئلة الداعمة

- كيف يمكن تحديد وتر المثلث القائم؟
  يكون هو الضلع الأطول؛ ومقابل للزاوية القائمة.
- ما عبارات التشابه التي يمكن كتابتها للشكل في **الجزء f**؟
  $\triangle KML \sim \triangle JMK \sim \triangle JKL$

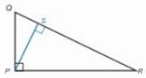
8.2 نظرية فيثاغورس وعكسها

الأهداف

- إثبات نظرية فيثاغورس باستخدام تشابه المثلثات.
- استخدام نظرية فيثاغورس لإيجاد قيم المثلثات قائمة الزاوية في المسائل التطبيقية.

مثال 1 استكشاف التشابه في المثلثات قائمة الزاوية

الاستكشاف استخدم المثلث قائم الزاوية، $\triangle PQR$، لهذا الاستكشاف.



a. **استخدام البنية** ارسم ارتفاعًا من النقطة P إلى وتر المثلث. سمِّ نقطة التقاطع S.

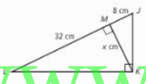
b. **بناء الفرضيات** هل $\triangle PSR$ متشابه مع $\triangle QPR$؟ وإذا كان كذلك، فاين فرضية لشرح السبب. وإذا لم يكن كذلك، فاشرح السبب.
نعم؛ $\angle R \cong \angle R$ بحسب خاصية الانعكاس في التطابق و $\angle QPR \cong \angle PSR$ حيث إن جميع الزوايا القائمة متطابقة. إذًا $\triangle QPR \sim \triangle PSR$ حسب مسلمة التشابه AA.

c. **بناء الفرضيات** هل $\triangle QSP$ متشابه مع $\triangle QPR$؟ وإذا كان كذلك، فاين فرضية لشرح السبب. وإذا لم يكن كذلك، فاشرح السبب.
نعم؛ $\angle Q \cong \angle Q$ بحسب خاصية الانعكاس في التطابق و $\angle QPR \cong \angle QSP$ حيث إن جميع الزوايا القائمة متطابقة. إذًا $\triangle QSP \sim \triangle QPR$ حسب مسلمة التشابه AA.

d. **بناء الفرضيات** هل $\triangle QSP$ متشابه مع $\triangle PSR$؟ وإذا كان كذلك، فاين فرضية لشرح السبب. وإذا لم يكن كذلك، فاشرح السبب.
نعم؛ من الجزأين b و c، فإن $\triangle QSP \sim \triangle QPR$ و $\triangle QPR \sim \triangle PSR$.
إذًا، حسب خاصية التعدي في التشابه، فإن $\triangle QSP \sim \triangle PSR$.

e. **التخمين** استخدم ملاحظاتك لوضع تخمين عن المثلثات التي تتكون عندما ترسم ارتفاعًا إلى وتر مثلث قائم الزاوية.
عندما ترسم ارتفاعًا يمتد إلى وتر مثلث قائم الزاوية، فسيكون المثلثان قائما الزاوية المتشكلان مشابهين للمثلث الأصلي ولبعضهما البعض.

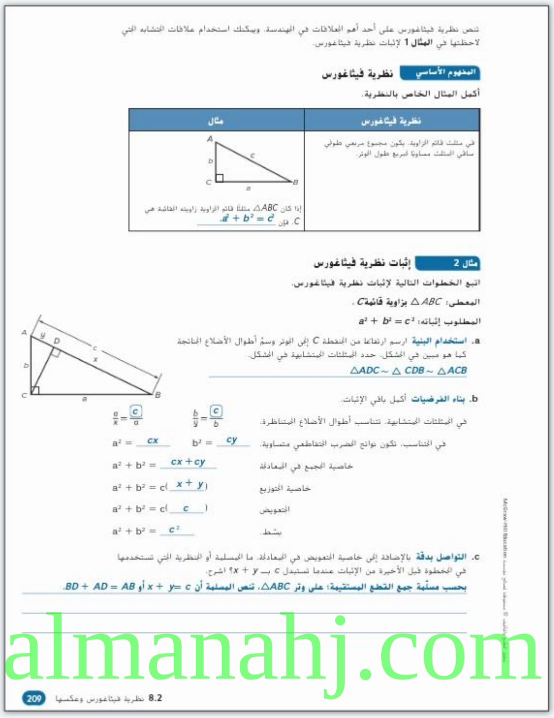
f. **التفكير بطريقة تجريدية** اشرح كيفية استخدام تخمينك لإيجاد قيمة x.
$\triangle KML \sim \triangle JMK$، إذًا $\frac{JM}{MK} = \frac{KM}{ML}$ حيث إن $\frac{8}{x} = \frac{x}{32}$ و $x^2 = 256$، فإن $x = 16$.



معلومات أساسية رياضية

ثمة العديد من إثباتات نظرية فيثاغورس. تتطلب طريقة G.SRT.4 القياسية أن يثبت الطلاب النظرية باستخدام التشابه. فإنها الطريقة المتناولة في هذا الدرس. لاحظ أن نتائج التشابه في المثلثات القائمة من **المثال 1** تُستخدم للخطوة الأولى في إثبات نظرية فيثاغورس. بهذه الطريقة، فإن النظرية التي اكتشفها الطلاب في **المثال 1** تعتبر "نظرية مساعدة" أو فرعية. على الرغم من أنها نظرية مهمة في حد ذاتها. فالغرض الأساسي منها أن تكون خطوة انطلاقة في إثبات نتائج أخرى.

لاحظ أيضًا أن ثمة إثباتات متعددة لنظرية فيثاغورس تستخدم التشابه. يكمل الطلاب إحداها في **المثال 2** ثم يكتبون نظرية مختلفة تعتمد على الإثبات في **التمرين 1**.



تنص نظرية فيثاغورس على أحد أهم العلاقات في الهندسة. ويمكنك استخدام علاقات التشابه التي لاحظتها في **المثال 1** لإثبات نظرية فيثاغورس.

المفهوم الأساسي **نظرية فيثاغورس**

أكمل المثال الخاص بالنظرية.

نظرية فيثاغورس	مثال
في مثلث قائم الزاوية، يكون مجموع مربعي طولي ساقي المثلث مساويًا لمربع طول الوتر.	إذا كان $\triangle ABC$ مثلثًا قائم الزاوية زاويته القائمة هي C، فإن $a^2 + b^2 = c^2$.

مثال 2 **إثبات نظرية فيثاغورس**

اتبع الخطوات التالية لإثبات نظرية فيثاغورس.

المعطى: $\triangle ABC$ **بزاوية قائمة** C.

المطلوب إثباته: $a^2 + b^2 = c^2$

a. استخدام البنية ارسم ارتفاعًا من النقطة C إلى الوتر وسمّ أطوال الأضلاع الناتجة كما هو مبين في الشكل. حدد المثلثات المتشابهة في الشكل.

$\triangle ADC \sim \triangle CDB \sim \triangle ACB$

b. بناء الفرضيات أكمل باقي الإثبات.

في المثلثات المتشابهة، تتناسب أطوال الأضلاع المتناظرة.	$\frac{b}{y} = \frac{\boxed{c}}{b}$	$\frac{a}{x} = \frac{\boxed{c}}{a}$
في التناسب، تكون نواتج الضرب التقاطعي متساوية.	$b^2 = cy$	$a^2 = cx$
خاصية الجمع في المعادلة		$a^2 + b^2 = cx + cy$
خاصية التوزيع		$a^2 + b^2 = c(x + y)$
التعويض		$a^2 + b^2 = c(c)$
بسّط.		$a^2 + b^2 = c^2$

c. التواصل بدقة بالإضافة إلى خاصية التعويض في المعادلة، ما المسلمة أو النظرية التي تستخدمها في الخطوة قبل الأخيرة من الإثبات عندما تستبدل c بـ $x + y$؟ اشرح.

بحسب مسلّمة جمع القطع المستقيمة: على وتر $\triangle ABC$، تنص المسلمة أن $x + y = c$ أو $BD + AD = AB$.

8.2 نظرية فيثاغورس وعكسها 209

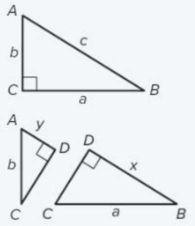
التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

ثمة جزء من الممارسة **م.م.ر 6 (مراعاة الدقة)** يذكر معنى الرموز المستخدمة التي تسم المخططات وسمًا دقيقًا. يرتبط الإثبات في **المثال 2** بشدة مع هذا الجزء القياسي لأن الإثبات يستخدم ميثاقًا رياضيًا مهمًا. في المثلث $\triangle ABC$، يتم وسم الرؤوس بأحرف كبيرة ويتم وسم طول الضلع المقابل لكل رأس بنظيره من الأحرف الصغيرة. على سبيل المثال، الضلع المقابل للرأس C له الطول c. يمكن في بضع دقائق مناقشة فوائد هذا الميثاق مع الطلاب والطلب من الطلاب استخدام هذا الميثاق لرسم بعض المثلثات ووسمها بأنفسهم.

مثال 2

نصيحة للتدريس م. م. ر 7

إن كان الطلاب يواجهون صعوبات في تحديد المثلثات المتشابهة في **الجزء a** أو يصعب عليهم تحديد الأجزاء المقابلة، يمكنك اقتراح رسم الطلاب المثلثات الثلاثة ووسْمِهم على نحو منفصل، كما هو موضح أدناه.



الأسئلة الداعمة

- في **الجزء b**، ما أطوال أضلاع المثلث $\triangle CDB$ المقارنة في النسبة $\frac{a}{x}$؟ **طول الوتر إلى طول الساق الأطول**
- ما المقارنة المتوافقة في المثلث $\triangle ACB$؟ $\frac{c}{a}$
- ما أطوال أضلاع المثلث $\triangle ADC$ المقارنة في النسبة $\frac{b}{y}$؟ **طول الوتر إلى طول الساق الأقصر**

مثال 3

نصيحة للتدريس

م. م. ر 4

يختص جزء من **م.م.ر 4** بتحليل العلاقات. شجع الطلاب على التحقق من إجاباتهم من خلال التأكد من أن الارتفاع المحسوب للجذع وطول الجزء المخلوع من الشجرة ومسافة الـ 16 m جميعها تُحقق نظرية فيثاغورس.

الأسئلة الداعمة

- ما ناتج JL + JK؟ ولماذا؟ **20 m؛ هذه الأطوال معًا تمثل الارتفاع الكلي للشجرة.**
- أي جزء من الشكل هو الوتر؟ $\overline{JL}$
- هل تتوقع أن يكون JL أكبر من أو أصغر من 16 m؟ ولماذا؟ **أكبر من؛ لأن الوتر هو أطول ضلع للمثلث القائم.**

مثال 4

نصيحة للتدريس

م. م. ر 4

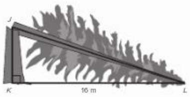
يجب أن يعرف الطلاب أنه من أجل أن تكون الحديقة في شكل مستطيل، يجب أن يشكل القطر مثلثًا قائمًا بضلعين متجاورين له.

الأسئلة الداعمة

- هل تعتبر 30 و 40 و 50 ثلاثية فيثاغورس؟ **نعم، $30^2 + 40^2 = 50^2$.**
- إن كان القطر أي شيء غير 50 m، فهل يمكن أن تكون الحديقة مستطيلة؟ **لا. إن لم يكن القطر 50 m، إذًا p و q و t لن تُشكّل ثلاثية فيثاغورس ولن يكون المثلث قائمًا.**

مثال 3 **استخدام نظرية فيثاغورس**

يبلغ ارتفاع شجرة خشب أحمر في حديقة وطنية 20 m. وبعد تعرضها للبرق، انكسرت الشجرة وسقطت كما هو مبين بالشكل. وتقع قمة الشجرة عند نقطة تبعد مسافة 16 m عن خط منتصف جذع الشجرة. ويريد أحد حراس الحديقة معرفة الجذع المتبقي من الشجرة.



a. **استخدام نموذج** يفترض الحارس أن x يمثل ارتفاع الجذل $\overline{JK}$. اشرح كيف يمكن للحارس كتابة تعبير يمثل طول $\overline{JL}$ ثم كتابة معادلة يمكن استخدامها لحل المسألة.
حيث إن طول الشجرة يساوي 20 m، فإن $JL = 20 - x$. وبحسب نظرية فيثاغورس، $16^2 + x^2 = (20 - x)^2$.

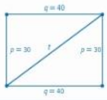
b. **الحساب بدقة** وضّح كيفية حل المعادلة من **الجزء a** لإيجاد ارتفاع الجذل.
$16^2 + x^2 = (20 - x)^2$. إذًا $256 + x^2 = 400 - 40x + x^2$. بطرح x^2 من كلا الطرفين ينتج $256 = 400 - 40x$. إذًا، $-40x = -144$. بقسمة كل من الطرفين على -40 ينتج $x = 3.6$. يساوي طول جذع الشجرة 3.6 m.

المفهوم الأساسي

نظرية فيثاغورس هي مجموعة من ثلاثة أعداد صحيحة تشكل أضلاع مثلث قائم الزاوية. وإذا كانت a و b و c تمثل ثلاثية فيثاغورس وأكبر الثلاثة هو c، فإن $a^2 + b^2 = c^2$.

مثال 4 **استخدام ثلاثية فيثاغورس**

يضع منصور وسعيد حدودًا لحديقة، حيث يبلغ قياس زوج من أضلاعها 30 m، في حين يبلغ الزوج الآخر من الأضلاع 40m. فمن خلال استخدام شريط قياس طوله 60m فقط، كيف يمكنهما التأكد من أن حديقتهما مستطيلة الشكل؟



a. **استخدام نموذج** ارسم نموذجًا للحديقة بالقطر t. افترض أن $p = 30$ و $q = 40$.

b. **استخدام البنية** إذا كانت الحديقة مستطيلة الشكل، فما الذي يجب أن ينطبق بالنسبة لكل من p و q و t؟ ولماذا؟
إذا كانت الحديقة مستطيلة الشكل، فإن الضلعين p و q يشكلان زاوية قائمة نظرًا لأن المستطيل يحتوي على 4 زوايا قائمة. يعتبر القطر t هو وتر المثلث القائم ذي الساقين p و q.

c. **التواصل بدقة** قاس منصور القطر ووجد أن طوله يبلغ 50 m. فهل هناك معلومات كافية لتحديد ما إذا كان حديقتهما مستطيلة الشكل أم لا؟ اشرح.
نعم، الحديقة مستطيلة. الإجابة النموذجية: الشكل الرباعي عبارة عن متوازي أضلاع حيث إن أحد زوجي أضلاعه المتقابلة متطابقين. حيث إن القطر والضلعين يشكلان ثلاثية فيثاغورس ($40^2 + 30^2 = 50^2$)، إذًا يشكل القطر مثلثين قائمي الزاوية. حيث إن الزوايا المتجاورة متكاملة، فإن زوج الزوايا المتقابلة الأخرى قائمة. الحديقة مستطيلة بحسب التعريف.

ربط التمرينات بالمعايير

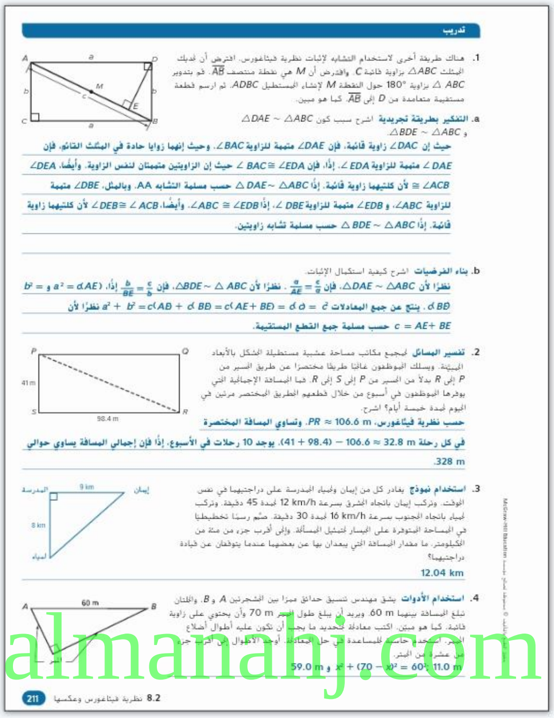
في **التمرين 1**، يجب أن يستخدم الطلاب التشابه لإثبات نظرية فيثاغورس، محققين متطلبات **G.SRT.4**.

لتناول **G.SRT.8** في **التمرينين 2** و **3**، يجب أن يستخدم الطلاب نظرية فيثاغورس لحل مسائل الحياة الواقعية التي تتضمن المسافات.

يقوم الطلاب بحل الضلعين المتبقيين عندما يكون وتر المثلث القائم معروفًا في **التمرين 4**. أثناء عمل ذلك، يتدربون على **G.SRT.8** باستخدام نظرية فيثاغورس والاستنتاج الجبري في المسألة المطروحة.

عرض المعايير

تمرين	م.م.ر
1	2, 3
2	1
3	4
4	5



تدريب

1. هناك طريقة أخرى لاستخدام التشابه لإثبات نظرية فيثاغورس. افترض أن لديك المثلث $\triangle ABC$ بزاوية قائمة C، وافترض أن M هي نقطة منتصف $\overline{AB}$. قم بتدوير $\triangle ABC$ بزاوية $180°$ حول النقطة M لإنشاء المستطيل $ADBC$. ثم ارسم قطعة مستقيمة متعامدة من D إلى $\overline{AB}$، كما هو مبين.

a. **التفكير بطريقة تجريدية** اشرح سبب كون $\triangle ABC \sim \triangle DAE$ و $\triangle ABC \sim \triangle BDE$.

حيث إن $\angle DAC$ زاوية قائمة، فإن $\angle DAE$ متممة للزاوية $\angle BAC$، وحيث إنهما زوايا حادة في المثلث القائم، فإن $\angle DAE$ متممة للزاوية $\angle EDA$. إذًا، فإن $\angle EDA \cong \angle BAC$ حيث إن الزاويتين متممتان لنفس الزاوية. وأيضًا، $\angle DEA \cong \angle ACB$ لأن كلتيهما زاوية قائمة. إذًا $\triangle ABC \sim \triangle DAE$ حسب مسلمة التشابه AA. وبالمثل، $\angle DBE$ متممة للزاوية $\angle ABC$، و $\angle EDB$ متممة للزاوية $\angle DBE$، إذًا $\angle EDB \cong \angle ABC$، وأيضًا، $\angle DEB \cong \angle ACB$ لأن كلتيهما زاوية قائمة. إذًا $\triangle ABC \sim \triangle BDE$ حسب مسلمة تشابه زاويتين.

b. **بناء الفرضيات** اشرح كيفية استكمال الإثبات.

نظرًا لأن $\triangle ABC \sim \triangle DAE$، فإن $\frac{c}{a} = \frac{a}{AE}$. نظرًا لأن $\triangle ABC \sim \triangle BDE$، فإن $\frac{c}{b} = \frac{b}{BE}$. إذًا، $a^2 = c(AE)$ و $b^2 = c(BE)$. ينتج عن جمع المعادلات $a^2 + b^2 = c(AE) + c(BE) = c(AE + BE) = c(c) = c^2$ نظرًا لأن $c = AE + BE$ حسب مسلمة جمع القطع المستقيمة.

2. **تفسير المسائل** لمجمع مكاتب مساحة عشبية مستطيلة الشكل بالأبعاد المبيّنة. ويسلك الموظفون غالبًا طريقًا مختصرًا عن طريق السير من P إلى R بدلاً من السير من P إلى S إلى R. فما المسافة الإجمالية التي يوفرها الموظفون في أسبوع من خلال قطعهم الطريق المختصر مرتين في اليوم لمدة خمسة أيام؟ اشرح.

حسب نظرية فيثاغورس، $PR \approx 106.6$ m. وتساوي المسافة المختصرة في كل رحلة $(41 + 98.4) - 106.6 \approx 32.8$ m. يوجد 10 رحلات في الأسبوع. إذًا فإن إجمالي المسافة يساوي حوالي 328 m.

3. **استخدام نموذج** يغادر كل من إيمان ولمياء المدرسة على دراجتيهما في نفس الوقت. وتركب إيمان باتجاه الشرق بسرعة 12 km/h لمدة 45 دقيقة. وتركب لمياء باتجاه الجنوب بسرعة 16 km/h لمدة 30 دقيقة. صمّم رسمًا تخطيطيًا في المساحة المتوفرة على اليسار لتمثيل المسألة. وإلى أقرب جزء من مئة من الكيلومتر، ما مقدار المسافة التي يبعدان بها عن بعضهما عندما يتوقفان عن قيادة دراجتيهما؟

12.04 km

4. **استخدام الأدوات** يشق مهندس تنسيق حدائق ممرًا بين الشجرتين A و B، واللتان تبلغ المسافة بينهما 60 m. ويريد أن يبلغ طول الممر 70 m وأن يحتوي على زاوية قائمة، كما هو مبيّن. اكتب معادلة لتحديد ما يجب أن تكون عليه أطوال أضلاع الممر. استخدم حاسبة للمساعدة في حل المعادلة. أوجد الأطوال إلى أقرب جزء من عشرة من المتر.

$x^2 + (70 - x)^2 = 60^2$؛ 11.0 m و 59.0 m

8.2 نظرية فيثاغورس وعكسها 211

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

الممارسة م.م.ر 1 (فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها) تصف كيف يقوم الطلاب البارعين في الرياضيات "بالبدء في التوضيح لأنفسهم معنى المسألة." **التمرين 2** بمثابة فرصة جيدة للطلاب للتدرب على هذه المهارة. فالطلاب الذين يشرعون بحل المسألة بدون قراءتها بدقة قد يخطئون، حيث قد يحسبون المسافة المختصرة في الرحلة الواحدة أو المسافة المختصرة في يوم واحد (رحلتين)، بدلاً من المسافة المختصرة في أسبوع بأكمله. ومن أجل التأكد من قراءة الطلاب للمسألة بدقة، شجعهم على إعادة ذكر المسألة بطريقتهم الخاصة.

8.3 المثلثات القائمة الخاصة

المعايير

المعايير الخاصة بالممارسات في الرياضيات: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8

المتطلبات الأساسية

- استخدام نظرية فيثاغورس
- تحويل المربعات والجذور التربيعية لأبسط صورها، بما في ذلك إنطاق المقام

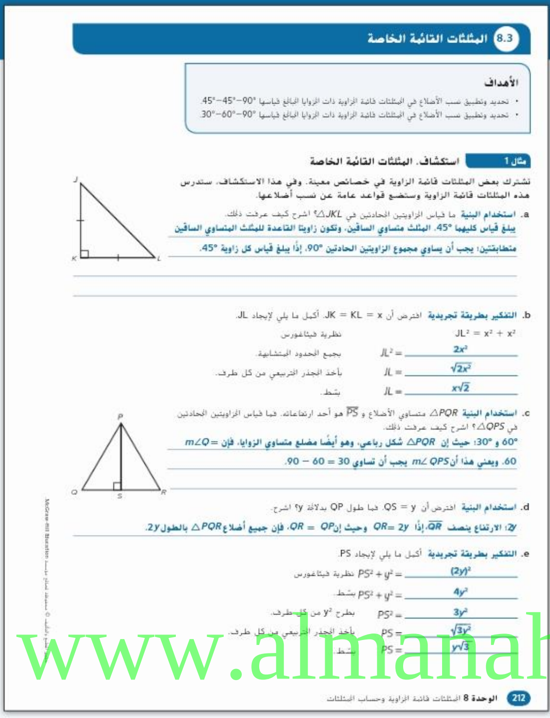
مثال 1

نصيحة للتدريس م. م. ر 2

في **الجزء b**، يفكر الطلاب بطريقة منطقية لكتابة تعبير JL بدلالة x. وفي الخطوة الأخيرة، يبسط الطلاب $\sqrt{2x^2}$. ذكّر الطلاب بأن هذا يساوي $\sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2}$ أو $\sqrt{2} \cdot x$. أشر إلى أن $\sqrt{x^2}$ تُبسط بشكل طبيعي إلى $|x|$.
ولكن في هذه الحالة، x تمثل الطول. إذًا فهي موجبة. وبالتالي، لا نحتاج إلى القيمة المطلقة.

الأسئلة الداعمة

- ما مقاييس الزوايا في $\triangle QPS$؟
30 و 60 و 90
- إذا كان $QS = y$، فكيف يمكن تذكر أي من الأضلاع الأخرى له طول $2y$ وأي له طول $y\sqrt{3}$؟ **يجب أن يكون الوتر أطول من الساق و $\sqrt{3} < 2$. إذًا فطول الوتر هو $2y$ وطول الساق الأخرى $y\sqrt{3}$.**



8.3 المثلثات القائمة الخاصة

الأهداف

- تحديد وتطبيق نسب الأضلاع في المثلثات قائمة الزاوية ذات الزوايا البالغ قياسها $45°-45°-90°$.
- تحديد وتطبيق نسب الأضلاع في المثلثات قائمة الزاوية ذات الزوايا البالغ قياسها $30°-60°-90°$.

مثال 1 استكشاف. المثلثات القائمة الخاصة

تشترك بعض المثلثات قائمة الزاوية في خصائص معينة. وفي هذا الاستكشاف، ستدرس هذه المثلثات قائمة الزاوية وستضع قواعد عامة عن نسب أضلاعها.

a. **استخدام البنية** ما قياس الزاويتين الحادتين في $\triangle JKL$؟ اشرح كيف عرفت ذلك.
يبلغ قياس كليهما 45°. المثلث متساوي الساقين، وتكون زاويتا القاعدة للمثلث المتساوي الساقين متطابقتين؛ يجب أن يساوي مجموع الزاويتين الحادتين 90°. إذًا يبلغ قياس كل زاوية 45°.

b. **التفكير بطريقة تجريدية** افترض أن $JK = KL = x$. أكمل ما يلي لإيجاد JL.

$JL^2 = x^2 + x^2$ نظرية فيثاغورس
$JL^2 = 2x^2$ بجمع الحدود المتشابهة.
$JL = \sqrt{2x^2}$ بأخذ الجذر التربيعي من كل طرف.
$JL = x\sqrt{2}$ بسّط.

c. **استخدام البنية** $\triangle PQR$ متساوي الأضلاع و $\overline{PS}$ هو أحد ارتفاعاته. فما قياس الزاويتين الحادتين في $\triangle QPS$؟ اشرح كيف عرفت ذلك.
60° و 30°؛ حيث إن $\triangle PQR$ شكل رباعي، وهو أيضًا مضلع متساوي الزوايا، فإن $m\angle Q =$ 60. ويعني هذا أن $m\angle QPS$ يجب أن تساوي $90 - 60 = 30$.

d. **استخدام البنية** افترض أن $QS = y$. فما طول QP بدلالة y؟ اشرح.
2y؛ الارتفاع ينصف $\overline{QR}$، إذًا $QR = 2y$ وحيث إن $QP = QR$، فإن جميع أضلاع $\triangle PQR$ بالطول 2y.

e. **التفكير بطريقة تجريدية** أكمل ما يلي لإيجاد PS.

$PS^2 + y^2 = (2y)^2$ نظرية فيثاغورس
$PS^2 + y^2 = 4y^2$ بسّط.
$PS^2 = 3y^2$ بطرح y^2 من كل طرف.
$PS = \sqrt{3y^2}$ بأخذ الجذر التربيعي من كل طرف.
$PS = y\sqrt{3}$ بسّط.

212 الوحدة 8 المثلثات قائمة الزاوية وحساب المثلثات

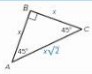
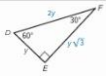
معلومات أساسية رياضية

العلاقات ضمن أطوال الأضلاع في مثلثات قائمة بزوايا مقياسها 30° و 60° و 90° وأخرى قائمة بزوايا مقياسها 45° و 45° و 90° توجّه الطلاب إلى تعريفات نسب مثلثية، والتي سيتم استكشافها بالدرس التالي. أما بهذا الدرس، فيكتشف الطلاب أن كل مثلث قائمة زواياه 45° و 45° و 90° له ساقان بنفس الطول. وبالتالي، فإن نسبة أطوال الساقين هي 1. وبالتعبير عن الأمر كنسبة مثلثية، يمكنك كتابة $\tan 45° = 1$. وبنفس الطريقة، الوتر يساوٍ $\sqrt{2}$ ضعف طول الساق. إذًا $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ أو $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

يُعرف المثلث قائم الزاوية متساوي الساقين بكونه مثلثًا قائم الزاوية قياسات زواياه $90°-45°-45°$.
وأثناء استكشافك، اكتشفت أيضًا أطوال الأضلاع في مثلث قائم الزاوية قياسات زواياه $90°-60°-30°$.
ويلخص مربع "المفهوم الأساسي" التالي العلاقات بين أضلاع هذه المثلثات القائمة الخاصة.

المفهوم الأساسي **المثلثات القائمة الخاصة**

سمِّ أطوال الأضلاع الناقصة في كل شكل بدلالة المتغير المعطى.

النظرية	الشكل
نظرية المثلث الذي تبلغ قياسات زواياه $45°-45°-90°$ في مثلث قياسات زواياه $90°-45°-45°$، تكون أضلاعه متطابقة، وطول وتره يساوي $\sqrt{2}$ ضعف طول أحد الساقين.	
نظرية المثلث الذي تبلغ قياسات زواياه $45°-60°-90°$ في مثلث قياسات زواياه $90°-60°-30°$، طول الوتر يساوي ضعفي طول الساق الأقصر وطول الساق الأطول يساوي $\sqrt{3}$ ضعف طول الساق الأقصر.	

مثال 2 **تطبيق نظرية المثلث الذي تبلغ قياسات زواياه $90°-45°-45°$**

تبيع إحدى الساحات المخصصة لبيع ألواح الخشب قطعًا مربعة من الخشب مقابل AED 0.02 لكل سنتيمتر مربع. ويريد مازن شراء قطعة مربعة من الخشب وشقها نصفين بطول القطر لصناعة سطحي طاولة مثل المعروض أمامك. ويريد أن يبلغ الضلع الأطول لكل سطح طاولة 30 cm، كما يريد معرفة تكلفة الخشب.

a. **التخطيط للحل** صف الخطوات الرئيسية التي ستستخدمها لحل هذه المسألة.
(1) حدد أطوال ساقي المثلث القائم متساوي الساقين؛ (2) أوجد مساحة سطح الطاولة المربعة اللازم لتكوين هذه المثلثات؛ (3) أوجد تكلفة الخشب.

b. **استخدام البنية** اشرح كيفية إيجاد أطوال ساقي $\triangle KLM$.
إذا كان $KL = LM = x$، إذًا بحسب نظرية المثلث $90°-45°-45°$، $KM = x\sqrt{2}$. إذًا $x\sqrt{2} = 30$. بالحل بإيجاد قيمة x يتبين أن $x = \frac{30}{\sqrt{2}}$ أو $15\sqrt{2}$. إذًا $KL = LM = 15\sqrt{2}$ cm.

c. **التفكير بطريقة كمية** اشرح كيف يمكن لمازن إيجاد تكلفة خشب سطحي الطاولة.
سيكون طول كل ضلع من أضلاع قطعة الخشب المربعة يساوي $15\sqrt{2}$ cm، وتساوي مساحة المربع $(15\sqrt{2})^2 = 450$ cm²
وستكون تكلفة الخشب AED 0.02(450) = AED 9.

مثال 2

نصيحة للتدريس
م. م. ر 1

تأكد من إدراك الطلاب لأن المعلومات ليست دائمًا معروضة بنفس الترتيب المستخدمة بها. في هذه المسألة، تكلفة الخشب موضحة بالعبارة الأولى. ومع ذلك، لن تُستخدم هذه المعلومة إلا بالخطوة الأخيرة من الحل.

الأسئلة الداعمة

- ما نوع مثلث سطح الطاولة؟ وكيف تعرف؟ **إنه مثلث قائم متساوي الساقين. فقد تكوّن المثلث بضلعين لمربع وقطر المربع؛ وبما أن أضلاع المربع متطابقة ومقياس زوايا المربع تبلغ 90، يجب أن يكون المثلث قائمًا متساوي الساقين.**
- عندما تعرف طول وتر مثلث قائم متساوي الساقين، فكيف تجد طول الساق؟ **اقسم طول الوتر على $\sqrt{2}$.**
- ما قانون مساحة المربع؟ **$A = s^2$، حيث إن s هو طول الضلع**

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

يتمثل جزء من الممارسة **م.م.ر 1 (فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها)** في معرفة كيف ومتى يمكن تبسيط أو تقريب التعبير. فالاختيار الصحيح يبسط لنا مسار الحل بشكل كبير. على سبيل المثال، في **المثال 2**، وجد الطلاب أن $KL = LM = \frac{30}{\sqrt{2}}$ cm. قد يرغب الطلاب في إنطاق المقام وتبسيط هذه إلى $15\sqrt{2}$ cm. ولكن بالنظر إلى باقي المسألة نجد أن هذه القيمة يجب تربيعها. فالأدق هو تربيع $\frac{30}{\sqrt{2}}$ أو $15\sqrt{2}$ أكثر من تربيع التقريب 21.2.

مثال 3

نصيحة للتدريس م. م. ر 4

في **الجزء a**، يُطلب من الطلاب كتابة معادلة تمثل موقف الحياة اليومية. أشر إلى أن من الطرق الشائعة لكتابة المعادلة كتابة تعبيرين مختلفين يمثلان نفس الكمية ثم ضبط التعبيرين ليصبحا متساويان. في هذا المثال، يستخدم الطلاب هذه الطريقة عند كتابة تعبيرين مختلفين من أجل ST ومن ثم استخدام هذه التعبيرات لكتابة معادلة.

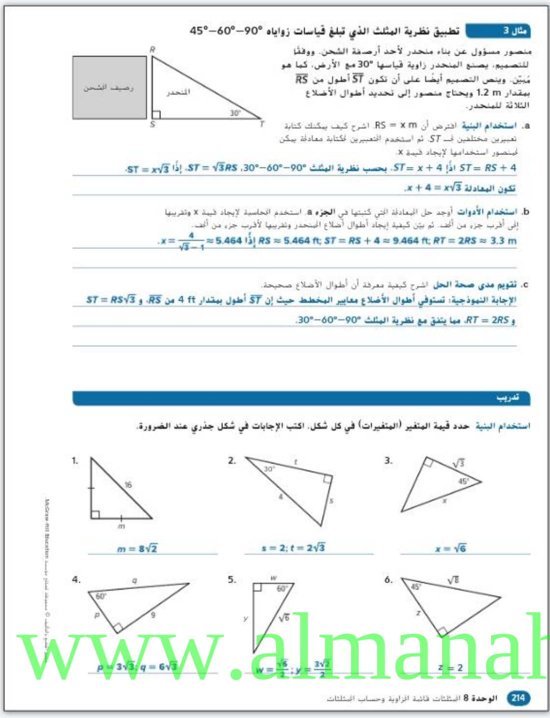
الأسئلة الداعمة

- بدلالة x، ما طول RT؟ ما طول ST؟
  $RT = 2x,\ ST = x\sqrt{3}$
- كيف يمكن حل $x + 4 = x\sqrt{3}$؟
  اطرح x من كل طرف للحصول على $x\sqrt{3} - x = 4$ أو $x(\sqrt{3} - 1) = 4$. ثم اقسم كلا الطرفين على $(\sqrt{3} - 1)$.

تمرين

التمرينات من 1 إلى 6 تدرب الطلاب باستخدام النسب التي تتضمن أضلاع المثلثات القائمة الخاصة.

التمرينات من 7 إلى 10 تشجع الطلاب على حل مسائل الحياة اليومية؛ باستخدام نسب الأضلاع لحساب المسائل التي تتضمن مثلثات قائمة.



مثال 3 تطبيق نظرية المثلث الذي تبلغ قياسات زواياه $45°-60°-90°$

منصور مسؤول عن بناء منحدر لأحد أرصفة الشحن. ووفقًا للتصميم، يصنع المنحدر زاوية قياسها $30°$ مع الأرض، كما هو مُبيّن. وينص التصميم أيضًا على أن تكون $\overline{ST}$ أطول من $\overline{RS}$ بمقدار 1.2 m ويحتاج منصور إلى تحديد أطوال الأضلاع الثلاثة للمنحدر.

a. **استخدام البنية** افترض أن RS = x m. اشرح كيف يمكنك كتابة تعبيرين مختلفين لـ ST. ثم استخدم التعبيرين لكتابة معادلة يمكن لمنصور استخدامها لإيجاد قيمة x.
$ST = RS + 4$ إذًا $ST = x + 4$. بحسب نظرية المثلث $30°-60°-90°$، $ST = \sqrt{3}RS$، إذًا $ST = x\sqrt{3}$،
تكون المعادلة $x + 4 = x\sqrt{3}$.

b. **استخدام الأدوات** أوجد حل المعادلة التي كتبتها في **الجزء a**. استخدم الحاسبة لإيجاد قيمة x وتقريبها إلى أقرب جزء من ألف. ثم بيّن كيفية إيجاد أطوال أضلاع المنحدر وتقريبها لأقرب جزء من ألف.
$x = \frac{4}{\sqrt{3}-1} \approx 5.464$ إذًا $RS \approx 5.464$ ft; $ST = RS + 4 \approx 9.464$ ft; $RT = 2RS \approx 3.3$ m.

c. **تقويم مدى صحة الحل** اشرح كيفية معرفة أن أطوال الأضلاع صحيحة.
الإجابة النموذجية: تستوفي أطوال الأضلاع معايير المخطط حيث إن $\overline{ST}$ أطول بمقدار 4 ft من $\overline{RS}$، و $ST = RS\sqrt{3}$ و $RT = 2RS$، مما يتفق مع نظرية المثلث $30°-60°-90°$.

تدريب

استخدام البنية حدد قيمة المتغير (المتغيرات) في كل شكل. اكتب الإجابات في شكل جذري عند الضرورة.

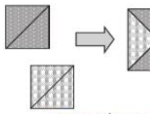
1. $m = 8\sqrt{2}$
2. $s = 2;\ t = 2\sqrt{3}$
3. $x = \sqrt{6}$
4. $p = 3\sqrt{3};\ q = 6\sqrt{3}$
5. $w = \frac{\sqrt{6}}{2};\ y = \frac{3\sqrt{2}}{2}$
6. $z = 2$

214 الوحدة 8 المثلثات قائمة الزاوية وحساب المثلثات

التدريس المتمايز

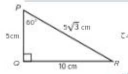
في **المثال 3**، يجب على الطلاب حل المعادلة $x + 4 = x\sqrt{3}$. يمكن للطلاب حل المعادلة جبريًا، كما قد يفعلوا مع أي معادلة خطية بها متغيرات في الطرفين. مع ذلك، فإن المعامل $\sqrt{3}$ قد يصعب الأمر على بعض الطلاب. فالخيار الآخر هو حل المعادلة باستخدام حاسبة التمثيل البياني. ولفعل هذا، يمكن للطلاب إدخال $x + 4$ على هيئة Y_1 و $x\sqrt{3}$ على هيئة Y_2. ثم يمكنهم تمثيل المستقيمين وإيجاد نقطة التقاطع.

7. **استخدام نموذج** تصنع هناء لحافًا. وتبدأ بمربعين صغيرين من القماش وتقطعهما بطول القطر. ثم ترتب المثلثات الأربعة الناتجة لعمل قطعة لحاف مربعة كبيرة. وهي تريد أن تبلغ مساحة قطعة اللحاف الكبيرة $36\ cm^2$. فما أطوال الأضلاع التي يجب أن تستخدمها للمربعين الصغيرين من القماش؟ اشرح.



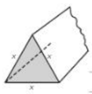
$3\sqrt{2}$ cm أو حوالي 4.2 cm؛ لتبلغ مساحة قطعة $36\ cm^2$، يجب أن يكون كل ضلع من أضلاعها 6 cm ويعني ذلك أن يكون وتر كل مثلث قائم صغير 6 cm وبحسب نظرية المثلث $90°-45°-45°$، سيكون قياس أضلاع هذه المثلثات $\frac{6}{\sqrt{2}}$ أو $3\sqrt{2}$ cm

8. **الاستنتاج النقدي** أخبر طالب أن طول $\overline{QR}$ في الشكل يبلغ 10 cm. وقد حدد أطوال الأضلاع الأخرى كما هو مبين. فهل توافق على عمل الطالب؟ وإذا كان الأمر كذلك، فاشرح السبب. وإن لم يكن كذلك، فاشرح كيف عرفت أن الطالب ارتكب خطأ ثم أعط أطوال الأضلاع الصحيحة.



لا أتفق؛ يجب أن يكون الوتر الضلع الأكبر في المثلث، بينما $10 > 5\sqrt{3}$، وبالتالي لا يمكن أن تكون هذه الأبعاد صحيحة. الأطوال الصحيحة هي $PQ = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm و $PR = \frac{20\sqrt{3}}{3}$ cm.

9. **وصف طريقة** لدعامات أحد الجسور مقاطع عرضية في شكل مثلثات متساوية الأضلاع. وتريد إحدى المهندسات تحديد مساحة مقطع عرضي في حالة معرفتها بطول أحد أضلاع المثلث. اشرح كيف يمكنها وضع طريقة عامة يمكنها من خلالها الحصول بوحدة السنتيمتر المربع على مساحة مقطع عرضي يبلغ طول أحد أضلاعه x من السنتيمترات.



مساحة المثلث هي نصف طول القاعدة مضروبًا في الارتفاع.
ارسم ارتفاع مثلث متساوي الأضلاع بحيث يكون مثلث $90°-60°-30°$، بحيث يكون الارتفاع $\frac{x}{2}\sqrt{3}$. إذًا، يساوي المقطع العرضي للمثلث $\frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{x}{2}\sqrt{3}$ أو $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}\ ft^2$.

10. **استخدام الأدوات** يمتلك محمد 40 m من السياج لعمل حظيرة مسيّجة على شكل مثلث لما يمتلكه من دجاج. ويريد أن تكون الحظيرة في صورة مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين. اشرح كيف يمكن لمحمد كتابة معادلة لإيجاد أبعاد الحظيرة، مع افتراض استخدامه لكل السياج. ثم استخدم حاسبة لإيجاد أبعاد أضلاع الحظيرة مع تقريبها إلى أقرب جزء من عشرة من المتر.

افترض أن x هو الطول بالأمتار لأحد سيقان المثلث. إذًا ستكون أطوال أضلاع المثلث هي x و x و $x\sqrt{2}$. ينبغي أن يحل محمد المعادلة $x + x + x\sqrt{2} = 40$ أو $x(2 + \sqrt{2}) = 40$. الحل هو $x = \frac{40}{2 + \sqrt{2}} \approx 11.7$. الأبعاد هي 11.7 m و 11.7 m و 16.6 m.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

الممارسة م.م.ر 4 (نماذج الرياضيات) تشرح كيف يجب على الطلاب التمكن من "تحليل العلاقات رياضيًا للخروج باستنتاجات". في **التمرين 7**، فتحليل العلاقات يوفر للطلاب طريقة بديلة للحل. فمساحة اللحاف الكبير تبلغ $36\ cm^2$. وهذا يعني أن مساحة كل مربع من مربعات القماش الصغير يجب أن تبلغ $18\ cm^2$. إن كانت مساحة المربع تبلغ $18\ cm^2$، فكل ضلع يجب أن يكون طوله $\sqrt{18}$ أو $3\sqrt{2}$ cm. إن حل المسألة بهذه الطريقة قد يساعد الطلاب على التحقق من منطقية الحل.

عرض المعايير

تمرين	م.م.ر
1, 6	7
7	4
8	3
9	8
10	5

أخطاء شائعة

في **التمرين 9**، يحتاج الطلاب إلى إيجاد ارتفاع المقطع العرضي للمثلث ولكن قد يكتبون الارتفاع على هيئة $x\sqrt{3}$ بدلاً من $\frac{x}{2}\sqrt{3}$. فالطلاب الواقعون في هذا الخطأ ربما قد رسموا ارتفاع على واجهة التقاطع العرضي من مثلث قائم زواياه هي $90°-60°-30°$. ثم افترضوا أن الساق الأقصر للمثلث له طول x بدلاً من $\frac{x}{2}$.

8.4 حساب المثلثات

المعايير

معايير الممارسات في الرياضيات:
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

المتطلبات الأساسية

- حل المسائل باستخدام المثلثات المتشابهة
- معرفة العلاقات بالمثلثات القائمة الخاصة

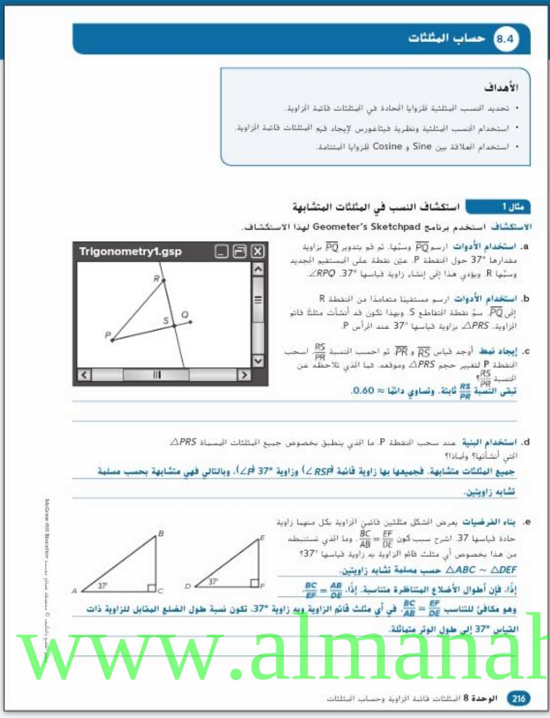
مثال 1

نصيحة للتدريس م. م. ر 3

في هذا الاستكشاف، يقوم الطلاب باستكشاف نسب أطوال الأضلاع بالمثلثات القائمة بزاوية $37°$. إن سمح الوقت، اطلب من الطلاب تكرار نشاط الاستكشاف مع مثلثات قائمة لها زوايا حادة مختلفة. وجّه الطلاب إلى تعميم نتائجهم.

الأسئلة الداعمة

- أي ضلع للمثلث $\triangle PRS$ هو الوتر؟ ولماذا؟ $\overline{PR}$ **؛ هو الضلع المقابل للزاوية القائمة.**
- مع تغيير حجم المثلث $\triangle PRS$، ما النسب الأخرى التي تبقى ثابتة؟ **الإجابة النموذجية:** $\frac{PS}{PR}$ ، $\frac{RS}{PS}$



8.4 حساب المثلثات

الأهداف

- تحديد النسب المثلثية للزوايا الحادة في المثلثات قائمة الزاوية.
- استخدام النسب المثلثية ونظرية فيثاغورس لإيجاد قيم المثلثات قائمة الزاوية.
- استخدام العلاقة بين Sine و Cosine للزوايا المتتامة.

مثال 1 استكشاف النسب في المثلثات المتشابهة

الاستكشاف استخدم برنامج Geometer's Sketchpad لهذا الاستكشاف.

a. **استخدام الأدوات** ارسم $\overline{PQ}$ وسمّها. ثم قم بتدوير $\overline{PQ}$ بزاوية مقدارها $37°$ حول النقطة P. عيّن نقطة على المستقيم الجديد وسمّها R. ويؤدي هذا إلى إنشاء زاوية قياسها $37°$ ،$\angle RPQ$.

b. **استخدام الأدوات** ارسم مستقيمًا متعامدًا من النقطة R إلى $\overline{PQ}$. سمّ نقطة التقاطع S. وبهذا تكون قد أنشأت مثلثًا قائم الزاوية، $\triangle PRS$ بزاوية قياسها $37°$ عند الرأس P.

c. **إيجاد نمط** أوجد قياس $\overline{RS}$ و $\overline{PR}$. ثم احسب النسبة $\frac{RS}{PR}$. اسحب النقطة P لتغيير حجم $\triangle PRS$ وموقعه. فما الذي تلاحظه عن النسبة $\frac{RS}{PR}$؟

تبقى النسبة $\frac{RS}{PR}$ ثابتة، وتساوي دائمًا ≈ 0.60.

d. **استخدام البنية** عند سحب النقطة P، ما الذي ينطبق بخصوص جميع المثلثات المسماة $\triangle PRS$ التي أنشأتها؟ ولماذا؟

جميع المثلثات متشابهة. فجميعها بها زاوية قائمة ($\angle RSP$) وزاوية $37°$ ($\angle P$)، وبالتالي فهي متشابهة بحسب مسلمة تشابه زاويتين.

e. **بناء الفرضيات** يعرض الشكل مثلثين قائمي الزاوية بكل منهما زاوية حادة قياسها 37. اشرح سبب كون $\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{DE}$. وما الذي تستنبطه من هذا بخصوص أي مثلث قائم الزاوية به زاوية قياسها $37°$؟

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ حسب مسلمة تشابه زاويتين.

إذًا، فإن أطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة. إذًا، $\frac{BC}{EF} = \frac{AB}{DE}$

وهو مكافئ للتناسب $\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{DE}$. في أي مثلث قائم الزاوية وبه زاوية $37°$، تكون نسبة طول الضلع المقابل للزاوية ذات القياس $37°$ إلى طول الوتر متماثلة.

216 الوحدة 8 المثلثات قائمة الزاوية وحساب المثلثات

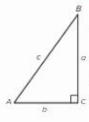
معلومات أساسية رياضية

يتعرف الطلاب بهذا الدرس على أكثر ثلاثة نسب مثلثية شائعة: Sine الزاوية و Cosine وtan. كل من هذه النسب محددة هنا لزاوية حادة في مثلث قائم. في الدورات اللاحقة، سيمتد استخدام Sine و Cosine الزاوية ليصبحان دالتان يكون مداهما من الأعداد الحقيقية بشكل كلي (بمعنى آخر، ليس مجرد القيم بين $0°$ و $90°$). وسيمتد استخدام tan الزاوية لتصبح دالة يكون مداها من الأعداد الحقيقية بشكل كلي ما عدا بالشكل $n180° + 90°$، حيث يكون n عددًا كليًا.

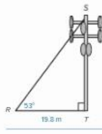
النسبة المثلثية هي نسبة أطوال ضلعين من مثلث قائم الزاوية.

المفهوم الأساسي **النسب المثلثية**

استخدم أطوال الأضلاع في الشكل لإكمال المثال الخاص بكل نسبة مثلثية.

النسبة المثلثية	مثال	الشكل
في مثلث قائم الزاوية، $\triangle ABC$، به زاوية حادة عند الرأس A، يكون Sine الزاوية $\angle A$ (sin A) هو نسبة طول الساق المقابلة للزاوية $\angle A$ إلى طول الوتر.	sin A = $\frac{a}{c}$	
في مثلث قائم الزاوية، $\triangle ABC$، به زاوية حادة عند الرأس A، يكون Cosine تمام الزاوية $\angle A$ (cos A) هو نسبة طول الساق المجاورة للزاوية $\angle A$ إلى طول الوتر.	cos A = $\frac{b}{c}$	
في مثلث قائم الزاوية، $\triangle ABC$، به زاوية حادة عند الرأس A، يكون tan الزاوية $\angle A$ (tan A) هو نسبة طول الساق المقابلة للزاوية $\angle A$ إلى طول الساق المجاورة لـ $\angle A$.	tan A = $\frac{a}{b}$	

مثال 2 **استخدام نسبة مثلثية**



يتم دعم برج هاتف خلوي بسلك تثبيت كما هو موضح. وتريد هناء تحديد ارتفاع البرج. وقد اكتشفت أن سلك التثبيت يصنع مع الأرض زاوية قياسها 53°، وهو مثبّت بالأرض على امتداد 19.8 m من قاعدة البرج.

a. **استخدام نموذج** حدد المعلومات المعروفة في الشكل.

b. **تفسير المسائل** افترض أن ارتفاع البرج هو x. فأي نسبة مثلثية ينبغي لك استخدامها لكتابة معادلة تستطيع حلها لإيجاد قيمة x؟ برّر اختيارك.

ظل زاوية الميل؛ $m\angle R$ وطول الضلع المجاور للزاوية $\angle R$ مذكوران. نحتاج إلى إيجاد الضلع المقابل للزاوية $\angle R$. تربط نسبة ظل زاوية الميل اثنين من المعطيات بالمعطيات الناقصة.

c. **الحساب بدقة** اكتب معادلة عن ارتفاع البرج وقم بحلها. اشرح الخطوات التي اتبعتها. قرّب ارتفاع برج الهاتف الخلوي إلى أقرب جزء من عشرة من المتر.

$\tan 53° = \frac{x}{65}$؛ للحل بإيجاد قيمة x، اضرب كلا طرفي المعادلة في 56. $65 \tan 53° \approx 86.2579$، إذًا فإن ارتفاع البرج يساوي حوالي 26.3 m.

d. **الحساب بدقة** ماذا لو أرادت هناء إيجاد طول سلك التثبيت؟ وما الذي كنت ستفعله مختلفًا لحل هذه المسألة؟ اشرح.

افترض أن y تمثل طول سلك التثبيت واستخدم نسبة cos؛ $\cos 53° = \frac{65}{y}$. يبين الحل لإيجاد قيمة y أن $y = \frac{65}{\cos 53°}$ أو ≈ 32.9 m. إذًا طول سلك التثبيت يساوي حوالي 33 m.

e. **تفسير المسائل** إذ زاد ارتفاع البرج بمقدار 37 m وبقيت الزاوية عند النقطة R كما هي، فأوجد المسافة من قاعدة البرج التي يجب عندها تثبيت سلك التثبيت بالأرض. قرّب المسافة إلى أقرب جزء من عشرة من المتر.

28 m؛ $\tan 53° = \frac{121.5}{d}$ بحيث يكون $d = \frac{121.5}{\tan 53°} = 28$ m.

التدريس المتمايز

قد تكون للطلاب طرق مختلفة لتذكر تعريفات النسب المثلثية بسبب اختلاف أنماط تعلمهم. فقد يريد المتعلمون بالنمط السمعي استخدام أدوات التذكر. ومن تلك الأدوات المعروفة SOH-CAH-TOA. حيث إن تلك العبارات هي اختصار Sine الزاوية (مقابل/وتر) وCosine (متجاور/وتر) وtan (مقابل/متجاور). وقد يجد طلاب آخرون أنه من الأيسر استخدام أدوات للتذكّر تتكون من عبارات كاملة، مثل "بعض أطفال هيلين يعانون من صعوبات بتعلم الجبر." شجّع الطلاب على تطوير أدوات التذكّر الخاصة بهم والتي تتضمن أسماء أو كلمات أو عبارات لها معانٍ خاصة بالنسبة لهم.

مثال 2

نصيحة للتدريس

م. م. ر 5

أثناء استخدام الطلاب للآلات الحاسبة، اشرح أهمية التقريب بالخطوة الأخيرة فقط. فهذا يضمن دقة الإجابات قدر الإمكان. وللتأكيد على ذلك، في **الجزء c**، يمكن أن تطلب من الطلاب إيجاد قيمة $65 \tan 53°$ على الآلات الحاسبة وتقريبها لأقرب جزء من عشرة، ثم اطلب منهم حساب $\tan 53°$، وتقريبه لأقرب جزء من عشرة، وضربه في 65. ستكون النتائج مختلفة إلى حد ما.

الأسئلة الداعمة

- ما نسبة أطوال الأضلاع التي يجب تكوينها لإيجاد tan R؟ $\frac{ST}{RT}$
- في **الجزء d**، ما الطريقة الأخرى التي تجد بها طول سلك الهاتف عندما تعرف ارتفاع البرج؟ **استخدم نظرية فيثاغورس لإيجاد طول الضلع المفقود.**

مثال 3

نصيحة للتدريس م.م.ر 2

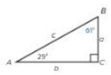
قبل بدء المثال، قد يكون من الجيد استغراق بعض الوقت لمراجعة الحقائق الأساسية عن المثلثات القائمة. تحديدًا، تأكد من تذكر الطلاب بأن الزوايا الحادة للمثلث القائم متتامة.

الأسئلة الداعمة

- بماذا يمكنك أن تخبرنا عن $m\angle A$ و $m\angle B$؟ ولماذا؟ $m\angle A + m\angle B = 90$؛ **باستخدام نظرية مجموع زوايا المثلث فإن مجموع مقاييس زوايا أي مثلث تبلغ 180. بما أن مقياس الزاوية القائمة 90، فإن مجموع الزاويتين الحادتين في المثلث القائم يجب أن يكون $180 - 90$ أو 90.**
- بالنسبة للزاوية $\angle A$، ما الضلع المقابل؟ وما هو الوتر؟ $\overline{BC}$; $\overline{AB}$
- بالنسبة للزاوية $\angle B$، ما الضلع المجاور؟ وما هو الوتر؟ $\overline{BC}$; $\overline{AB}$

مثال 3 **استخدام الزوايا المتتامة**

يحتاج محمد إلى استخدام حاسبته لإيجاد قيمة $\sin 29°$. ووجد أن مفتاح (sine) في حاسبته مكسور. ويريد أن يعرف ما إذا كانت هناك طريقة أخرى يمكنه من خلالها استخدام حاسبته لإيجاد هذه القيمة.



a. **التفكير بطريقة تجريدية** في الشكل، $m\angle A = 29$. فما قيمة $m\angle B$؟ ولماذا؟ حدّد قياس الزاوية في الشكل.

حيث إن $\angle A$ و $\angle B$ زاويتان حادتان في المثلث القائم، فهما زاويتان متممتان. إذًا، $m\angle B = 90 - m\angle A$ أو 61.

b. **التفكير بطريقة تجريدية** باستخدام أطوال الأضلاع المبيّنة بالشكل، اكتب نسبة $\sin 29°$. اذكر نسبة مثلثية أخرى لزاوية في الشكل مساوية لتلك؟ اشرح.

$\sin 29° = \frac{a}{c}$ و $\cos 61° = \frac{a}{c}$، إذًا $\sin 29° = \cos 61°$.

c. **استخدام الأدوات** اشرح كيف يمكن لمحمد استخدام حاسبته لإيجاد قيمة $\sin 29°$. ثم استخدم حاسبتك للتحقق من صحة إجابتك.

ينبغي أن يوجد القيمة $\cos 61°$. وتبين الحاسبة أن هذا صحيح حيث إنها تقدم نفس القيمة لكل من $\sin 29°$ و $\cos 61°$؛ وكلاهما يساوي تقريبًا 0.4848.

d. **تفسير المسائل** لسوء الحظ، اكتشف محمد أن مفتاح ظل الزاوية (tangent) في حاسبته مكسور أيضًا. ويعني هذا أنه يمكنه فقط استخدام مفتاح Cosine لإيجاد قيمة النسب المثلثية للزوايا. اشرح كيف يمكن لمحمد استخدام حاسبته لإيجاد قيمة $\tan 29°$.

ينبغي أن يوجد قيمة نسبة $\cos 61°$ و $\cos 29°$. باستخدام المحايد $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$، $\tan 29° = \frac{\sin 29°}{\cos 29°}$. عوّض $\cos 61°$ بـ $\sin 29°$ بناء على الجزء c لتحصل على $\tan 29° = \frac{\cos 61°}{\cos 29°} \approx 0.5543$.

إذا كنت تعلم sine أو Cosine أو tan لزاوية ما، فيمكنك إيجاد قياس هذه الزاوية.

المفهوم الأساسي **معكوس النسب المثلثية**

أكمل كل مثال.

معكوس النسبة المثلثية	مثال
إذا كان Sine الزاوية A هو x، فإن **معكوس Sine الزاوية x** هو قياس $\angle A$.	إذا كان $\sin 30° = 0.5$، فإن $\sin^{-1} 0.5 =$ **30°**.
إذا كان Cos A هو x، فإن **معكوس Cos x** هو قياس $\angle A$.	إذا كان $\cos 60° = 0.5$، فإن $\cos^{-1} 0.5 =$ **60°**.
إذا كان tan A هو x، فإن **معكوس tan x** هو قياس $\angle A$.	إذا كان $\tan 45° = 1$، فإن $\tan^{-1} 1 =$ **45°**.

عندما تعطى طولا ضلعين لزاوية قائمة أو طول ضلع واحد وقياس زاوية حادة واحدة، يمكنك استخدام حساب المثلثات لإيجاد كل أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا المتبقية. وتُعرف هذه العملية باسم حل مثلث قائم الزاوية.

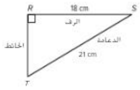
التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

الممارسة م.م.ر 2 (التفكير بطريقة تجريدية وكميّة) تصف كيف يتمكن الطلاب البارعون بالرياضيات من "فهم طبيعة الكميات وعلاقاتها في المسائل." **المثال 3** هو خير مثال على ذلك، حيث يطلب من الطلاب تحليل العلاقات بدقة في $\triangle ABC$. يمكن أن تطلب من الطلاب كتابة تعميم استنادًا إلى نتائجهم في هذه المسألة. فقد يذكر الطلاب البارعون بالرياضيات التعميم التالي: إذا كانت الزاوية الحادة لمثلث قائم مقاسها x، إذًا فإن $\sin x° = \cos (90 - x)°$.

102 / 31

مثال 4 حل مثلث قائم الزاوية

تُركّب ياسمين رفًا جديدًا على حائط حجرة نومها. ويبلغ عرضه 18 cm. ولتثبيت الرف، تضع ياسمين دعامة معدنية طولها 21 cm على حافة الرف وعلى الحائط، كما هو مبين. وتريد ياسمين معرفة مقدار المسافة تحت الرف التي ينبغي عندها تثبيت الدعامة في الحائط. كما تريد معرفة قياس الزاوية التي ستصنعها الدعامة مع الحائط والرف.



a. **التخطيط للحل** صف الخطوات التي يمكنك استخدامها لإيجاد قياسي الزاويتين الناقصتين وطول $\overline{RT}$.

الإجابة النموذجية: (1) استخدم معكوس cos لإيجاد $m\angle S$؛ (2) اطرح $m\angle S$ من 90 لإيجاد $m\angle T$ حيث إن الزوايا الحادة في المثلث القائم متممة؛ (3) استخدم نظرية فيثاغورس لإيجاد طول $\overline{RT}$.

b. **استخدام الأدوات** اشرح كيف يمكنك استخدام حاسبتك لإيجاد قيمة $m\angle S$ مع التقريب إلى أقرب درجة.

حيث إن $\cos S = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$؛ $\cos S = \frac{18}{21}$ إذًا $m\angle S = \cos^{-1}\frac{18}{21}$. يبين إيجاد قيمة ذلك على الحاسبة أن $m\angle S \approx 31$.

c. **التواصل بدقة** كيف يمكن لياسمين إيجاد قيمة $m\angle T$؟ صف طريقتين مختلفتين.

يمكنها استخدام النسب المثلثية المعكوسة لإيجاد $m\angle T$؛ كما يمكنها استخدام حقيقة أن الزوايا الحادة في المثلث القائم الزاوية متممة. حيث إن $m\angle S = 31$، فإن $m\angle T = 90 - 31 = 59$.

d. **التفكير بطريقة كمّية** ما مقدار المسافة تحت الرف التي ينبغي لياسمين عندها تثبيت الدعامة في الحائط؟ اشرح خطواتك. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة من السنتيمتر.

الإجابة النموذجية: وفقًا لنظرية فيثاغورس، $RT^2 + RS^2 = ST^2$. إذًا $RT^2 + 18^2 = 21^2$. إذًا، $RT^2 + 324 = 441$ و $RT^2 = 117$ بأخذ الجذر التربيعي لكل ضلع يتبين أن $RT \approx 10.8$ cm.

e. **التفكير بطريقة كمية** اشرح كيف يمكنك حل **الجزء d** مستعينًا بالنسب المثلثية.

الإجابة النموذجية: استخدم النسبة المثلثية: $\tan S = \frac{RT}{RS}$، إذًا $\tan 31° = \frac{RT}{18}$ و $RT = 18\tan 31° \approx 10.8$ cm.

f. **وصف طريقة** قارن إجاباتك في **الجزء d والجزء e**. لماذا قد يكون استخدام الطريقة المثلثية أفضل في بعض الحالات؟ ولماذا قد تكون نظرية فيثاغورس أفضل في حالات أخرى؟

الإجابة النموذجية: لاستخدام الطريقة المثلثية، لن نحتاج سوى إلى الزاوية المقابلة والضلع المجاور، وسيكون ذلك مفيدًا في الحالات التي لا تكون فيها جميع أطوال الأضلاع معروفة. وستكون طريقة نظرية فيثاغورس مساعدة أكثر في الحالات التي يكون فيها الزاوية القائمة وطول ضلعين فقط هي المعروفة.

مثال 4

نصيحة للتدريس م. م. ر 1

من المهم أن يدرك الطلاب بأن هناك العديد من الطُرق الممكنة خلال هذه المسألة. على سبيل المثال، قد يجد بعض الطلاب RT باستخدام نظرية فيثاغورس. بينما قد يبدأ البعض الآخر بإيجاد أحد مقاييس الزوايا غير المعروفة. عندما يكمل الطلاب المسألة، اطلب منهم مقارنة إجاباتهم مع **الجزء a** واطلب منهم مناقشة ميزات وعيوب كل طريقة للحل.

الأسئلة الداعمة

- هل يجب عليك إيجاد $m\angle S$ قبل $m\angle T$ و$m\angle T$ أو قبل $m\angle S$. أو أن الترتيب لا يهم؟ اشرح. **الترتيب لا يهم. يمكنك استخدام نسب مثلثية معكوسة لإيجاد قياس زاوية واحدة ومن ثم إيجاد الأخرى باستخدام حقيقة أن الزوايا الحادة بالمثلث القائم متتامة.**
- كيف تعرف أن إجابتك **بالجزء d** منطقية؟ **الإجابة النموذجية: إن أطوال الأضلاع 10.8 و 18 و 21 تُحقق نظرية فيثاغورس.**

تدريب

في **التمرينات من 1 إلى 3**، لابد أن يحدد الطلاب النسب المثلثية المناسبة والنسب المثلثية المعكوسة من أجل حل المثلثات القائمة.

التمرينات 4 و 7 يمكنان الطلاب من التمرين باستخدام العلاقات بين نسب أطوال الأضلاع وزوايا المثلثات القائمة.

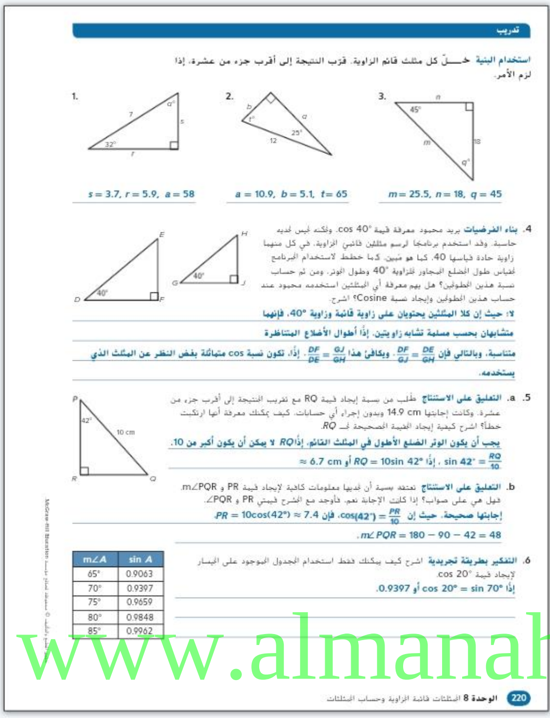
في **التمرين 5**، يستخدم الطلاب العلاقات بالمثلث القائم للتعليق على نتائج الآخرين. حيث يستمرون بحل المثلث القائم بحساب المثلثات.

في **التمرينين 6 و 8**، يستكشف الطلاب العلاقات بين Sine الزاوية وCosine للزوايا المتتامة.

التمرين 9 عبارة عن مسألة مطروحة تتضمن مهارات التفكير العليا. تتطلب هذه المسألة أن يتمرن الطلاب من خلال تمثيل مسألة من الحياة اليومية بمثلث قائم. ثم يستخدم الطلاب معرفتهم بالنسب المثلثية لحل المثلث القائم.

عرض المعايير

تمرين	م.م.ر
1–3	7
4	3
5	3
6	2
7	1
8	2
9	6, 8



تدريب

استخدام البنية حُلّ كل مثلث قائم الزاوية. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة، إذا لزم الأمر.

1. $s = 3.7,\ r = 5.9,\ a = 58$
2. $a = 10.9,\ b = 5.1,\ t = 65$
3. $m = 25.5,\ n = 18,\ q = 45$

4. **بناء الفرضيات** يريد محمود معرفة قيمة $\cos 40°$. ولكنه ليس لديه حاسبة. وقد استخدم برنامجًا لرسم مثلثين قائمي الزاوية، في كل منهما زاوية حادة قياسها 40، كما هو مبين. كما خطط لاستخدام البرنامج لقياس طول الضلع المجاور للزاوية $40°$ وطول الوتر، ومن ثم حساب نسبة هذين الطولين؟ هل يهم معرفة أي المثلثين استخدمه محمود عند حساب هذين الطولين وإيجاد نسبة Cosine؟ اشرح.
لا؛ حيث إن كلا المثلثين يحتويان على زاوية قائمة وزاوية $40°$، فإنهما متشابهان بحسب مسلمة تشابه زاويتين. إذًا أطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة، وبالتالي فإن $\frac{DE}{GH} = \frac{DF}{GJ}$. ويكافئ هذا $\frac{GJ}{GH} = \frac{DF}{DE}$. إذًا، تكون نسبة cos متماثلة بغض النظر عن المثلث الذي يستخدمه.

5. a. **التعليق على الاستنتاج** طُلب من بسمة إيجاد قيمة RQ مع تقريب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة. وكانت إجابتها 14.9 cm وبدون إجراء أي حسابات. كيف يمكنك معرفة أنها ارتكبت خطأ؟ اشرح كيفية إيجاد القيمة الصحيحة لـ RQ.
يجب أن يكون الوتر الضلع الأطول في المثلث القائم، إذًا RQ لا يمكن أن يكون أكبر من 10.
$\sin 42° = \frac{RQ}{10}$، إذًا $RQ = 10\sin 42°$ أو ≈ 6.7 cm

b. **التعليق على الاستنتاج** تعتقد بسمة أن لديها معلومات كافية لإيجاد قيمة PR و $m\angle PQR$. فهل هي على صواب؟ إذا كانت الإجابة نعم، فأوجد مع الشرح قيمتي PR و $\angle PQR$.
إجابتها صحيحة، حيث إن $\cos(42°) = \frac{PR}{10}$، فإن $PR = 10\cos(42°) \approx 7.4$.
$m\angle PQR = 180 - 90 - 42 = 48$.

6. **التفكير بطريقة تجريدية** اشرح كيف يمكنك فقط استخدام الجدول الموجود على اليسار لإيجاد قيمة $\cos 20°$.
إذًا $\cos 20° = \sin 70°$ أو 0.9397.

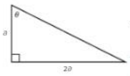
m∠A	sin A
65°	0.9063
70°	0.9397
75°	0.9659
80°	0.9848
85°	0.9962

220 الوحدة 8 المثلثات قائمة الزاوية وحساب المثلثات

أخطاء شائعة

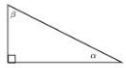
من أبرز الأخطاء الشائعة في حساب المثلثات تحويل النسب. على سبيل المثال، في **التمرين 3**، قد يكتب الطلاب $\sin 45° = \frac{m}{18}$ بدلاً من $\sin 45° = \frac{18}{m}$. لاحظ أن $\sin 45° = \frac{m}{18}$ تؤدي إلى الإجابة $m = 12.7$. اطلب من الطلاب أن يتحققوا من منطقية إجاباتهم بحيث يدركون أنها خطأ، فالناتج هو وتر أقصر من أحد ساقي المثلث.

7. **تفسير المسائل** معروض على اليسار مثلث قائم الزاوية بساقين يبلغ طولهما a و 2a وزاوية θ. وإذا كان a عددًا حقيقيًا موجبًا. فهل تعتمد θ على قيمة a؟ وإذا لم تكن كذلك، فأوجد قياس θ. اشرح استنتاجك.



θ لا تعتمد على a. حيث إن a هو عدد حقيقي موجب، فإن نسبة السيقان هي 2. تعني النسبة الثابتة للسيقان أن θ ثابتة كذلك و $\tan\theta = 2$ أو $\theta = \tan^{-1} 2 \approx 63.4°$.

8. **التفكير بطريقة كمية** في المثلث قائم الزاوية الموضح. $\sin\alpha = 0.6428$ و $\cos\alpha = 0.7660$. فأوجد $\sin\beta$ و $\cos\beta$ واشرح استنتاجك.



***cosine* يساوي *sin* وبالتالي فإن $\sin\beta = \cos\alpha = 0.7660$. وبالمثل، $\cos\beta = \sin\alpha = 0.6428$.**

9. تصمم مهندسة هيكلاً داعمًا لسقف ملعب داخلي. ويتكون هذا الهيكل من العديد من المثلثات قائمة الزاوية المتشابهة. وتحتوي كل المثلثات على دعامة أفقية ودعامة رأسية وزاوية قياسها 28°. كما هو موضح.

a. **وصف طريقة** تريد المهندسة صيغة بسيطة يمكنها استخدامها لإيجاد طول الدعامة الرأسية v مع علمها بطول الدعامة الأفقية h. اشرح كيف يمكنها استنتاج مثل هذه الصيغة.

$\tan 28° = \frac{v}{h}$، إذًا $v = h\tan 28°$.

b. **الحساب بدقة** في أحد المثلثات الموجودة في الهيكل، يزيد طول الدعامة الأفقية عن طول الدعامة الرأسية بمترين. اشرح كيف يمكن للمهندسة إيجاد طولي الدعامتين.

من الجزء a فإن $v = h\tan 28°$ ، ولكن $v = h - 2$؛ إذًا ينبغي أن تحل المهندسة بإيجاد قيمة $h\tan 28° = v = h - 2$ لإيجاد $h \approx 4.27$ m و $v \approx 2.27$ m.

c. **تقويم مدى صحة الحل** كيف يمكنك التحقق من مدى صحة إجابتك عن **الجزء b**؟

الإجابة النموذجية: h أكبر بمقدار مترين من v و $\frac{v}{h} = \frac{2.27}{4.27} \approx 0.5316$ أو و $\tan^{-1} 0.5317 \approx 28°$؛ إذًا فالإجابة منطقية.

d. **الحساب بدقة** عند رسم التصميمات المتعلقة بالهيكل الداعم، تدرك المهندسة حاجتها إلى معرفة طول الضلع الثالث PQ بالإضافة إلى قياس $\angle Q$. فأوجد هذه القياسات.

$PQ = \frac{v}{\sin(28°)} \approx \frac{2.27}{\sin(28°)} \approx 4.84$ m. $m\angle Q = 180 - 90 - 28 = 62$

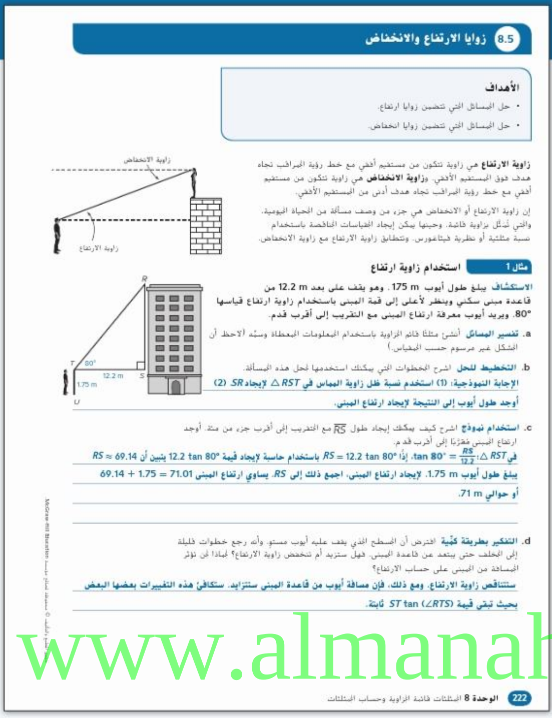
أخطاء شائعة

في **التمرين 9**. قد يحصل الطلاب على إجابة غير صحيحة بسبب التقريب في الخطوات الأولية. ذكرهم بأن يقوموا بتأجيل التقريب حتى الخطوة الأخيرة بالمسألة. وللحصول على أدق إجابة، يجب أن يستخدم الطلاب الآلات الحاسبة لإيجاد قيمة التعبير بخطوة واحدة عوضًا عن استخدام عدة خطوات تتضمن تقريبات عديدة.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

الممارسة م.م.ر 6 (مراعاة الدقة) تتطلب أن يقدم الطلاب حلاً دقيقًا وكاملاً. في **التمرين 9**. يجب أن يقرأ الطلاب الشكل على نحو صحيح لجمع المعلومات المطلوبة لحل المسألة. إضافة إلى ذلك. يحتاج الطلاب إلى استخدام لغة محددة ودقيقة لشرح الحلول التي يقدمونها إضافة إلى طرق رياضية منطقية. في **التمرين 9**. يُطلب من الطلاب التفكير بالتفاصيل. فهي من أهم جوانب الممارسة م.م.ر 6.

8.5 زوايا الارتفاع والانخفاض



8.5 زوايا الارتفاع والانخفاض

الأهداف
- حل المسائل التي تتضمن زوايا ارتفاع.
- حل المسائل التي تتضمن زوايا انخفاض.

زاوية الارتفاع هي زاوية تتكون من مستقيم أفقي مع خط رؤية المراقب تجاه هدف فوق المستقيم الأفقي. و**زاوية الانخفاض** هي زاوية تتكون من مستقيم أفقي مع خط رؤية المراقب تجاه هدف أدنى من المستقيم الأفقي.

إن زاوية الارتفاع أو الانخفاض هي جزء من وصف مسألة من الحياة اليومية، والتي تُمثّل بزاوية قائمة. وحينها يمكن إيجاد القياسات الناقصة باستخدام نسبة مثلثية أو نظرية فيثاغورس. وتتطابق زاوية الارتفاع مع زاوية الانخفاض.

مثال 1 استخدام زاوية ارتفاع

الاستكشاف يبلغ طول أيوب 175 m. وهو يقف على بعد 12.2 m من قاعدة مبنى سكني وينظر لأعلى إلى قمة المبنى باستخدام زاوية ارتفاع قياسها 80°. ويريد أيوب معرفة ارتفاع المبنى مع التقريب إلى أقرب قدم.

a. **تفسير المسائل** أنشئ مثلثًا قائم الزاوية باستخدام المعلومات المعطاة وسمّه (لاحظ أن الشكل غير مرسوم حسب المقياس.)

b. **التخطيط للحل** اشرح الخطوات التي يمكنك استخدامها لحل هذه المسألة.
الإجابة النموذجية: (1) استخدم نسبة ظل زاوية المماس في $\triangle RST$ لإيجاد SR (2) أوجد طول أيوب إلى النتيجة لإيجاد ارتفاع المبنى.

c. **استخدام نموذج** اشرح كيف يمكنك إيجاد طول $\overline{RS}$ مع التقريب إلى أقرب جزء من مئة. أوجد ارتفاع المبنى مقرّبًا إلى أقرب قدم.
في $\triangle RST$؛ $\tan 80° = \frac{RS}{12.2}$، إذًا $RS = 12.2 \tan 80°$ باستخدام حاسبة لإيجاد قيمة $12.2 \tan 80°$ يتبين أن $RS \approx 69.14$ يبلغ طول أيوب 1.75 m. لإيجاد ارتفاع المبنى، اجمع ذلك إلى RS. يساوي ارتفاع المبنى $69.14 + 1.75 = 71.01$ أو حوالي 71 m.

d. **التفكير بطريقة كمّية** افترض أن السطح الذي يقف عليه أيوب مستوٍ، وأنه رجع خطوات قليلة إلى الخلف حتى يبتعد عن قاعدة المبنى. فهل ستزيد أم تنخفض زاوية الارتفاع؟ لماذا لن تؤثر المسافة من المبنى على حساب الارتفاع؟
ستتناقص زاوية الارتفاع. ومع ذلك، فإن مسافة أيوب من قاعدة المبنى ستتزايد. ستكافئ هذه التغييرات بعضها البعض بحيث تبقى قيمة $ST \tan (\angle RTS)$ ثابتة.

المعايير

معايير الممارسات في الرياضيات:
1, 2, 3, 4, 6, 7, 8

المتطلبات الأساسية

- تطبيق نظرية فيثاغورس
- استخدام النسب المثلثية

مثال 1

نصيحة للتدريس

م. م. ر 1

ذكّر الطلاب بأن يكونوا دقيقين بشأن الوحدات خلال هذا الدرس. وضمن خطتهم لحل المسألة، يجب أن يدرك الطلاب بأن عليهم تحويل طول أيوب من 1.75 m إلى 12.2 m.

الأسئلة الداعمة

- هل ثمة ضلع بالمثلث $\triangle RST$ يمثل ارتفاع المبنى؟ اشرح. **لا؛ $\overline{RS}$ يقع على طول المبنى، ولكن ارتفاع المبنى هو طول $\overline{RS}$ بالإضافة إلى طول أيوب.**
- أي نسبة مثلثية ستستخدمها لحل المسألة؟ وكيف لك أن تعرف؟ **نسبة Tan؛ نحن نعلم بطول الضلع المجاور للزاوية 80° ونريد معرفة طول الضلع المقابل للزاوية 80°؛ نسبة Tan تربط أطوال هاتين الضلعين.**

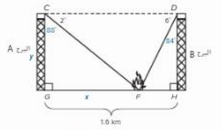
معلومات أساسية رياضية

في هذا الدرس، يطبق الطلاب نسبًا مثلثية لحل المسألة التي تتضمن زاوية الارتفاع وزاوية الانخفاض. يحتاج الطلاب للتركيز على وسم الرسوم التخطيطية بشكل صحيح وتحديد القياس المراد حسابه بالرسم. قد يلزم تحديد قياسات أخرى قبل حساب القياس المطلوب.

تستخدم بعض التطبيقات زاويتي ارتفاع أو انخفاض بالنسبة إلى المستقيم ذاته. وفي هذه الحالة، قد نحتاج إلى مثلثين لتحليلهما.

مثال 2 استخدام زوايا الانخفاض

البرجان A و B هما برجا مراقبة غابة لهما نفس الارتفاع. والمسافة بين A و B 1.6 km وقد رصد الحارسان في كلا البرجين حريقًا عند النقطة F بين البرجين. وبالنسبة للحارس في البرج A، تبلغ زاوية الانخفاض تجاه الحريق 2°. وبالنسبة للحارس في البرج B، تبلغ زاوية الانخفاض تجاه الحريق 6°. ويريد الحارسان معرفة المسافة من قاعدة كل برج إلى الحريق، مع التقريب إلى أقرب متر.



a. **استخدام البنية** اشرح كيفية إيجاد $m\angle GCF$ و $m\angle HDF$ عين قياسات هاتين الزاويتين في الشكل.

$\overline{CD}$ أفقي، $\angle GCD$ و $\angle HDC$ زوايا قائمة، إذًا $\angle GCF$ متممة لـ $\angle DCF$ و $\angle HDF$ متممة لـ $\angle CDF$. إذًا، $m\angle GCF = 88$ و $m\angle HDF = 84$

b. **استخدام نموذج** عيّن المسافة بالمتر من قاعدة البرج A إلى نقطة الحريق x. عيّن ارتفاع كل برج بالمتر y. استخدم نسبة مثلثية في $\triangle GCF$ لكتابة معادلة تربط بين x و y. ثم استخدم نسبة مثلثية في $\triangle HDF$ لكتابة معادلة تربط بين x و y. أوجد حلّ كل من المعادلتين للحصول على قيمة y. اشرح كيف يمكنك استخدام المعادلتين لإيجاد قيمة x.

في $\triangle GCF$؛ $\tan 88° = \frac{x}{y}$ أو $y = \frac{x}{\tan 88°}$؛ في $\triangle HDF$، $\tan 84° = \frac{1600-x}{y}$ أو $y = \frac{1600-x}{\tan 84°}$.

بالتعويض، $\frac{1600-x}{\tan 84°} = \frac{x}{\tan 88°}$. في التناسب، تكون نواتج الضرب التقاطعي متساوية، إذًا

$(1600 - x)\tan 88° = x\tan 84°$ بحسب خاصية التوزيع، $x\tan 84° = 1600 \tan 88° - x\tan 88°$.

إذًا، $x\tan 84° + x\tan 88° = 1600 \tan 88°$ و $x(\tan 84° + \tan 88°) = 1600 \tan 88°$.

بالقسمة لإيجاد قيمة x: $x = \frac{1600 \tan 88°}{\tan 84° + \tan 88°} \approx 1201$ m

c. **التفكير بطريقة كمية** ما المسافة من قاعدة كل برج إلى الحريق؟

تساوي المسافة من قاعدة البرج A إلى نقطة الحريق 1.2 km تساوي المسافة من قاعدة البرج B إلى نقطة الحريق $1600 - 1201 = 399$ m.

d. **تقويم مدى صحة الحل** كيف تعرف أن المسافات التي توصلت إليها صحيحة؟

الإجابة النموذجية: يكون البعد بين نقطة الحريق والبرج A أكبر من البعد عن البرج B، وهو منطقي حيث إن زاوية الانخفاض من البرج A أصغر من زاوية الانخفاض من البرج B.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

ثمة جزء من الممارسة **م.م.ر 2 (التفكير بطريقة تجريدية وكميّة)** يختص بمعرفة كيفية ووقت استخدام الرموز التي تمثل مواقف الحياة اليومية. **المثال 2** يوصلنا للمعادلة. $\frac{5280-x}{\tan 84°} = \frac{x}{\tan 88°}$، والتي قد تبدو معقدة قليلاً للطلاب. قبل البدء باستخدام الرموز لحل x، يجب تذكيرهم بأن $\tan 88°$ و $\tan 84°$ ثوابت. إن كان يصعب على الطلاب بدء عملية الحل، فاقترح عليهم التركيز على صيغة المعادلة. فصيغة المعادلة هي $\frac{\square - x}{\square} = \frac{x}{\square}$، حيث إن كل مربع يمثل عددًا حقيقيًا. فبالنظر للمعادلة بهذه الطريقة قد يسهل على الطلاب ملاحظة الخطوات التي يجب اتخاذها لحل x

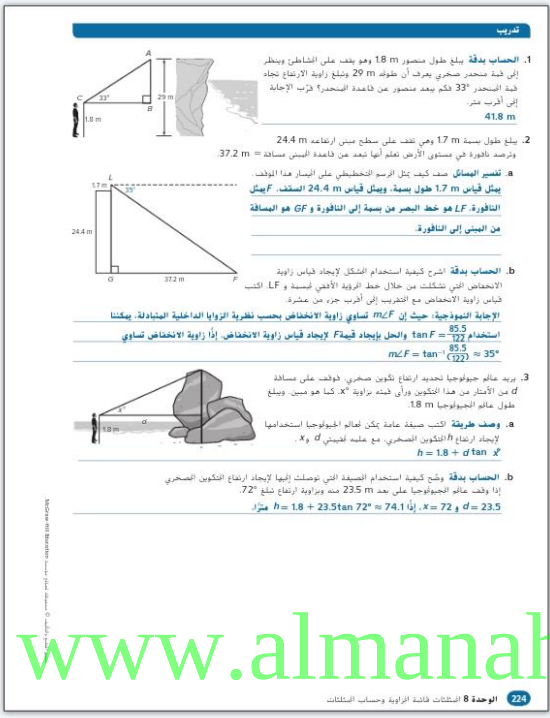
مثال 2

نصيحة للتدريس م.م.ر 4

في هذه المسألة، الشكل والمعادلة اللتان يكتبهما الطلاب يمثلان موقفًا من الحياة اليومية. شجّع الطلاب على التفاعل مع النموذج خلال عملية الحل. على سبيل المثال، أثناء عملهم على **الجزء b**، قد يحدد الطلاب الشكل ليظهر أن x يمثل طول $\overline{GF}$ و $5280 - x$ يمثل طول $\overline{FH}$.

الأسئلة الداعمة

- في **الجزء b**، أي نسبة مثلثية ستستخدمها لكتابة المعادلة؟ ولماذا؟ **نسبة Tan؛ فإن ارتفاع البرج هو طول الضلع المجاور للزاوية المعروفة والمسافة من البرج للحريق هي طول الضلع المقابل للزاوية المعروفة؛ فإن نسبة Tan تُمثل ارتباطًا بين أطوال هاتين الضلعين.**
- إذا علمت أن $\tan 88° = \frac{x}{y}$، كيف تحل y؟ **اضرب طرفي المعادلة في y. ثم اقسم طرفي المعادلة على $\tan 88°$.**



تدريب

1. **الحساب بدقّة** يبلغ طول منصور 1.8 m وهو يقف على الشاطئ وينظر إلى قمة منحدر صخري يعرف أن طوله 29 m وتبلغ زاوية الارتفاع تجاه قمة المنحدر 33° فكم يبعد منصور عن قاعدة المنحدر؟ قرّب الإجابة إلى أقرب متر.
41.8 m

2. يبلغ طول بسمة 1.7 m وهي تقف على سطح مبنى ارتفاعه 24.4 m وترصد نافورة في مستوى الأرض تعلم أنها تبعد عن قاعدة المبنى مسافة = 37.2 m.

a. **تفسير المسائل** صف كيف يمثل الرسم التخطيطي على اليسار هذا الموقف.
يمثل قياس 1.7 m طول بسمة، ويمثل قياس 24.4 m السقف. F يمثل النافورة. LF هو خط البصر من بسمة إلى النافورة و GF هو المسافة من المبنى إلى النافورة.

b. **الحساب بدقّة** اشرح كيفية استخدام الشكل لإيجاد قياس زاوية الانخفاض التي تشكلت من خلال خط الرؤية الأفقي لبسمة و LF. اكتب قياس زاوية الانخفاض مع التقريب إلى أقرب جزء من عشرة.
الإجابة النموذجية: حيث إن $m\angle F$ تساوي زاوية الانخفاض بحسب نظرية الزوايا الداخلية المتبادلة، يمكننا استخدام $\tan F = \frac{85.5}{122}$ والحل بإيجاد قيمة F لإيجاد قياس زاوية الانخفاض. إذًا زاوية الانخفاض تساوي $m\angle F = \tan^{-1}\left(\frac{85.5}{122}\right) \approx 35°$

3. يريد عالم جيولوجيا تحديد ارتفاع تكوين صخري. فوقف على مسافة d من الأمتار من هذا التكوين ورأى قمته بزاوية $x°$، كما هو مبين. ويبلغ طول عالم الجيولوجيا 1.8 m.

a. **وصف طريقة** اكتب صيغة عامة يمكن لعالم الجيولوجيا استخدامها لإيجاد ارتفاع h التكوين الصخري، مع علمه لقيمتي d و x.
$h = 1.8 + d \tan x°$

b. **الحساب بدقّة** وضّح كيفية استخدام الصيغة التي توصلت إليها لإيجاد ارتفاع التكوين الصخري إذا وقف عالم الجيولوجيا على بعد 23.5 m منه وبزاوية ارتفاع تبلغ 72°.
$d = 23.5$ و $x = 72$. إذًا $h = 1.8 + 23.5\tan 72° \approx 74.1$ مترًا.

تمرين

التمرينان 1 و 2 يُوفران للطلاب فرصة التمرّن من خلال حل المثلثات القائمة مستخدمين زاوية ارتفاع واحدة أو زاوية انخفاض واحدة.

في **التمرين 3**، يجب أن يستخدم الطلاب النسب المثلثية لحل زاوية الانخفاض.

في **التمرين 4**، يتمرن الطلاب من خلال حل مثلث قائم مستخدمين النسب المثلثية.

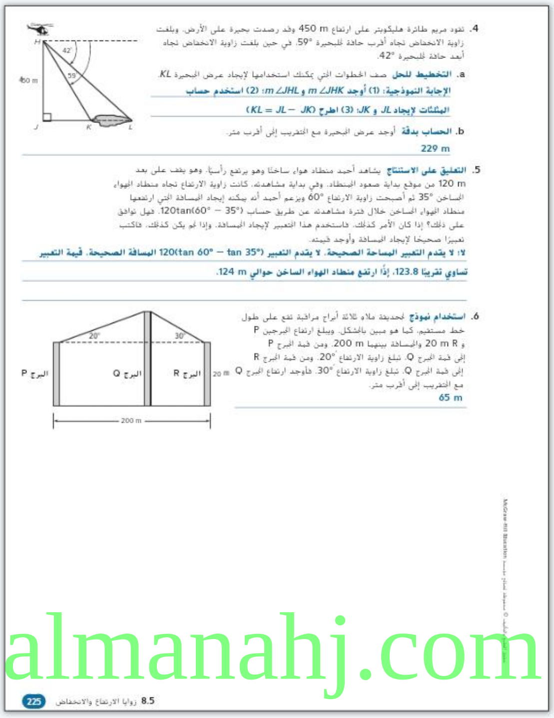
التمرينات من 5 إلى 8 هي مسائل أكثر تعقيدًا تتضمن زاويتي ارتفاع أو زاويتي انخفاض. يجب أن يحل الطلاب هذه المسائل مستخدمين النسب المثلثية والمثلثات القائمة.

عرض المعايير

تمرين	م.م.ر
1	4, 8
2	6
3	1, 6
4	6, 8
5	1, 6
6	3
7	4, 6
8	4

أخطاء شائعة

في **التمرين 2**، قد يستخدم الطلاب حساب المثلثات الصحيح في $\triangle ABC$، ولكن قد ينسوا طرح 1.8 m من 29 m لحساب طول $\overline{AB}$. فالطلاب الواقعون بهذا الخطأ قد يحصلون على ناتج 57 m بدلاً من 53 m. قد يكون من الجيد أن يتبادل الطلاب الأوراق والتحقق من إجابات بعضهم البعض. إن كانت هناك اختلافات بأجوبتهم، فاطلب منهم شرح عمليات الحل لبعضهم البعض حتى يتسنى لهم تحديد الأخطاء التي وقعت.



4. تقود مريم طائرة هليكوبتر على ارتفاع 450 m وقد رصدت بحيرة على الأرض. وبلغت زاوية الانخفاض تجاه أقرب حافة للبحيرة $59°$، في حين بلغت زاوية الانخفاض تجاه أبعد حافة للبحيرة $42°$.

a. **التخطيط للحل** صف الخطوات التي يمكنك استخدامها لإيجاد عرض البحيرة KL.
الإجابة النموذجية: (1) أوجد $m\angle JHK$ و $m\angle JHL$؛ (2) استخدم حساب المثلثات لإيجاد JL و JK؛ (3) اطرح $(KL = JL - JK)$

b. **الحساب بدقة** أوجد عرض البحيرة مع التقريب إلى أقرب متر.
229 m

5. **التعليق على الاستنتاج** يشاهد أحمد منطاد هواء ساخنًا وهو يرتفع رأسيًا. وهو يقف على بعد 120 m من موقع بداية صعود المنطاد. وفي بداية مشاهدته، كانت زاوية الارتفاع تجاه منطاد الهواء الساخن $35°$ ثم أصبحت زاوية الارتفاع $60°$ ويزعم أحمد أنه يمكنه إيجاد المسافة التي ارتفعها منطاد الهواء الساخن خلال فترة مشاهدته عن طريق حساب $120\tan(60° - 35°)$. فهل توافق على ذلك؟ إذا كان الأمر كذلك، فاستخدم هذا التعبير لإيجاد المسافة. وإذا لم يكن كذلك، فاكتب تعبيرًا صحيحًا لإيجاد المسافة وأوجد قيمته.
لا؛ لا يقدم التعبير المساحة الصحيحة. لا يقدم التعبير $120(\tan 60° - \tan 35°)$ المسافة الصحيحة. قيمة التعبير تساوي تقريبًا 123.8. إذًا ارتفع منطاد الهواء الساخن حوالي 124 m.

6. **استخدام نموذج** لحديقة ملاه ثلاثة أبراج مراقبة تقع على طول خط مستقيم، كما هو مبين بالشكل. ويبلغ ارتفاع البرجين P و R 20 m والمسافة بينهما 200 m. ومن قمة البرج P إلى قمة البرج Q، تبلغ زاوية الارتفاع $20°$. ومن قمة البرج R إلى قمة البرج Q، تبلغ زاوية الارتفاع $30°$. فأوجد ارتفاع البرج Q مع التقريب إلى أقرب متر.
65 m

أخطاء شائعة

في **التمرين 5**، قد يحاول بعض الطلاب حساب طول $\overline{KL}$ باستخدام نسبة مثلثية واحدة، مثل $\tan 17° = \frac{KL}{450}$. وضح أنه على الرغم من أن $m\angle KHL$ تساوي $17°$، فإن $\triangle KHL$ ليس مثلثًا قائمًا، لذا لا نطبق النسب المثلثية. ذكر الطلاب بضرورة العمل بالمثلثات القائمة بالشكل ($\triangle JHK$ و$\triangle KHL$) إن أرادوا تطبيق النسب المثلثية.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

الممارسة م.م.ر 3 (بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين) تصف أهمية التمكن من إدراك الاستنتاج الخاطئ. في **التمرين 6**، التعبير الصحيح لمسافة ارتفاع منطاد الهواء الساخن هو $120(\tan 60° - \tan 35°)$. قد يفترض بعض الطلاب أن هذا مساوٍ للتعبير المقدم بالمسألة، $120\tan(60° - 35°)$. شجع الطلاب على استخدام الآلات الحاسبة للتحقق من صحة هذا الأمر. ينبغي أن يؤدي العمل المنجز من الطلاب بالمسألة إلى تنبيههم لحقيقة أن الدوال المثلثية ليست خطية. وبوجه عام، $\tan(a \pm b) \neq \tan a \pm \tan b$. سيستكشف الطلاب مجاميع واختلافات هذه الدوال المثلثية على نحو أكثر دقة في الجبر 2.

8 مهمة تقويم الأداء

مهمة تقويم الأداء

طرق متعددة للارتفاع

قدّم حلاً واضحًا للمسألة. تأكد من توضيح كل خطواتك، وضمّن كل الرسومات ذات الصلة، وعلّل إجاباتك.

في مشروع مدرسي، يُطلب من زملائك في الصف الدراسي قياس ارتفاع مبنى مدرسة. ومن ثم، فإنهم يستخدمون طرقًا مختلفة لإيجاد الارتفاع. تخيّل نفسك معلمًا وقم بالتعليق على كل من هذه الطرق.

الجزء A

يقيس طالب ظل المدرسة وظله وطوله، ويتوصل إلى التناسب التالي.

$$\frac{\text{ظل المدرسة}}{\text{ظلي}} = \frac{\text{ارتفاع المدرسة}}{\text{طولي}}$$

طرق متعددة للارتفاع

سيستخدم الطلاب معرفتهم بزوايا الارتفاع والمهارات الأخرى أثناء تقدمهم للاستنتاج المقدم.

المعايير

معايير الممارسات الرياضية: تدعم مهمة تقويم الأداء بالوحدة 8 الممارسات الرياضية **م.م.ر 2**، **م.م.ر 3**، **م.م.ر 4**، **م.م.ر 5**.

بداية سريعة

قبل أن يبدأ الطلاب، راجع زوايا الارتفاع:

- ماذا تمثل زاوية الارتفاع؟ **هي زاوية تتكون من خط أفقي وخط نظر المراقب تجاه هدف أعلى الخط الأفقي.**
- عند حساب ارتفاع هدف باستخدام زوايا الارتفاع، ماذا يجب ألا نتجاهله؟ **ارتفاع المراقب**

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

توفر مهمة تقويم الأداء هذه ارتباطًا طبيعيًا مع الممارسة **م.م.ر 3** **(بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين)**. أحيانًا، قد يحدث ارتباك من استنتاجات الآخرون. ذكر الطلاب بالتفكير الدقيق في جميع الأشكال الموضحة عند محاولة فهم استنتاج. ويجب عليهم أيضًا أن يحاولوا حل الارتفاع بنفسهم أولاً ومقارنة طريقتهم مع طرق زملائهم.

نصيحة للتدريس م. م. ر 2

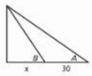
قد يصعب على الطلاب مستوى التفكير التجريدي في هذه المسألة. فكر في جعل الطلاب يستخدموا الأعداد الحقيقية إن ساعدهم ذلك على حل المعادلات.

التدريس المتمايز

قد ترغب في استكشاف وَسْم كل مثلث داخل الرسم التخطيطي. اجعل الطلاب يفكروا فيما إذا كان الضلع متجاورًا مع الزاوية، أم مقابلاً لها، أم مقابلاً للوتر.

الجزء B

تقيس طالبة أخرى زاوية الارتفاع عند النقطة A، ثم (بعد التحرك لمسافة أقرب بمقدار 30 m) أصبحت زاوية الارتفاع عند النقطة B وهي تستخدم المنطق التالي.



$\tan A = \frac{\text{الضلع المقابل}}{(30 + x)}$; $\tan B = \frac{\text{الضلع المقابل}}{x}$

$30 \tan A + x \tan A =$ الضلع المقابل؛ $x \tan B =$ الضلع المقابل

$30 \tan A + x \tan A = x \tan B$

$30 \tan A = x \tan B - x \tan A$

$30 \tan A = x(\tan B - \tan A)$

إذًا، يبلغ ارتفاع المبنى $\frac{30 \tan A}{(\tan B - \tan A)}$

الجزء C

يمشي طالب مسافة 30 m من أسفل المبنى، ويجد زاوية الارتفاع A باتجاه قمة المبنى، ويكتب المعادلة التالية.

$\tan A = \frac{x}{30}$

إذًا $x = \frac{\tan A}{30}$.

معايير رصد الدرجات

الجزء	أحمد النقاط	إجابة تستحق الدرجة الكاملة
A	3	تم ضبط التناسب بطريقة صحيحة ولدى الطالب تناسب واحد فقط غير معروف. تلك طريقة صحيحة لإيجاد ارتفاع مبنى ما.
B	3	ما وجده الطالب هو المسافة من رأس الزاوية B إلى قاعد المبنى. فيمكنه حينها استخدام ذلك إلى جانب $\tan B$ لإيجاد ارتفاع المبنى، ولكنه نسي هذه الخطوة.
C	3	أهمل الطالب جمع ارتفاع المراقب. تم حساب زاوية الارتفاع من خط نظر المراقب، لذا فلا بد من جمع ارتفاع المراقب أيضًا.
الإجمالي	9	

8 مهمة تقويم الأداء

تبسيط المسائل

سيستخدم الطلاب معرفتهم بالزوايا القائمة الخاصة وحساب المثلثات لإيجاد الطول المفقود.

المعايير

معايير الممارسات الرياضية: تدعم مهمة تقويم الأداء بالوحدة 8 الممارسات الرياضية م.م.ر 1، م.م.ر 2، م.م.ر 5، م.م.ر 6.

بداية سريعة

قبل بدء الطلاب الحساب في **الجزء A**، اجعلهم يختبروا الشكل لرؤية ما إذا استطاعوا تكوين أي ملاحظات عامة.

- ماذا لاحظت بشأن المثلثات عند النظر إلى العلامات المعطاة؟ **جميع المثلثات قائمة.**
- كيف يساعدك ذلك على بدء الحسابات؟ **يمكن استخدام المعلومات المعطاة لتطبيق العلاقات المثلثية أو معرفتنا بالمثلثات القائمة الخاصة لإيجاد القياسات المفقودة أثناء حل الطلاب x.**

مهمة تقويم الأداء

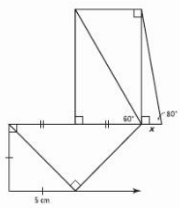
تبسيط المسائل

قدّم حلاً واضحًا للمسألة. تأكد من توضيح كل خطواتك، وضمّن كل الرسومات ذات الصلة، وعلّل إجاباتك.

في بعض الأحيان، قد يبدو إيجاد قياس مجهول أمرًا صعبًا. إذا كانت المعلومات المعطاة قليلة للغاية. ومع ذلك، إذا قسمت المسألة إلى أجزاء أصغر، فقد تجدها أسهل مما تبدو عليه. استفد من المعلومات التي اكتسبتها عن المثلثات قائمة الزاوية لإيجاد القيمة الناقصة.

الجزء A

أوجد قيمة x. أعطِ القيمة الدقيقة بالإضافة إلى قيمة تقريبية.



التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

توفر مهمة تقويم الأداء هذه رابط طبيعي مع الممارسة **م.م.ر 2 (التفكير بطريقة تجريدية وكميّة)**. وهنا، يُطلب من الطلاب تحديد المعلومات التي يجب معرفتها أولاً لإيجاد الحل الصحيح. يتسنى للطلاب استكشاف مسارات مختلفة لحل x.

نصيحة للتدريس م. م. ر 1

قد يصعب على الطلاب الاجتهاد في حل المسائل متعددة الخطوات. قد يكون صعبًا على بعض الطلاب قلة القياسات وعدم معرفة عدد الخطوات المطلوبة. شجعهم على التفكير في المعلومات التي يحتاجونها والحل بترتيب عكسي لحل المسألة.

أخطاء شائعة

تحقق من الأخطاء أثناء إيجاد أطوال أضلاع مثلثات قياسها $30°$ و $60°$ و $90°$. قد يتذكر الطلاب المعامل $\sqrt{3}$، ولكن يكتبون المعكوس الضربي لطول الساق المطلوب.

الجزء B

اشرح الخطوات التي استخدمتها لحساب x. برّر كل خطوة.

الجزء C

هل هناك أي مثلثات متشابهة في الشكل؟ اشرح.

الجزء D

في المثلث الذي به زاوية قياسها $80°$. هل من الممكن توقع نسبة الوتر إلى x لتكون أكبر من أو أقل من 2:1؟ اشرح استنتاجك.

معايير رصد الدرجات

الجزء	النقاط القصوى	إجابة تستحق الدرجة الكاملة
A	2	$x = \frac{5\sqrt{3}}{\tan 80°} \approx 1.53$ وحدة
B	2	استخدمتُ نظرية فيثاغورس لإيجاد وتر الطول $5\sqrt{2}$. ثم استخدمتها مرة أخرى لإيجاد وتر الطول 10. بحيث يكون المثلث بقياس $30°$ و $60°$ و $90°$ له أطوال ساقيْن 5 و $5\sqrt{3}$. والمتطابق مع المثلث المجاور بقياس $30°$ و $60°$ و $90°$ بمعايير التطابق. بالنهاية، فإن الضلع المقابل للزاوية $80°$ يساوي $5\sqrt{3}$ والضلع المجاور x. إذًا $\tan 80° = \frac{5\sqrt{3}}{x}$. إذًا $x = \frac{5\sqrt{3}}{\tan 80°} \approx 1.53$ وحدة.
C	2	نعم. جميع المثلثات بقياس $45°$ و $45°$ و $90°$ مشابهة لبعضها، وجميع المثلثات بقياس $30°$ و $60°$ و $90°$ مشابهة لبعضها.
D	2	الإجابة النموذجية: أتوقع أن تكون النسبة أكبر من 2:1 لأن الزاوية $10°$ تتناسب بالزاوية $30°$. لذا يكون الضلع المقابل أقصر من الزاوية $10°$.
الإجمالي	8	

تدريب على الاختبارات المعيارية

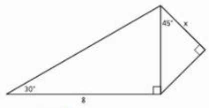
تشخيص الأخطاء

إن الطلاب الذين جاوبوا على **الفقرة 3** بطريقة غير صحيحة قد يكون من الصعب عليهم فهم العلاقات بين المثلثات الثلاثة المتشابهة. من أجل تبسيط إعداد التناسب المناسب، اجعل الطلاب يرسموا ثلاثة مثلثات منفصلة، وأن يحرصوا على تسمية الأضلاع بشكل صحيح.

والطلاب الذين أعطوا 70.7° في درجات آخر خط في **الفقرة 8**، فقد يكونوا قد حسبوا الزاوية بأنها زاوية جنوب من شرق بدلاً من زاوية شرق من جنوب. أكد على أن هذه الزوايا متساوية، ولكن بما أن المسألة تطلب تقديم الزاوية بأنها زاوية شرق من جنوب، فإن 70.7° ليست الإجابة الصحيحة.

تدريب على الاختبارات المعيارية

1. أوجد القيمة الدقيقة لـ x في الرسم التخطيطي التالي.



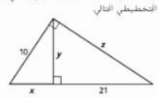
$x =$ $\boxed{\frac{8\sqrt{3}}{3}}$

2. في $\triangle ABC$ ‏$m\angle A = 82$ و $AB = 6$ و $BC = 11$
أوجد ناتج ما يلي، مع تقريب الإجابات إلى أقرب جزء من عشرة.

$m\angle B = \boxed{65.3}$ $m\angle C = \boxed{32.7}$

$AC = \boxed{10.1}$

3. أوجد القيم الدقيقة لكل من x و y و z في الرسم التخطيطي التالي.



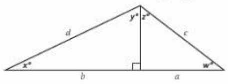
$x = \boxed{4}$ $y = \boxed{2\sqrt{21}}$

$z = \boxed{5\sqrt{21}}$

4. الشعار المعلق على باب إحدى شركات ألعاب الفيديو عبارة عن مثلث متساوي الأضلاع ارتفاعه 10 cm. ويبلغ المحيط الدقيق للشعار $\boxed{20\sqrt{3}}$ cm.

5. تنظر مها من نافذة ترتفع عن سطح الأرض بمسافة 58 m وهي ترى منزلها. وتبلغ زاوية الانخفاض 27°. ومع التقريب إلى أقرب جزء من عشرة، فإن منزل مها يبعد عن المبنى الذي تنظر من نافذته بمقدار $\boxed{113.8}$ m.

6. يمثل الرسم التخطيطي جمالون سقف مصمماً لمقصورة حديقة.



حدد التعابير المكافئة لـ d.

$\frac{\sin(y)}{b}$	$\boxed{\frac{c\sin(w)}{\sin(x)}}$
$\boxed{\frac{b}{\cos(x)}}$	$(a+b)\sin(w)$
$\sqrt{(a+b)^2-c^2}$	
$(a+b)^2+c^2-2c(a+b)\cos(w)$	

7. في $\triangle DEF$، ‏$DE = 8$ و $EF = 11$ و $DF = 17$
فأوجد ناتج ما يلي، مع تقريب الإجابات إلى أقرب جزء من عشرة.

$m\angle D = \boxed{31.5}$ $m\angle E = \boxed{126.2}$

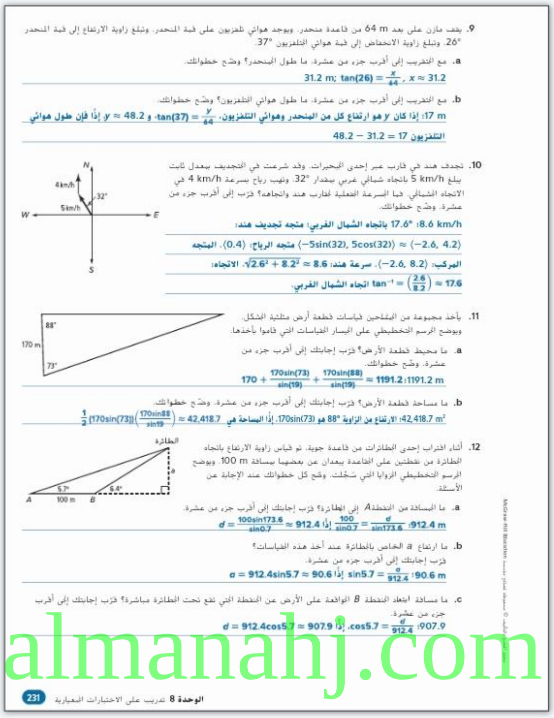
$m\angle F = \boxed{22.3}$

8. أكمل المعلومات الناقصة لكل متجه في الجدول التالي. قرّب إجاباتك إلى أقرب جزء من عشرة.

صورة مركبة	المقدار	الاتجاه	
		الدرجات	اتجاه الخريطة
(14.2, 11.1)	18	52°	شمال شرقي
⟨−5, 8⟩	9.4	58.0°	شمال غربي
(−4.0, −12.4)	13	18°	جنوب غربي
⟨7, −20⟩	21.2	19.3°	جنوب شرقي

إستراتيجية خوض الاختبار

بالنسبة لأسئلة زاوية الانخفاض مثل **الفقرة 5**، فمن المهم تصميم رسم تخطيطي للمساعدة على تحديد العلاقات الصحيحة التي ستستخدم في حل المسألة.



9. يقف مازن على بعد 64 m من قاعدة منحدر. ويوجد هوائي تلفزيون على قمة المنحدر. وتبلغ زاوية الارتفاع إلى قمة المنحدر 26°، وتبلغ زاوية الانخفاض إلى قمة هوائي التلفزيون 37°.

a. مع التقريب إلى أقرب جزء من عشرة، ما طول المنحدر؟ وضّح خطواتك.

31.2 m; $\tan(26) = \frac{x}{64}$, $x \approx 31.2$

b. مع التقريب إلى أقرب جزء من عشرة، ما طول هوائي التلفزيون؟ وضّح خطواتك.

17 m؛ إذا كان y هو ارتفاع كل من المنحدر وهوائي التلفزيون، $\tan(37) = \frac{y}{64}$، و $y \approx 48.2$. إذًا فإن طول هوائي التلفزيون $48.2 - 31.2 = 17$

10. تجدف هند في قارب عبر إحدى البحيرات. وقد شرعت في التجديف بمعدل ثابت يبلغ 5 km/h باتجاه شمالي غربي بمقدار 32°. وتهب رياح بسرعة 4 km/h في الاتجاه الشمالي. فما السرعة الفعلية لقارب هند واتجاهه؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة. وضّح خطواتك.

8.6 km/h؛ 17.6° باتجاه الشمال الغربي؛ متجه تجديف هند: $\langle -5\sin(32), 5\cos(32)\rangle \approx \langle -2.6, 4.2\rangle$؛ متجه الرياح: $\langle 0.4\rangle$. المتجه المركب: $\langle -2.6, 8.2\rangle$. سرعة هند: $\sqrt{2.6^2 + 8.2^2} \approx 8.6$. الاتجاه: $\tan^{-1} = \left(\frac{2.6}{8.2}\right) \approx 17.6$ اتجاه الشمال الغربي.

11. يأخذ مجموعة من المتلقحين قياسات قطعة أرض مثلثة الشكل. ويوضح الرسم التخطيطي على اليسار القياسات التي قاموا بأخذها.

a. ما محيط قطعة الأرض؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة. وضّح خطواتك.

1191.2 m؛ $170 + \frac{170\sin(73)}{\sin(19)} + \frac{170\sin(88)}{\sin(19)} \approx 1191.2$

b. ما مساحة قطعة الأرض؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة. وضّح خطواتك.

42,418.7 m²؛ الارتفاع من الزاوية 88° هو $170\sin(73)$. إذًا المساحة هي $\frac{1}{2}(170\sin(73))\left(\frac{170\sin 88}{\sin 19}\right) \approx 42{,}418.7$

12. أثناء اقتراب إحدى الطائرات من قاعدة جوية، تم قياس زاوية الارتفاع باتجاه الطائرة من نقطتين على القاعدة يبعدان عن بعضهما بمسافة 100 m. ويوضح الرسم التخطيطي الزوايا التي سُجّلت. وضّح كل خطواتك عند الإجابة عن الأسئلة.

a. ما المسافة من النقطة A إلى الطائرة؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

912.4 m؛ $\frac{100}{\sin 0.7} = \frac{d}{\sin 173.6}$ إذًا $d = \frac{100\sin 173.6}{\sin 0.7} \approx 912.4$

b. ما ارتفاع a الخاص بالطائرة عند أخذ هذه القياسات؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

90.6 m؛ $\sin 5.7 = \frac{a}{912.4}$ إذًا $a = 912.4\sin 5.7 \approx 90.6$

c. ما مسافة ابتعاد النقطة B الواقعة على الأرض عن النقطة التي تقع تحت الطائرة مباشرة؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

907.9؛ $\cos 5.7 = \frac{d}{912.4}$ إذًا $d = 912.4\cos 5.7 \approx 907.9$

الوحدة 8 تدريب على الاختبارات المعيارية 231

إستراتيجية خوض الاختبار

لتجنب أخطاء التقريب في المسائل متعددة الخطوات مثل **الفقرة 11**. يجب ألا يقرب الطلاب حتى الوصول لإجابة نهائية. قد يكون من المفيد أن يكتب الطلاب تعبيرات لكل خطوة وسيطة لمساعدتهم على تنظيم فكرهم.

تشخيص الأخطاء

بالنسبة للطلاب المقدمين لمساحة خاطئة **للفقرة 11b**. قد لا يكونوا قد حسبوا ارتفاع المثلث. وضّح لهم أن هذا ليس مثلثًا قائمًا. لذا يجب حساب الارتفاع باستخدام حساب المثلثات لإيجاد المساحة باستخدام قاعدة مساحة المثلث المعياري.

العناوين

الفقرة 9

[4] إجابة صحيحة للجزأين مع توضيح الخطوات

[3] إجابة صحيحة للجزأين، ولكن مع توضيح الخطوات بشكل جزئي

[2] إجابة صحيحة للجزأين مع توضيح القليل من الخطوات أو لا توجد خطوات أو إجابة غير صحيحة **للجزء a** والمستخدم بشكل صحيح في **الجزء b**

[1] إجابة صحيحة لجزء واحد مع توضيح القليل من الخطوات أو لا توجد خطوات

[0] لا توجد إجابة أو أن الإجابة وطريقة التفكير خطأ

الفقرة 10

[3] إجابة صحيحة وجميع الخطوات موضحة

[2] خطأ بسيط في الحساب أو إجابة صحيحة ولكن الخطوات غير مكتملة

[1] إجابة صحيحة دون خطوات موضحة أو أخطاء كبيرة في الحسابات

[0] لا توجد إجابة أو أن الإجابة والخطوات خطأ

الجزء 11

[4] إجابة صحيحة للطرفين مع توضيح الخطوات

[3] إجابة صحيحة للجزأين، ولكن مع توضيح الخطوات بشكل جزئي

[2] إجابة صحيحة للجزأين مع توضيح القليل من الخطوات أو لا خطوات

[1] إجابة صحيحة لجزء واحد مع توضيح القليل من الخطوات أو لا توجد خطوات

[0] لا توجد إجابة أو أن الإجابة وطريقة التفكير خطأ

الجزء 12

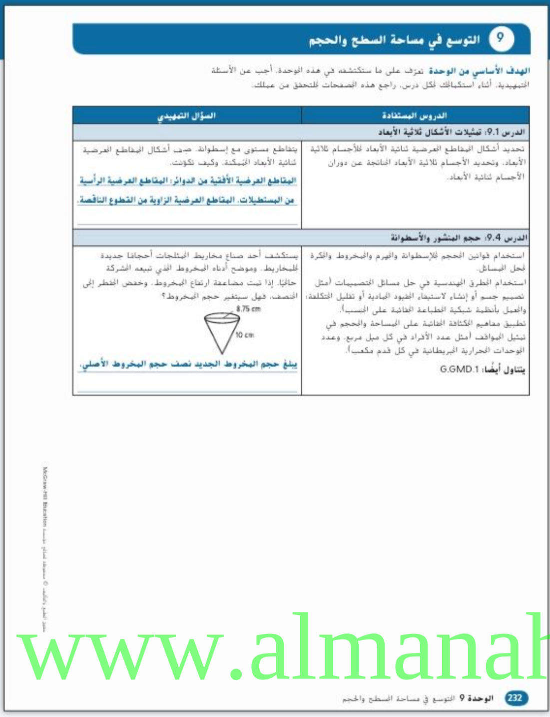
[4] إجابة صحيحة لجميع الأجزاء مع توضيح الخطوات

[3] إجابة صحيحة لجميع الأجزاء، ولكن مع توضيح الخطوات بشكل جزئي

[2] إجابة صحيحة لجميع الأجزاء مع توضيح القليل من الخطوات أو لا توجد خطوات أو إجابة غير صحيحة **للجزء a** والمستخدم بشكل صحيح في **الجزأين b** و **c**

[1] إجابة صحيحة لجزء واحد مع توضيح القليل من الخطوات أو لا توجد خطوات

[0] لا توجد إجابة أو أن الإجابة وطريقة التفكير خطأ



9 التوسع في مساحة السطح والحجم

الهدف الأساسي من الوحدة تعرّف على ما ستكتشفه في هذه الوحدة. أجب عن الأسئلة التمهيدية. أثناء استكمالك لكل درس، راجع هذه الصفحات للتحقق من عملك.

الدروس المستفادة	السؤال التمهيدي
الدرس 9.1: تمثيلات الأشكال ثلاثية الأبعاد	
تحديد أشكال المقاطع العرضية ثنائية الأبعاد للأجسام ثلاثية الأبعاد، وتحديد الأجسام ثلاثية الأبعاد الناتجة عن دوران الأجسام ثنائية الأبعاد.	يتقاطع مستوى مع إسطوانة. صف أشكال المقاطع العرضية ثنائية الأبعاد الممكنة، وكيف تكوّنت. **المقاطع العرضية الأفقية من الدوائر؛ المقاطع العرضية الرأسية من المستطيلات. المقاطع العرضية الزاوية من القطوع الناقصة.**
الدرس 9.4: حجم المنشور والأسطوانة	
استخدام قوانين الحجم للإسطوانة والهرم والمخروط والكرة لحل المسائل. استخدام الطرق الهندسية في حل مسائل التصميمات (مثل تصميم جسم أو إنشاء لاستيفاء القيود المادية أو تقليل التكلفة؛ والعمل بأنظمة شبكية الطباعة القائمة على النسب). تطبيق مفاهيم الكثافة القائمة على المساحة والحجم في تمثيل المواقف (مثل عدد الأفراد في كل ميل مربع، وعدد الوحدات الحرارية البريطانية في كل قدم مكعب). **يتناول أيضًا:** G.GMD.1	يستكشف أحد صناع مخاريط المثلجات أحجامًا جديدة للمخاريط. ويوضح أدناه المخروط الذي تبيعه الشركة حاليًا. إذا تمت مضاعفة ارتفاع المخروط، وخفض القطر إلى النصف، فهل سيتغير حجم المخروط؟ 8.75 cm 10 cm **يبلغ حجم المخروط الجديد نصف حجم المخروط الأصلي.**

9 الهدف الأساسي من الوحدة

استخدام *دليل الطالب التفاعلي*

يمكن استخدام *دليل الطالب التفاعلي* (ISG) إلى جانب *الرياضيات للصف العاشر المسار العام*.

درس دليل الطالب التفاعلي	*الرياضيات للصف 10 المسار العام*
9.1	الدرس 9-1
9.4	الدرس 9-4
9.5	الدرس 9-5
9.6	الدرس 9-6
9.5	الوحدة 9

نصيحة للتدريس

م.م.ر 6

يمكن من خلال السؤال التمهيدي للدرس 9.1 تقديم أحد نماذج **م.م.ر 6 (مراعاة الدقة)**. ابدأ بأن تطلب من الطلاب تصور الطرق المختلفة المحتملة لتقاطع المستوى مع إسطوانة. ويستطيع الطلاب تمثيل المسألة بعمل نموذج من الصلصال للإسطوانة واستخدام أداة مسطحة لتقطيع الإسطوانة بزوايا مختلفة.

الدروس المستفادة	السؤال التمهيدي
الدرس 9.5: حجم الأشكال الهرمية والمخروطية	
تقديم فرضية غير رسمية لصيغ محيطات الدوائر ومساحة الدائرة وأحجام الإسطوانة والهرم والمخروط. استخدام قوانين الحجم للإسطوانة والهرم والمخروط والكرة لحل المسائل. تطبيق مفاهيم الكثافة القائمة على المساحة والحجم في تمثيل المواقف (مثل عدد الأفراد في كل كيلو متر مربع، وعدد الوحدات الحرارية البريطانية في كل متر مكعب). استخدام الطرق الهندسية في حل مسائل التصميمات (مثل تصميم جسم أو إنشاء لاستيفاء القيود المادية أو تقليل التكلفة؛ والعمل بأنظمة شبكية الطباعة القائمة على النسب).	يبلغ قطر قطعة النقد المعدنية من فئة 25 فلسًا 24.26 mm وسمكها 1.75 mm. اشرح كيفية استخدام مبدأ كافالييري في إيجاد حجم مجموعة مصفوفة من 28 قطعة النقد المعدنية من فئة 25 فلسًا. **حجم المجموعة المصفوفة يساوي 28 في القطعة الواحدة. حجم القطعة الواحدة هو $V=\pi(12.13)^2(1.75)\approx 257.5\pi\ mm^3$. إذًا، حجم المجموعة المصفوفة يساوي حوالي $28(257.5\pi)=7210\pi\ mm^3$.**
الدرس 9.6: مساحة سطح الأشكال الكروية وحجمها	
استخدام قوانين الحجم للإسطوانة والهرم والمخروط والكرة لحل المسائل.	يوجد داخل علبة إسطوانية ثلاث كرات تنس. ويبلغ قطر كل كرة 6.2 cm. ما أصغر أبعاد العلبة الإسطوانية التي يمكنها أن تستوعب الكرات؟ ما المقدار الموجود في الإسطوانة ولا تشغله الكرات؟ **القطر يساوي 6.2 cm والارتفاع يساوي 18.6 cm ؛ حجم العلبة: $V=\pi(3.1)^2(18.6)\approx 178.75\pi\ cm^3$؛ حجم الكرة: $V=\frac{4}{3}\pi(3.1)^3\approx 39.7\pi\ cm^3$؛ المساحة الفارغة: $178.75\pi-3(39.7\pi)=59.65\pi\ cm^3$.**
الدرس 9.7: الهندسة الفراغية	
استخدام الأشكال الهندسية وقياساتها وخواصها لوصف الأشياء (على سبيل المثال، تمثيل جذع شجرة أو جذع إنسان باعتباره شكلاً إسطوانيًا).	يبلغ قطر كرة شاطئ بلاستيكية 40 cm. ما مقدار البلاستيك المستخدم لصنع كرة الشاطئ؟ **$1{,}600\pi\ cm^2$ أو $\approx 5{,}024\ cm^2$** يصنع مصنع حلويات كرات من شكولاتة زبدة الفول السوداني بقطر 1 cm. ويستخدم في ذلك قشرة من الشكولاتة ومركز كرة من زبدة الفول السوداني. إذا كان قطر كرة زبدة الفول السوداني 0.5 cm، فأوجد حجم الشكولاتة المستخدمة في صنع كل كرة. ما النسبة المئوية لزبدة الفول السوداني في كل كرة؟ **$V_{ball}=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{\pi}{6}\ cm^3$; $V_{pb}=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{\pi}{48}\ cm^3$; $V_{choc}=V_{ball}-V_{pb}=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{48}=\frac{8\pi}{48}-\frac{\pi}{48}=\frac{7\pi}{48}\ cm^3$; النسبة المئوية للكرة التي تتكوّن من زبد الفول السوداني تساوي $\frac{\frac{\pi}{48}}{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{48}\cdot\frac{6}{\pi}=\frac{1}{8}$ أو 12.5%.**

نصيحة للتدريس

م.م.ر 2

يمكن من خلال السؤال التمهيدي للدرس 9.3 فتح مجال لمناقشة **م.م.ر 2 (التفكير بطريقة تجريدية وكميّة)**. يجب على الطلاب استيعاب وجه الارتباط بين حجم عملة معدنية وحجم مجموعة من العملات المعدنية. ابدأ بأن تطلب من الطلاب التفكير في تقطيع إسطوانة إلى نصفين، مع طرح سؤال عما إذا كان مجموع حجمي الجزأين يساوي حجم الإسطوانة. ثم ناقش تقطيع الإسطوانة إلى عدد متزايد من الأجزاء. وسوف يؤدي ذلك بالطلاب إلى استيعاب مبدأ كافالييري.

نصيحة للتدريس

م.م.ر 1

يمكن من خلال السؤال التمهيدي للدرس 9.3 فتح مجال لمناقشة **م.م.ر 1 (فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها)**. يتم تقديم الكثير من المعطيات للطلاب في نص المسألة. ولتنظيم المعطيات، اطلب من الطلاب وضع قائمة بالخطوات المطلوبة لحل المسألة. شجع الطلاب على تصميم رسم تخطيطي لعلبة كرات التنس لمساعدتهم على استيعاب المسألة وكيفية حلها.

9.1 تمثيلات الأشكال ثلاثية الأبعاد


9.1 تمثيلات الأشكال ثلاثية الأبعاد

الأهداف

- التعرف على شكل المقطع العرضي ثنائي الأبعاد لجسم ثلاثي الأبعاد.
- التعرف على الجسم ثلاثي الأبعاد الذي تكون بفعل دوران جسم ثنائي الأبعاد.

المقطع العرضي هو عبارة عن تقاطع جسم ثلاثي الأبعاد ومستوى. يتم تحديد شكل المقطع العرضي من خلال نوع الجسم وزاوية المستوى.

مثال 1 استكشاف المقاطع العرضية

a. **التفكير بطريقة تجريدية** لدى حارب قطعة من الصلصال تأخذ شكل كرة كاملة الاستدارة. وقطع حارب شكل الكرة بحيث أصبح لديه شكلان لهما وجهان مسطحان. حدد المقاطع العرضية الناتجة عن القطع الأفقي، والقطع الرأسي، والقطع القطري.

كل مقطع عرضي عبارة عن دائرة. بغض النظر عما إذا تم تقطيع الكرة إلى شرائح أفقية أم رأسية أم قطرية، وما دام القطع قد مر بالكرة، فإن المقطع العرضي يكون عبارة عن دائرة.

b. **التفكير بطريقة تجريدية** هل هناك أي مقاطع عرضية أخرى محتملة؟

تكمن الاحتمالية الوحيدة الأخرى في ما إذا كان المستوى مماسًا للدائرة، وسيكون التقاطع في هذه الحالة عبارة عن نقطة وحيدة وليس دائرة.

c. **التفكير بطريقة تجريدية** لدى حارب إسطوانة قائمة مصنوعة من الصلصال، ووضعها على قاعدة دائرية. حدد اسم شكلي المقاطع العرضية المحتملة، وصف كيف ستقوم بتقطيع الإسطوانة إلى شرائح للحصول على كل شكل.

الإجابة النموذجية: دائرة ومثلث؛ قطّع الإسطوانة أفقيًا إلى شرائح لتكوين مقطع عرضي دائري، وقطعها رأسيًا إلى شرائح للحصول على مقطع عرضي مستطيل الشكل.

d. **التعليق على طريقة استنتاج الآخرين** يعتقد حارب أن بإمكانه تقطيع الإسطوانة إلى شرائح بحيث ينتج شكل قائم. فهل توافقه الرأي؟ اشرح.

نعم، يُمكن لحارب تقطيع الإسطوانة إلى شرائح من القطر عبر القاعدة العلوية وعبر الجانب الدائري.

234 الوحدة 9 التوسع في مساحة السطح والحجم

المعايير

معايير الممارسات الرياضية: 2, 3, 5

المتطلبات الأساسية

- تحديد الأشكال والمجسمات الهندسية القياسية
- دوران الأشكال ثنائية الأبعاد حول نقطة

مثال 1

نصيحة للتدريس م.م.ر 2

مثال 1 يوفر فرصة لتناول الممارسة **م.م.ر 2 (التفكير بطريقة تجريدية وكميّة)** حيث يتصور الطلاب تأثيرات عمليات القطع المختلفة على مجسم.

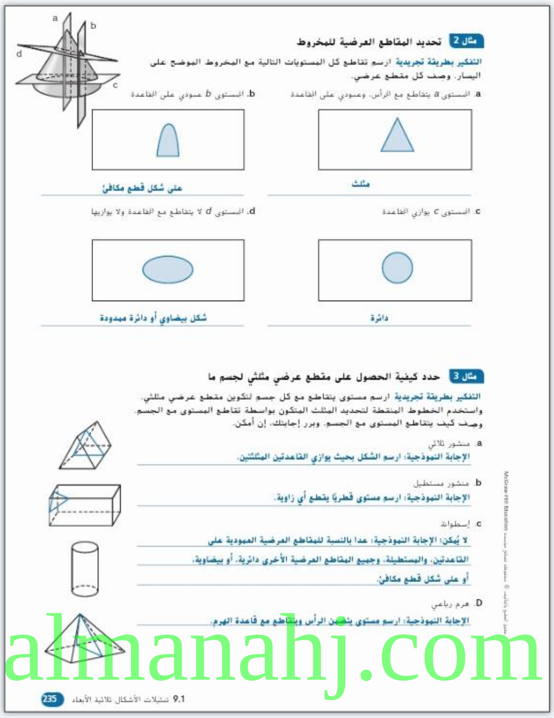
الأسئلة الداعمة

- هل جميع المقاطع العرضية المستطيلة للإسطوانة الناتجة عن الشرائح الرأسية متساوية الحجم؟ **اشرح. لا؛ كل مستطيل بنفس الطول، ولكن يختلف العرض حسب وتر القاعدة التي تحتويها الشريحة.**

معلومات أساسية رياضية

تقاطع مجسم هندسي ومستوى يُسمى المقطع العرضي. ويعتمد شكل المقطع العرضي على المجسم وزاوية المستوى. وبينما يواصل الطلاب دراسة الرياضيات لتشمل القطوع المخروطية وحساب التفاضل والتكامل، عليهم اكتساب القدرة على تصور المقاطع العرضية للأجسام المختلفة. وكثيرًا ما يتم استخدام المقاطع العرضية في العلوم والصناعة حيث يعمل العلماء والمهندسون على تصور الأجسام المختلفة وتمثيلها ودراستها.

في حساب التفاضل والتكامل، سوف يستخدم الطلاب أيضًا القدرة على تصور الأشكال ثلاثية الأبعاد الناتجة عن دوران شكل ثنائي الأبعاد حول مستقيم يُسمى محور الدوران. ويختلف الناتج حسب الشكل والاتجاه بالنسبة إلى محور الدوران.


مثال 2 تحديد المقاطع العرضية للمخروط

التفكير بطريقة تجريدية ارسم تقاطع كل المستويات التالية مع المخروط الموضح على اليسار. وصف كل مقطع عرضي.

a. المستوى a يتقاطع مع الرأس، وعمودي على القاعدة

مثلث

b. المستوى b عمودي على القاعدة

على شكل قطع مكافئ

c. المستوى c يوازي القاعدة

دائرة

d. المستوى d لا يتقاطع مع القاعدة ولا يوازيها

شكل بيضاوي أو دائرة ممدودة

مثال 3 حدد كيفية الحصول على مقطع عرضي مثلثي لجسم ما

التفكير بطريقة تجريدية ارسم مستوى يتقاطع مع كل جسم لتكوين مقطع عرضي مثلثي. واستخدم الخطوط المنقطة لتحديد المثلث المتكون بواسطة تقاطع المستوى مع الجسم. وصف كيف يتقاطع المستوى مع الجسم. وبرر إجابتك، إن أمكن.

a. منشور ثلاثي

الإجابة النموذجية: ارسم الشكل بحيث يوازي القاعدتين المثلثتين.

b. منشور مستطيل

الإجابة النموذجية: ارسم مستوى قطريًا يقطع أي زاوية.

c. إسطوانة

لا يُمكن؛ الإجابة النموذجية: عدا بالنسبة للمقاطع العرضية العمودية على القاعدتين، والمستطيلة، وجميع المقاطع العرضية الأخرى دائرية، أو بيضاوية، أو على شكل قطع مكافئ.

D. هرم رباعي

الإجابة النموذجية: ارسم مستوى يتضمن الرأس ويتقاطع مع قاعدة الهرم.

مثال 2

نصيحة للتدريس م.م.ر.2

في هذا المثال، يتصور الطلاب المقاطع العرضية لمخروط. ويجب عليهم التفكير في تأثير زاوية القطع وما إذا كان يمر بقاعدة المخروط أم رأسه.

الأسئلة الداعمة

- ما وجه الشبه بين المقطعين العرضيين في **الجزء a** والجزء **b**؟ وما وجه الاختلاف بينهما؟ **ينتج كلاهما عن تعامد المستوى على القاعدة. المقطع العرضي بالمستوى a يحتوي على الرأس، وأما المقطع العرضي بالمستوى b، فلا.**
- ما وجه الشبه بين المقطعين العرضيين في **الجزء c** والجزء **d**؟ **وما وجه الاختلاف بينهما؟ لا يحتوي المقطعان العرضيان على أي جزء من القاعدة أو الرأس. والمسافة بين كل نقطة بالمقطع العرضي ومركزه ثابتة للمستوى c ولكن تختلف للمستوى d.**

مثال 3

نصيحة للتدريس م.م.ر.2

يتعين على الطلاب التفكير في طرق ممكنة مختلفة لحل كل مسألة. وعند تصور كل طريقة، عليهم أيضًا تقييمها لمعرفة ما إذا كانت ناجحة.

الأسئلة الداعمة

- كم عدد الرؤوس في المثلث؟ **3**
- إذا كان لجسم سطح مقوس واحد على الأقل، فهل سيكون هناك انحناء جزئي على الأقل في كل مقطع عرضي؟ **لا. الإجابة النموذجية: الشريحة المتعامدة على قواعد إسطوانة ينتج عنها مقطع عرضي مستطيل.**

مثال 4

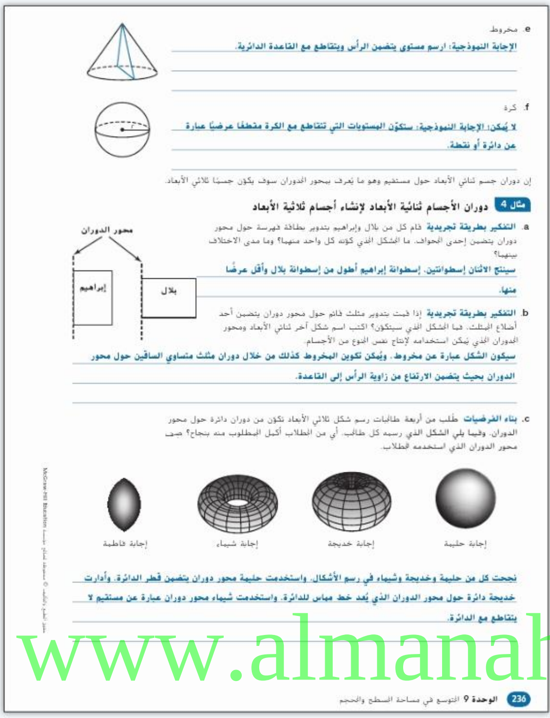
نصيحة للتدريس

م.م.ر2

يجب على الطلاب تصور تكوين الجسم ثلاثي الأبعاد نتيجة دوران شكل ثنائي الأبعاد. يتطلب **الجزء c** منهم تحديد موقع محور الدوران عند تحديد الأشكال ثلاثية الأبعاد التي يمكن أن تنتج عن دوران دائرة.

الأسئلة الداعمة

- لماذا لا يؤدي دوران مستطيل إلى تكوين منشور مستطيل أو شكل هرمي؟ **الشكل الذي يتم تدويره حول مركز دوران ينتج عنه دائمًا شكلاً ثلاثي الأبعاد مقطعه العرضي دائرة. ولا تتسم المناشير المستطيلة والأشكال الهرمية بهذه الخاصية.**
- في **الجزء c**، تم تكوين الأجسام الثلاثة جميعًا بدوران شكل دائري حول محور دوران. فما تأثير موقع محور الدوران على الأجسام؟ **الإجابة النموذجية: عندما يكون محور الدوران هو القطر، ينتج عن الدوران كرة. وعندما يكون محور الدوران هو المماس، ينتج عن الدوران ما يشبه الكعك المحلى بلا فتحة في المركز. وعندما يوجد فراغ بين المركز ومحور الدوران، ينتج عن الدوران ما يشبه الكعك المحلى.**
- كيف يمكن لرسم مقطع عرضي رأسي عبر مركز الأجسام أن يساعد عائشة وحفصة على تصور ما قامتا به؟ **يظهر تدوير نسختين من الشكل. ويكون محور الدوران في منتصف المسافة بين نسختي الشكل.**



e. مخروط

الإجابة النموذجية: ارسم مستوى يتضمن الرأس ويتقاطع مع القاعدة الدائرية.

f. كرة

لا يُمكن؛ الإجابة النموذجية: ستكوّن المستويات التي تتقاطع مع الكرة مقطعًا عرضيًا عبارة عن دائرة أو نقطة.

إن دوران جسم ثنائي الأبعاد حول مستقيم وهو ما يُعرف بمحور الدوران سوف يكوّن جسمًا ثلاثي الأبعاد.

مثال 4 دوران الأجسام ثنائية الأبعاد لإنشاء أجسام ثلاثية الأبعاد

a. **التفكير بطريقة تجريدية** قام كل من بلال وإبراهيم بتدوير بطاقة فهرسة حول محور دوران يتضمن إحدى الحواف. ما الشكل الذي كوّنه كل واحد منهما؟ وما مدى الاختلاف بينهما؟

سينتج الاثنان إسطوانتين. إسطوانة إبراهيم أطول من إسطوانة بلال وأقل عرضًا منها.

b. **التفكير بطريقة تجريدية** إذا قمت بتدوير مثلث قائم حول محور دوران يتضمن أحد أضلاع المثلث، فما الشكل الذي سيتكوّن؟ اكتب اسم شكل آخر ثنائي الأبعاد ومحور الدوران الذي يمكن استخدامه لإنتاج نفس النوع من الأجسام.

سيكون الشكل عبارة عن مخروط. ويُمكن تكوين المخروط كذلك من خلال دوران مثلث متساوي الساقين حول محور الدوران بحيث يتضمن الارتفاع من زاوية الرأس إلى القاعدة.

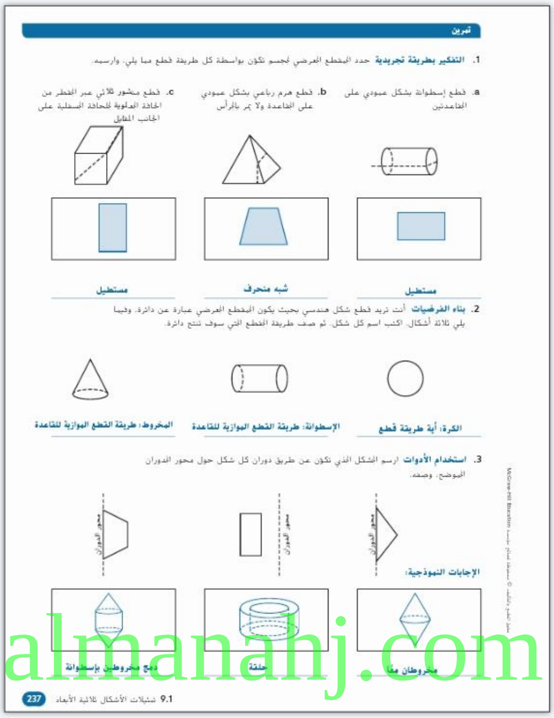
c. **بناء الفرضيات** طُلب من أربعة طالبات رسم شكل ثلاثي الأبعاد تكوّن من دوران دائرة حول محور الدوران. وفيما يلي الشكل الذي رسمه كل طالب. أي من الطلاب أكمل المطلوب منه بنجاح؟ صف محور الدوران الذي استخدمه الطلاب.

نجحت كل من حليمة وخديجة وشيماء في رسم الأشكال. واستخدمت حليمة محور دوران يتضمن قطر الدائرة. وأدارت خديجة دائرة حول محور الدوران الذي يُعد خط مماس للدائرة. واستخدمت شيماء محور دوران عبارة عن مستقيم لا يتقاطع مع الدائرة.

تلميح تقني

برامج المحاكاة الهندسية أداة فعالة تتيح للطلاب تمثيل المقاطع العرضية وإنشاء الأجسام ثلاثية الأبعاد عبر دوران الأشكال ثنائية الأبعاد. شجع الطلاب على النظر إلى مجموعة متنوعة من الأجسام. واطلب منهم توقع المقاطع العرضية المختلفة ثم مقارنة التوقعات بالنتائج.

بينما يقوم الطلاب ببناء الأجسام ثلاثية الأبعاد عبر عمليات الدوران، وضح حقيقة أن التغيرات البسيطة في الشكل أو موقع محور الدوران يمكن أن تتسبب في فروق كبيرة. على سبيل المثال، عند دوران مثلث، اطلب منهم ملاحظة تأثير تغيير موقع المثلث بالنسبة إلى محور الدوران على الجسم الناتج.



تمرين

1. **التفكير بطريقة تجريدية** حدد المقطع العرضي لجسم تكوّن بواسطة كل طريقة قطع مما يلي، وارسمه.

a. قطع إسطوانة بشكل عمودي على القاعدتين
b. قطع هرم رباعي بشكل عمودي على القاعدة ولا يمر بالرأس
c. قطع منشور ثلاثي عبر القطر من الحافة العلوية للحافة السفلية على الجانب المقابل

مستطيل | شبه منحرف | مستطيل

2. **بناء الفرضيات** أنت تريد قطع شكل هندسي بحيث يكون المقطع العرضي عبارة عن دائرة. وفيما يلي ثلاثة أشكال. اكتب اسم كل شكل. ثم صف طريقة القطع التي سوف تنتج دائرة.

الكرة: أية طريقة قطع | الإسطوانة: طريقة القطع الموازية للقاعدة | المخروط: طريقة القطع الموازية للقاعدة

3. **استخدام الأدوات** ارسم الشكل الذي تكوّن عن طريق دوران كل شكل حول محور الدوران الموضح، وصفه.

محور الدوران

الإجابات النموذجية:

مخروطان معًا | حلقة | دمج مخروطين بإسطوانة

237 9.1 تمثيلات الأشكال ثلاثية الأبعاد

تمرين

في **التمرين 1**، يجب أن يحدد الطلاب أشكال المقاطع العرضية ثنائية الأبعاد للأجسام ثلاثية الأبعاد.

في **التمرين 2**، يجب أن يفكر الطلاب في طرق تقاطع مستوى مع مجسم لإنشاء مقطع عرضي على شكل دائرة.

من أجل تناول الممارسة **م.م.ر 5** في **التمرين 3**، يمكن للطلاب قص الأشكال ثنائية الأبعاد وتدويرها حول محور دوران لتصور الجسم ثلاثي الأبعاد الناتج.

عرض المعايير

التمرين	م.م.ر
1	2
2	3
3	5

أخطاء شائعة

ربما يجد الطلاب أن من غير البديهي أن تخرج مقاطع عرضية مستطيلة من إسطوانة. اطلب منهم تصور المستطيل الناتج عن مستقيمين يقطعان طرفي قطرين متوازيين.

في **التمرين 3، الجزء b**، إذا وضع الطلاب محور الدوران بحيث لا يلامس الشكل، فيجب أن يحتوي الشكل الناتج على "ثقب".

9.4 حجم المنشور والأسطوانة

المعايير

معايير الممارسات في الرياضيات:
1, 2, 3, 4, 6, 7, 8

المتطلبات الأساسية

- إيجاد مساحة المستطيلات والمربعات والدوائر
- تحديد الأنواع المختلفة من المجسمات

مثال 1 م.م.ر 7

نصيحة للتدريس

يوفر **المثال 1** الفرصة لتناول م.م.ر 7. بعد أن يقوم الطلاب بحساب حجم كومة قطع النقد على شكل إسطوانة، يقومون بوضع صيغة عامة لحساب حجم أية إسطوانة.

الأسئلة الداعمة

- ما القياسات المطلوبة لحساب حجم إسطوانة؟ **نصف القطر والارتفاع**
- افترض أنه قد تم تكديس قطع النقد المعدنية بحيث لا توضع كل قطعة مباشرة على التي تحتها. فهل سيكون حجم كومة من 8 قطع نقد معدنية أيضًا 800π؟ نعم؛ **تحريك القطع لا يغير حجم الكومة.**


9.4 حجم المنشور والأسطوانة

الأهداف
- إيجاد أحجام المناشير والإسطوانات القائمة والمائلة.
- تطبيق مفاهيم الكثافة.

مثال 1 استكشاف حجم الإسطوانات

الاستكشاف ينشئ إبراهيم أشكالاً إسطوانية من خلال وضع قطع النقد المعدنية فوق بعضها.

a. استخدام نموذج تتكون المجموعة الأولى من 8 قطع نقد معدنية. ويبلغ ارتفاع كل عملة وحدة واحدة، و 20 وحدة عرضًا. ما مساحة وجه كل عملة بدلالة π؟

$A = 100\pi$ وحدة مربعة

b. إيجاد نمط يتذكر إبراهيم أن صيغة إيجاد حجم المنشور المستطيل هي $V = \ell \cdot w \cdot h$. ويفكر في إيجاد حجم مجموعة قطع النقد المعدنية بنفس الطريقة. اشرح كيف يُمكنه استخدام هذه الفكرة في إيجاد حجم مجموعة قطع النقد المعدنية التي لديه.

الإجابة النموذجية: يتكون المنشور المستطيل وكذلك مجموعة قطع النقد المعدنية المرتبة فوق بعضها من طبقات لها نفس المساحة. وتعمل صيغة حجم المنشور المستطيل على إيجاد مساحة القاعدة باستخدام $\ell \cdot w$ وتضربها في عدد الطبقات التي تصل إليها عبر الارتفاع h. بالنسبة لمجموعة قطع النقد المعدنية، كل طبقة هي عبارة عن قطع نقد معدنية مساحتها π وعدد الطبقات هو 8 قطع نقد معدنية. إذًا، الحجم هو $8 \times 100\pi = V$ أو 800π وحدة³.

c. وصف طريقة افترض أن إبراهيم يريد كتابة صيغة لحجم أي مجموعة من قطع النقد المعدنية المرتبة فوق بعضها. اشرح كيف يُمكنه التعديل في العملية المستخدمة في الجزأين **a** و **b** لكتابة صيغة لحجم مجموعة قطع النقد المعدنية التي يبلغ طول نصف قطرها r وحدة، ويبلغ ارتفاعها h وحدة. اكتب الصيغة بدلالة π.

الإجابة النموذجية: يُمكنه في البداية إيجاد مساحة وجه عملة واحدة. بما أن وجهها عبارة عن دائرة نصف قطرها r، فإن مساحة وجهها يساوي πr^2. يُمكنه ضرب الناتج في ارتفاع الإسطوانة كلها، h. الصيغة النهائية للحجم هي $V = \pi r^2 h$.

d. بناء الفرضيات اشرح كيف يمكن لإبراهيم إيجاد حجم أي برج آخر من الأجسام المتطابقة إذا كانت جميع المقاطع العرضية المصنوعة من مستويات أفقية لها نفس مساحة قاعدة الأجسام. ما الصيغة العامة التي يمكن استخدامها لإيجاد الحجم؟

الإجابة النموذجية: يُمكنه إيجاد حجم قاعدة أحد الأجسام، B. ثم يُمكنه ضرب الناتج في ارتفاع البرج، h؛ $V = B \times h$.

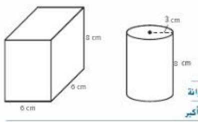
238 الوحدة 9 التوسع في مساحة السطح والحجم

معلومات أساسية رياضية

العديد من المسائل العملية التي يصادفها الطلاب في الحياة اليومية تتضمن حساب حجم مجسم. ويمكن حساب أحجام المناشير والإسطوانات من خلال ضرب مساحة القاعدة في الارتفاع. ويمكن للطلاب استخدام مبدأ كفاليري لحساب أحجام الإسطوانات والمناشير المائلة التي تتساوى ارتفاعاتها وقواعدها مع ارتفاع وقاعدة إسطوانة أو منشور قائم.

مثال 2 مقارنة الأحجام

إحدى الحاويات هو عبارة عن منشور مستطيل تبلغ أبعاده 6 cm في 6 cm ويبلغ ارتفاعه 8 cm. وهناك حاوية أخرى إسطوانية يبلغ طول نصف قطرها 3 cm ويبلغ ارتفاعها 8 cm.

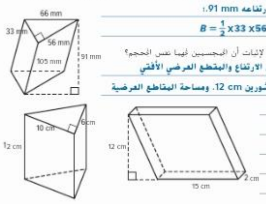


a. **التخمين** ما وجه المقارنة بين أحجام الأجسام في رأيك؟
الإجابة النموذجية: سيكون حجم المنشور المستطيل أكبر. الجسمان لهما نفس الارتفاع. ويبلغ طول كل من قطر القاعدة الدائرية للإسطوانة وارتفاع القاعدة المربعة للمنشور 6 cm. سوف يكون للمربع مساحة أكبر بقليل، إذًا حجم المنشور سيكون أكبر بقليل.

b. **الحساب بدقة** أوجد الفرق في حجمي الشكلين، مع التقريب لأقرب عدد صحيح.
المنشور المستطيل: $V = 6 \times 6 \times 8 = 288\ cm^3$ ؛ الإسطوانة: $V = \pi \times 3^2 \times 8 \approx 226\ cm^3$ ؛ $288 - 226 = 62$ ؛
الفرق يساوي حوالي $62\ cm^3$.

ينص جزء من مبدأ كفاليري على أنه إذا كان لمجسمين نفس الارتفاع h ونفس مساحة المقطع العرضي B في كل المستويات، فإن لهما نفس الحجم.

مثال 3 استخدم مبدأ كفاليري لإيجاد الحجم



a. **الحساب بدقة** ما الجسم القائم الذي سيكون له نفس الحجم كالجسم الموضح على اليسار؟ وما حجم الجسم الموضح؟
منشور ثلاثي يوجد به نفس القاعدة المثلثة ويبلغ ارتفاعه 91 mm؛
$B = \frac{1}{2} \times 33 \times 56 = 924\ mm^2$; $V = 924 \times 91 = 84{,}084\ mm^3$

b. **بناء فرضيات** كيف يمكنك استخدام مبدأ كفاليري لإثبات أن المجسمين لهما نفس الحجم؟
ينص مبدأ كفاليري على أنه إذا كان لجسمين نفس الارتفاع والمقطع العرضي الأفقي والمساحة، فإن لهما نفس الحجم. يبلغ ارتفاع المنشورين 12 cm. ومساحة المقاطع العرضية للمنشور الثلاثي تساوي $\frac{1}{2} \times 6 \times 10$ أو $30\ cm^2$. ويوجد بالمنشور المستطيل مقاطع عرضية مستطيلة تبلغ مساحتها 15×2 أو $30\ cm^2$. بما أن الجسمين لهما نفس الارتفاع والمساحة، فإن الجسمين سيكون لهما نفس الحجم.

التأكيد على معايير الممارسات الرياضية

خلال هذا الدرس، يعمل الطلاب على البنيات الأساسية للمناشير والإسطوانات لحساب أحجامها. من خلال التأكيد على م.م.ر 7 **(محاولة إيجاد البنية واستخدامها)**، فأنت تساعد الطلاب على الربط بين أبعاد المجسمات وأحجامها.

ينبغي للطلاب إدراك أن صيغة حساب حجم أي منشور أو إسطوانة هي **الحجم = مساحة القاعدة • الارتفاع**. ينبغي عليهم كذلك القدرة على وضع فرضية بشأن تأثير تغيير أبعاد منشور أو إسطوانة على حجمها. وسوف يكون الطلاب الذين لديهم استيعاب جيد لمفهوم الحجم قادرين بشكل أفضل على حل مسائل من الحياة اليومية.

مثال 2

نصيحة للتدريس
م.م.ر 3

في هذا المثال، يجب على الطلاب تخمين العلاقة بين مجسمين بنفس الارتفاع. طول ضلع المنشور المستطيل يساوي قطر الإسطوانة.

الأسئلة الداعمة

- إذا وضعت الجسمين جنبًا إلى جنب، فما وجه المقارنة بين الارتفاعين؟ **هما متساويان.**
- إذا أمكنك وضع الإسطوانة فوق المنشور، فماذا ستلاحظ؟ **تغطي القاعدة الدائرية تقريبًا أعلى المنشور ولكن لا تمتد إلى زوايا المنشور.**

مثال 3

نصيحة للتدريس
م.م.ر 8

يتطلب هذا المثال من الطلاب شرح كيفية تطبيق مبدأ عام على مسائل محددة.

الأسئلة الداعمة

- لاستخدام مبدأ كفاليري لحساب حجم منشور مائل، ما الذي أن يكون صحيحًا بشأن المنشور القائم المستخدم؟ **يجب أن يكون له نفس ارتفاع ومساحات المقاطع العرضية للمنشور المائل.**
- لماذا ليس من الضروري أن يكون للمنشورين نفس شكل القاعدة من أجل استخدام مبدأ كفاليري؟ **من الهام فقط أن تتساوى مساحات المقاطع العرضة. وطالما يتساوى الارتفاعان ومساحة القاعدتين، فلا يؤثر الشكل على الحجم.**

مثال 4

نصيحة للتدريس
م.م.ر 1

للإجابة عن **الجزء a**، يجب على الطلاب استيعاب كيفية حساب كثافة كل سائل. إذا لزم الأمر، راجع مفهوم الكثافة للسوائل والمجسمات.

الأسئلة الداعمة

- ما معنى كثافة سائل؟ **وزن (أو كتلة) السائل لكل وحدة حجم.**
- باعتقادك ماذا سيحدث إذا كان السائلان بنفس الكثافة؟ **سيمتزجان.**

مثال 5

نصيحة للتدريس
م.م.ر 7

في **الجزء d**، يجب على الطلاب البحث عن علاقات بين أبعاد الطرود البريدية وأحجامها.

الأسئلة الداعمة

- لماذا تختلف الأحجام؟ **الطرود البريدية لها أبعاد مختلفة.**
- باعتقادك ما الأبعاد التي تحقق أكبر حجم ممكن إذا كان قياس المحيط + الارتفاع 130؟ **الإجابة النموذجية: الطول والعرض والارتفاع يساوي 26 cm.**
- ما حجم الطرد البريدي بأبعاد متساوية؟ هل هو الطرد البريدي صاحب الحجم الأكبر؟ **17,576 cm³؛ لا، الطرد البريدي في الجزء a حجمه 20,000 cm³.**

مثال 4 إيجاد الكثافة بدلالة الحجم

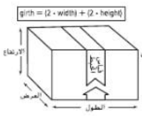
تريد فاطمة مقارنة كثافة الخل بكثافة زيت الزيتون. فقامت بتعبئة إسطوانة ارتفاعها 15 cm، ونصف قطرها 5 cm بمقدار 1200 g من الخل. ثم قامت بتعبئة إسطوانة أخرى ارتفاعها 13 cm، ونصف قطرها 6 cm بمقدار 1350 g من زيت الزيتون.

a. **التخطيط للحل** كيف يمكنك حساب كثافة كل سائل؟ ما الوحدة التي ستكون تمييز الكثافة؟
اقسم كتلة الإسطوانة على حجمها للحصول على الكثافة. سيكون تمييز الكثافة هو grams/cm³.

b. **الحساب بدقة** أوجد كثافة كل سائل، مع التقريب لأقرب جزء من مئة. اكتب الحل هنا.
الخل: الحجم = $\pi \times 5^2 \times 15 \approx 1178\ cm^3$، الكثافة = $1200 \div 1178 \approx 1.02\ gm/cm^3$؛ زيت الزيتون: الحجم = $\pi \times 6^2 \times 13 \approx 1470\ cm^3$، الكثافة = $1350 \div 1470 \approx 0.92\ gm/cm^3$

c. **بناء الفرضيات** تعرف فاطمة أن الزيت يطفو على الخل. كيف يمكنها استخدام هذه المعلومة لتحديد إن كانت إجابتها صحيحة أم لا؟
يطفو السائل ذو الكثافة الأقل، وكذلك $0.92\ gm/cm^3 < 1.02\ gm/cm^3$.

مثال 5 استكشاف تأثير الأبعاد على الحجم



حتى تتجنب خديجة سداد رسوم شحن إضافية، يجب ألا يزيد مجموع طول الطرد وقياس محيطه عن 130 cm. يُعرف الطول على أنه البُعد الأطول بين الأبعاد الثلاثة. وتتساءل عما إذا كانت كل الطرود التي تبلغ الحد الأقصى للطول وقياس المحيط لها نفس الحجم.

a. **التفكير بطريقة كمية** افترض أن ارتفاع الطرد يساوي 20 cm، وعرضه 25 cm. فما الحد الأقصى للطول الذي قد يصل إليه دون دفع رسوم إضافية؟ ما حجمه في ظل هذا الارتفاع؟
قياس المحيط = $(2 \times 25) + (2 \times 20) = 90\ cm$؛ أقصى ارتفاع = $130 - 90 = 40\ cm$؛ الحجم = $40 \times 25 \times 20 = 20{,}000\ cm^3$

b. **استخدام نموذج** افترض أن ارتفاع الطرد يساوي 10.5 cm، وعرضه 15.25 cm. فما الحد الأقصى للطول الذي قد يصل إليه دون دفع رسوم إضافية؟ ما حجمه في ظل هذا الارتفاع؟
قياس المحيط = $(2 \times 15.25) + (2 \times 10.5) = 51.5\ cm$؛ أقصى طول = $130 - 51.5 = 78.5\ cm$؛ الحجم = $78.5 \times 15.25 \times 10.5 \approx 12{,}570\ cm^3$

c. **الحساب بدقة** أوجد أبعاد ثلاثة طرود أخرى يبلغ مجموع قياس المحيط والطول لكل منها 130 cm. وأوجد حجم كل صندوق من الطرد منها.
الصندوق 1: الإجابة النموذجية: $l = 50$، $w = 20$، $h = 20$، الحجم = $20{,}000\ cm^3$؛ الصندوق 2: $l = 100$، $w = 10$، $h = 5$، الحجم = $5000\ cm^3$؛ الصندوق 3: $l = 80$، $w = 15$، $h = 10$، الحجم = $12{,}000\ cm^3$.

d. **إيجاد نمط** اكتب أنماط الطرود الثلاثة وكذلك الموجودة في **الجزء a** و **الجزء b** بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر حجمًا. ماذا تلاحظ بشأن الأبعاد التي تنتج الحجم الأكبر؟
الإجابة النموذجية: $40 \times 25 \times 20$, $50 \times 20 \times 20$, $78.5 \times 15.25 \times 10.5$, $80 \times 15 \times 10$, $100 \times 10 \times 5$.
كلما كانت قيم الطول والعرض والارتفاع أقرب، زاد الحجم.

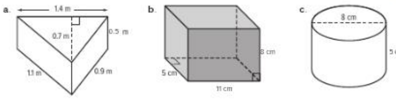
التدريس المتمايز

تمثيل الحجم باستخدام الوسائل التعليمية اليدوية الملموسة مفيد للطلاب الذين لا يستطيعون استيعاب المفهوم بشكل مجرد. امنح أزواج الطلاب صندوق مكعبات، واطلب منهم معرفة عدد المناشير المستطيلة التي يمكن عملها باستخدام 20 من المكعبات. واطلب منهم تسجيل النتائج (20 من المكعبات؛ 2 طول، 2 عرض، 5 ارتفاع؛ 4 طول 1 عرض، 5 ارتفاع؛ إلى آخره). ثم اطلب منهم العثور على طرق مختلفة لعمل مناشير مستطيلة باستخدام 48 مكعبًا. واطلب منهم المتابعة بعدد مختلف من المكعبات إذا لزم الأمر.

عندما يستوعب الطلاب الفكرة بأن الحجم هو عدد المكعبات المستخدمة، اطلب منهم اختبار النتائج باستخدام صيغة حجم منشور مستطيل. $V = l \cdot w \cdot h$

تمرين

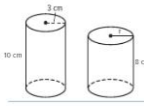
1. **الحساب بدقة** أوجد حجم كل مجسم.



$V = 0.245\ m^3$ $V = 440\ cm^3$ $V \approx 251.3\ cm^3$

d. ناقش مدى تشابه الصيغ التي استخدمتها لإيجاد حجم كل جسم من الأجسام الواردة أعلاه.
يتم إيجاد كل حجم عن طريق ضرب قاعدة ثنائية الأبعاد في الارتفاع. بالنسبة للجزء a، القاعدة هي عبارة عن مثلث مساحته $0.49\ m^2$، مضروبة في الارتفاع 0.5 m. وفي الجزء b، القاعدة عبارة عن مستطيل مساحته $55\ cm^2$ مضروبة في الارتفاع 8 cm. ويوجد في الشكل c قاعدة دائرية مساحتها $16\pi\ cm^2$ مضروبة في الارتفاع 5 cm.

2. **التخطيط للحل** تصنع شركة حاويات نوعًا من الحاويات الإسطوانية يبلغ طول نصف قطرها 3 cm وارتفاعها 10 cm. ثم قررت إنتاج نوع آخر من الحاويات الإسطوانية لها نفس الحجم، ولكن يبلغ ارتفاعها 8 cm. ما الطول الذي يجب أن يكون عليه نصف قطر الإسطوانة الجديدة حتى يكون لها نفس الحجم؟ ما الخطوات التي ينبغي لك استخدامها لإيجاد نصف قطر الإسطوانة الجديدة؟ ما طول نصف قطر الإسطوانة الجديدة مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة؟



الإجابة النموذجية: سوف أقوم بإيجاد حجم الإسطوانة الأصلية، ثم سأعوّض عن هذا الحجم والارتفاع 8 cm في صيغة الحجم، وأقوم بإيجاد قيمة r: 3.4 cm

3. توصل حسن إلى أن كثافة صودا الخبز هي $2.2\ grams/cm^3$ وكثافة رقائق الذرة هي $0.12\ grams/cm^3$. وتبلغ أبعاد صندوق صودا الخبز 8 cm طولاً و 4 cm عرضًا و 12 cm ارتفاعًا. وتبلغ أبعاد صندوق رقائق الذرة 30 cm طولاً و 6 cm عرضًا و 35 cm ارتفاعًا. ويريد حسن إيجاد وزن محتويات كل صندوق إذا تم تعبئته بمقدار 2 cm عن القمة.

a. **استخدام نموذج** كيف يمكن لحسن تحديد وزن محتويات كل صندوق؟
يُمكنه إيجاد حجم المحتويات لكل صندوق من خلال ضرب الطول في العرض في 2 أقل من ارتفاع الصندوق، ثم الضرب في كثافة المحتويات.

b. **الحساب بدقة** أوجد وزن محتويات كل صندوق.
صودا الخبز: الحجم = $8 \times 4 \times 10 = 320\ cm^3$، الوزن = $320 \times 2.2 = 704$ جرامات؛ رقائق الوزن: الحجم = $30 \times 6 \times 33 = 5940\ cm^3$، الوزن $5940 \times 0.12 = 712.8$ g

تمرين

يجب على الطلاب استخدام صيغ حجم الإسطوانات والمناشير المثلثة في **التمرين 1**.

في **التمرين 2**، يجب على الطلاب استخدام صيغة مساحة إسطوانة لحل مسألة تصميم.

في **التمرين 3**، يستخدم الطلاب مفهوم الكثافة لتمثيل موقف يتضمن أوزان مواد مختلفة.

عرض المعايير

تمرين	م.م.ر
1	6
2	1
3	4, 6

أخطاء شائعة

في **التمرين 1**، يتم أحيانًا توفير معطيات زائدة عن الحاجة. اطلب من الطلاب وضع دائرة حول الأبعاد الصحيحة المطلوبة لحساب الحجم. في **الجزء a**، مطلوب فقط قاعدة المثلث وارتفاعه لحساب مساحة القاعدة. لا يتم استخدام ضلعي المثلث الآخرين. في **الجزء c**، استخدم نصف القطر، وليس القطر.

الطلاب الذين وقعوا في الخطأ عند حل **التمرين 3** ربما نسوا تقليل كل ارتفاع بمقدار 2 cm. ذكرهم بقراءة المسألة بالكامل أكثر من مرة وتصميم رسم تخطيطي بحيث لا تفوتهم المعطيات الإضافية الواردة بالمسألة.

9.5 حجم الأشكال الهرمية والمخروطية

المعايير

معايير الممارسات في الرياضيات:
1, 2, 3, 4, 6, 7, 8

المتطلبات الأساسية

- إيجاد مساحات أسطح الأشكال الهرمية والمخاريط
- إيجاد أحجام المناشير والإسطوانات

مثال 1

نصيحة للتدريس
م.م.ر7

يستخدم الطلاب بنية منشور مثلث وصيغة حجمه لاشتقاق صيغة حجم هرم. أكد على أهمية فهم العلاقة بين بنية المنشور المثلث وبنية كل من الأشكال الهرمية الثلاثة التي يتكون منها المنشور.

الأسئلة الداعمة

- كيف تعلم كيفية تقسيم المنشور المثلث إلى ثلاثة أشكال هرمية متساوية الحجم؟ **اقسم بحيث يكون لكل زوج من الأشكال الهرمية قاعدة مثلثة والارتفاع ذاته.**
- ماذا لو كنت تحاول حساب حجم هرم قاعدته ليست مثلثة؟ **الصيغة $V = \frac{1}{3}Bh$ تصلح لأية قاعدة مضلعة.**

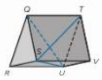
9.5 حجم الأشكال الهرمية والمخروطية

الأهداف

- استيعاب صيغ الحجم للأشكال الهرمية والمخاريط.
- استخدام صيغ الحجم للأشكال الهرمية والمخاريط لحل المسائل.

ينص **مبدأ كفاليري** على أنه إذا كان لجسمين نفس الارتفاع h ونفس مساحة المقطع العرضي B في كل المستويات، فإن لهما نفس الحجم. قد يتم تطبيق هذا المبدأ لإيجاد مساحتي المخاريط والأشكال الهرمية.

مثال 1 استكشاف حجم الأشكال الهرمية



الاستكشاف عند اكتمال لغز خشبي، يصبح مجسمًا في شكل منشور ثلاثي كما هو موضح على اليسار. وعند تفكيك اللغز، يتكون من ثلاث قطع مجسمة تتألف من قطع خط مستقيم من T إلى S، ومن S إلى U ومن Q إلى U.

a. **استخدام البنية** ارسم مجسمًا وخطوطًا منقطة لتمثيل عمليات قطع أجزاء اللغز. ما نوع المجسم لكل قطعة؟ اشرح.

كل قطعة عبارة عن هرم ثلاثي؛ ويوجد بكل قطعة 3 أوجه جانبية مثلثة وقاعدة مثلثة.

b. **التفكير بطريقة تجريدية** حدد زوجين من قطع اللغز بحيث تكون كل قطعة في زوج القطع لها نفس الحجم. اشرح استنتاجك.

الزوج 1: يتشارك هرمان رأساهما Q و V في $\triangle STU$ على أنه القاعدة؛ الزوج 2: يتشارك هرمان رأساهما R و T في $\triangle QSU$ على أنه القاعدة؛ في كل زوج، للهرمين نفس مساحة القاعدة ونفس الارتفاع. إذًا وفق مبدأ كفاليري فإن لهما نفس الحجم.

c. **التخمين** ما التخمين الذي يمكنك تقديمه حول أحجام قطع اللغز الثلاث؟ برر استنتاجك.

لدى الأشكال الهرمية الثلاثة نفس الحجم. الهرم الذي قاعدته $\triangle STU$ ورأسه Q هو نفسه الهرم الذي قاعدته $\triangle QSU$ ورأسه T. نظرًا لأن حجم الهرم $QSTU$ هو نفسه حجم الهرمين الآخرين، فإن الأشكال الهرمية الثلاثة لديها نفس الحجم.

d. **تفسير المسائل** وفق تخمينك، اكتب صيغة لحجم الشكل الهرمي. اشرح استنتاجك.

لدى الأشكال الهرمية الثلاثة نفس الحجم. الهرم الذي قاعدته $\triangle STU$ ورأسه Q هو نفسه الهرم الذي قاعدته $\triangle QSU$ ورأسه T. نظرًا لأن حجم الهرم $QSTU$ هو نفسه حجم الهرمين الآخرين، فإن الأشكال الهرمية الثلاثة لديها نفس الحجم.

يمكن استخدام صيغة حجم الهرم لإيجاد حجم كلا الشكلين الهرميين القائمين والأشكال الهرمية المائلة.

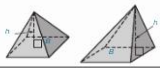
معلومات أساسية رياضية

تتشارك الأشكال الهرمية والمخاريط نفس صيغة الحجم $V = \frac{1}{3}Bh$، حيث B مساحة القاعدة و h الارتفاع. قاعدة الهرم مضلعة وقاعدة المخروط دائرة. ويمكن حساب حجم المخروط باستخدام الصيغة $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$، حيث r نصف قطر القاعدة الدائرية.

يمكن تقديم فرضيات غير رسمية لصيغة الحجم $V = \frac{1}{3}Bh$ باستخدام العلاقات بين أحجام المجسمات وقياسات أخرى مثل مساحة القاعدة والارتفاع. على سبيل المثال، يمكن اشتقاق الصيغة باستخدام مبدأ كفاليري، والذي ينص على أنه إذا تساوى مجسمان في مساحة القاعدة والارتفاع، فهما متساويان في الحجم.

المفهوم الأساسي

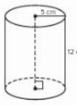
أكمل الجدول من خلال كتابة المعلومات المفقودة وكتابة أسماء النماذج.

حجم الهرم	
الشرح حجم الهرم يساوي $V =$ $\frac{1}{3}Bh$، حيث B هو **مساحة القاعدة** و h هو **الارتفاع** للهرم.	**النماذج** 
الرموز $V =$ $\frac{1}{3}Bh$	

يمكن استخدام صيغة حجم الهرم لإيجاد حجم كلا الشكلين الهرميين القائمين والأشكال الهرمية المائلة.

مثال 2 **حل المسائل التي تتضمن أحجام الأشكال الهرمية**

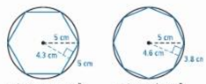
تصنع خديجة شمعًا على شكل هرم. وتغلف الشمع بصناديق إسطوانية كما هو موضح على اليسار.



a. **تفسير المسائل** تصنع خديجة شمعة على شكل هرم مربع. ويبلغ حجم الشمعة أكبر حجم يمكن لأبعاد الصندوق استيعابه. ما حجم الشمعة؟ اشرح إجابتك.

200 cm³؛ قطر قاعدة الهرم المربعة يساوي قطر قاعدة الإسطوانة، أو 10 cm. ومساحة المربع الذي قطره d تساوي $A = \frac{d^2}{2}$. إذًا قاعدة الهرم B تساوي $50\ cm^2$ وارتفاعها h يساوي 12 cm. استخدم الصيغة $V = \frac{1}{3}Bh$ و $V = \frac{1}{3}(50)(12)$ أو $200\ cm^3$.

b. **استخدام البنية** بالإضافة إلى الشمعة التي على شكل هرم مربع، تصنع خديجة أيضًا شمعًا على شكل هرم قاعدته عبارة عن شكل سداسي منتظم وشكل ثماني منتظم. في كل نوع من الشموع، تريد خديجة أن يكون لديها أكبر حجم ممكن بمعرفة أبعاد الصندوق الإسطواني. كل دائرة على اليسار تمثل قاعدة الصندوق. وارسم قاعدة كل هرم. بالنسبة لكل قاعدة، حدد طول الضلع s والعامد a واكتب اسميهما. ما مساحة كل قاعدة مقربة إلى أقرب جزء من عشرة؟ اشرح إجابتك.



قاعدة ثمانية الشكل **قاعدة سداسية الشكل**

القاعدة سداسية الشكل: 64.5 cm²؛ القاعدة ثمانية الشكل: 69.9 cm²؛ صيغة مساحة المضلع المنتظم هي $A = \frac{1}{2}Pa$، حيث P هو محيط القاعدة، و a هو طول العامد. وكل ضلع في الشكل السداسي يساوي نصف قطر الدائرة. إذًا $P = 6(5)$ أو 30 cm. يُمكن إيجاد العامد من خلال $a = 5 \sin 60°$ أو حوالي 4.3. مساحة الشكل السداسي تساوي $\frac{1}{2}(30)(4.3)$ أو $64.5\ cm^2$. أي ضلع للشكل الثماني يساوي $2(5 \cos 67.5°)$ أو حوالي 3.8؛ إذًا، $P = 8(3.8)$ أو $30.4\ cm^2$. ويُمكن إيجاد العامد باستخدام $a = 5 \sin 67.5°$ أو حوالي 4.6. مساحة الشكل الثماني تساوي $\frac{1}{2}(30.4)(4.6)$ أو $69.9\ cm^2$.

مثال 2

م.م.ر1

نصيحة للتدريس

في **المثال 2**، يحل الطلاب مسألة تتضمن القيود المادية على أحجام الأشكال الهرمية. أكد على أهمية تحليل العلاقات الهندسية التي تحدد القيود، مثل أبعاد قاعدة كل هرم وأبعاد قاعدة الصندوق الإسطواني.

الأسئلة الداعمة

- ما العلاقات التي تساعدك في تحديد وجه الارتباط بين قاعدة الهرم وقاعدة الصندوق؟ **من بين المستقيمات في مربع، القطر هو الأطول؛ ومن بين المستقيمات في دائرة، القطر هو الأطول.**
- كيف يمكنك تحديد أبعاد القاعدة المضلعة لهرم بحيث تكون مساحة الهرم أكبر ما يكون مع الاحتفاظ بإمكانية وضعه في الصندوق؟ **قم بإنشاء هرم مربع بحيث يساوي قطر القاعدة المربعة قطر القاعدة الدائرية للصندوق الإسطواني.**
- هل يتغير الارتفاع مع الوصول بأحجام الشموع الهرمية إلى الحد الأقصى في ظل القيود المعطاة؟ **لا؛ الارتفاع h محدد دائمًا على أقصى قيمة وهي 12 cm في هذا الموقف.**

التدريس المتمايز

قد يستفيد المتعلمون بالطريقة الحسية الحركية من إنشاء أشكال هرمية ومخاريط مجسمة من مواد مختلفة مثل الصلصال والورق المقوى. على سبيل المثال، اللغز الموصوف في **المثال 1** يمكن عمله باستخدام الورق المقوى والمقص والشريط اللاصق، كجزء من عملية فهم صيغة أحجام الأشكال الهرمية والمخاريط. يستطيع المتعلمون بالطريقة الحسية الحركية ابتكار أدوات تعلم بسيطة لغيرهم من المتعلمين بالنماذج.

الصلصال وسيط مطاوع يمكن للطلاب استخدامه لتمثيل التغيرات في المجسمات بمرور الوقت. ويمكن تحدي الطلاب لإنشاء نموذج بسيط من الصلصال يوضح فك وتركيب اللغز الوارد في **المثال 1**.

المثال 2 (تابع)

نصيحة للتدريس

م.م.ر 7

قد يتصور الطلاب نمط بنية القاعدة المضلعة المنتظمة لكل هرم بالنسبة إلى دائرة حيث يزيد العدد n من أضلاع القاعدة من خلال تصميم رسم تخطيطي لكل قاعدة هرم داخل القاعدة الدائرة للصندوق الإسطواني. قد يستفيد المتعلمون بالطريقة البصرية من تظليل مساحة الدائرة خارج كل قاعدة هرم للاطلاع بشكل أفضل على تناقص المنطقة الخالية في قاعدة الصندوق مع زيادة n.

الأسئلة الداعمة

- كيف يمكن استخدام بنية قاعدة هرم لحساب أطوال الأضلاع والارتفاع؟ **يقطع العامد أحد أضلاع القاعدة لتكوين مثلث قائم الزاوية بحيث يكون نصف قطر القاعدة هو الوتر. ويحدد عدد أضلاع القاعدة قياس الزاوية المركزية. ويمكن بعد ذلك استخدام الدوال المثلثية ونظرية فيثاغورس لحساب أطوال الأضلاع والارتفاع.**
- إذا استمر تزايد عدد أضلاع القاعدة المضلعة، فماذا سيحدث لأطوال الأضلاع وطول العامد؟ **ستصبح الأضلاع أقصر، ولكن سيقترب الارتفاع من نصف قطر قاعدة الصندوق.**
- إذا استمر تزايد عدد أضلاع القاعدة المضلعة، فما العلاقة بين مساحة قاعدة الهرم ومساحة قاعدة الصندوق الإسطواني؟ **بينما تتزايد n، تقترب مساحة قاعدة الهرم من مساحة القاعدة الدائرية للصندوق.**

c. **إيجاد نمط** أكمل الجدول أدناه حتى يكون لكل من الشموع أكبر حجم يُمكن لأبعاد الصندوق استيعابه. وقرّب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة. وقد تم إكمال صف الأشكال الهرمية المربعة خصيصًا لك.

عدد أضلاع القاعدة (n)	مساحة القاعدة (B)	الارتفاع (h)	الحجم $(V = \frac{1}{3}Bh)$
4	50 cm²	12 cm	200 cm³
6	64.5 cm²	12 cm	258 cm³
8	69.9 cm²	12 cm	279.6 cm³

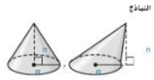
d. **التخمين** ماذا تلاحظ بشأن زيادة عدد الأوجه n؟ خمّن شكل القاعدة وشكل الهرم عندما يقترب n من اللانهاية. ما مدى التأثير على الحجم؟

كلما ازداد n؛ ازدادت مساحة القاعدة وحجم الهرم؛ وكلما اقترب n من اللانهاية، اقتربت القاعدة من أن تكون دائرة، واقترب الهرم من أن يكون مخروطًا. وستظل صيغة حجم المخروط كما هي $V = \frac{1}{3}Bh$، حيث مساحة القاعدة تساوي $B = \pi r^2$.

كما هو الحال بالنسبة لحجم الهرم، يُمكن استخدام صيغة حجم المخروط لإيجاد أحجام المخاريط القائمة والمخاريط المائلة.

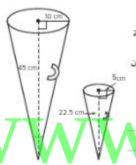
المفهوم الأساسي

أكمل الجدول من خلال كتابة المعلومات المفقودة وكتابة أسماء النماذج.

حجم المخروط	
الشرح حجم المخروط يساوي $V = \frac{1}{3}Bh$ أو $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$، حيث B هو **مساحة القاعدة**، و h هو **الارتفاع** المخروط، و r هو **نصف القطر** القاعدة.	**النماذج** 
الرموز $V = \frac{1}{3}Bh$ أو $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$	

يُمكن استخدام صيغ أحجام الأجسام في المواقف من الحياة اليومية، مثل حل مسائل التصميم التي تتضمن قيودًا.

مثال 3 **حل المسائل التي تتضمن أحجام المخاريط**



يفكر فريق إدارة ملعب بيسبول أن يبيع الفول السوداني والفشار في علب مخروطية الشكل يُمكن أن تصبح على شكل مكبرات صوت تذكارية عندما تكون فارغة. وستوفر الإدارة هذه العلب في حجمين، كبير وصغير، وسيتم تعبئتها حتى آخرها دون أن يقع منها شيء.

a. التفكير بطريقة كمّية ما حجم كل علبة؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة. اكتب الحل هنا.

4,712.8 cm³؛ 589.1 cm³؛ الكبيرة: $V = \frac{1}{3}\pi(10)^2(45)$ أو حوالي 4,712.8؛ الصغيرة: $V = \frac{1}{3}\pi(5)^2(22.5)$ أو حوالي 589.1

التأكيد على معايير الممارسات الرياضية

قد ترغب في استخدام **المثال 2** لمناقشة أوجه م.م.ر 8 **(البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك)**. أحد أجزاء المعيار هو ملاحظة متى تتكرر الحسابات. بعد أن يكمل الطلاب الحسابات للأشكال الهرمية السداسية والثمانية، اطلب منهم وصف الأنماط المختلفة التي لاحظوها واستنتاجاتهم بناءً على هذه الأنماط.

على سبيل المثال، قد يلاحظ الطلاب أنه عند تزايد عدد أضلاع القاعدة، يزداد كذلك طول العامد بينما تتناقص أطوال الأضلاع. من خلال تصميم الرسوم التخطيطية، يلاحظ الطلاب أن هذه الأنماط تحدث عند تزايد مساحات قواعد الأشكال الهرمية وبالتالي أحجامها.

b. **التعليق على طريقة استنتاج الآخرين** يقول أحد أعضاء الفريق أنه نظرًا لأن قياسي ارتفاع العلبة الكبيرة ونصف قطرها ضعف قياسي ارتفاع العلبة الصغيرة ونصف قطرها، فإن حجم العلبة الكبيرة سيكون ضعف حجم العلبة الصغيرة. فهل توافقه في الرأي؟ برر إجابتك.

لا؛ ارتفاع نصف القطر هو عبارة عن قياس طول، إذًا الزيادة في الحجم لا تتناسب مع المضاعف، وهو العدد 2، ولكن مع مكعب المضاعف، أو 8. وتتأكد هذه النتيجة من خلال حسابات الحجم في الجزء a: $589.1 \cdot 2 \neq 4{,}712.8$ لكن $589.1 \cdot 8 = 4{,}712.8$.

c. **استخدام نموذج** استخدم المعلومات الواردة بالجدول على اليسار لتحديد وزن كل علبة، عند تعبئتها بالفول السوداني تارة وعند تعبئتها بالقشار تارة أخرى. ولا تضف وزن العلبة نفسها في حساباتك.

العنصر	الكثافة (g/cm^3)
الفول السوداني	0.44
القشار	0.02

الفول السوداني الكبير: 2,037.6 g أو حوالي 2 kg؛ القشار الكبير: 94.26 g؛ الفول السوداني الصغير: 259.20 g أو حوالي 0.259 kg؛ القشار الصغير: 11.78 g

d. **التعليق على طريقة استنتاج الآخرين** افترض أن فريق الإدارة طلب منك تقييم أفكارهم حول العلب الجديدة. ما الاقتراحات التي ستقدمها؟ اشرح استنتاجك.

قم ببيع القشار في العلبة الكبيرة والفول السوداني في العلبة الصغيرة. ستكون العلبة الكبيرة ثقيلة الوزن إذا تم وضع الفول السوداني بها؛ وستكون العلبة الصغيرة خفيفة الوزن إذا تم وضع القشار بها.

تمرين

1. يبيع متجر حدائق حشائش الزينة على شكل هرم بحيث تبلغ مساحة قاعدته $900\ cm^2$، وارتفاعها 40 cm. ويتم صنع حشائش الزينة من الخرسانة أو الجرانيت أو الرخام.

المادة	الكثافة (kg/m^3)
الخرسانة	2371
الجرانيت	2691
الرخام	2711

a. **التفكير بطريقة كمية** ما حجم حشائش الزينة بالمتر المكعب؟ اشرح.
$0.012\ m^3$؛ $V = \frac{1}{3}Bh$ إذًا $V = \frac{1}{3}(900)(40)$ أو $12{,}000\ cm^3$. المتر المكعب الواحد يساوي 1 مليون سنتيمتر مكعب، إذًا حجم الوحدة من حشائش الزينة هرمية الشكل يساوي $0.012\ m^3$.

b. **استخدام نموذج** أوجد أوزان ثلاث حشائش زينة على شكل هرم بحيث تكون كل واحدة منها مصنوعة من مادة مختلفة. صف حساباتك.
الخرسانة: 28.5 kg؛ الجرانيت: 32.3 kg؛ الرخام: 32.5 kg؛ اضرب الحجم $0.012\ m^3$ في كثافة كل مادة بالجدول.

c. **التخمين** ما التعميم الذي يُمكنك اتخاذه بخصوص العلاقات بين حجم حشائش الزينة التي على شكل هرم، ووزن حشائش الزينة، وكثافة المادة المُستخدمة في الصناعة؟
إذا ظل حجم حشائش الزينة هرمية الشكل كما هو، فإن وزن حشائش الزينة سيزداد، وذلك كلما زادت كثافة المادة المُستخدمة في صنع حشائش الزينة.

مثال 3

نصيحة للتدريس

م.م.ر.2

ذكر الطلاب بأن الرسوم التخطيطية الهندسية قد لا توفر دائمًا جميع المعلومات الضرورية لفهم موقف معين. من الهام التفكير بطريقة كميّة ونوعية في المسائل للوصول لفهم متكامل قدر الإمكان.

الأسئلة الداعمة

- في الجزء **b**، باعتقادك لماذا يعتقد البعض أن حجم المخروط سيتضاعف عند مضاعفة نصف قطره وارتفاعه؟ **يبدو المخروط الأكبر في الرسم التخطيطي مِثْلي حجم المخروط الأصغر، مما يناظر مضاعفة القياسات الخطية.**
- كيف يمكن أن يساعد التفكير بطريقة كميّة في موقف على تجنب هذا الخطأ؟ **من خلال حساب حجمي المخروطين، يمكنك أن تعرف أن حجم المخروط الكبير ليس كِمِثْلَي حجم المخروط الصغير.**
- كيف يمكن أن يساعد التفكير بطريقة نوعية في موقف على تجنب هذا الخطأ؟ **بناءً على الخبرة السابقة، نعلم أنه إذا تزايد بعد خطي لمجسم أو تناقص بمقدار عامل ما، فإن حجم المجسم يزيد أو ينقص بمكعب العامل، وليس بالعامل ذاته.**

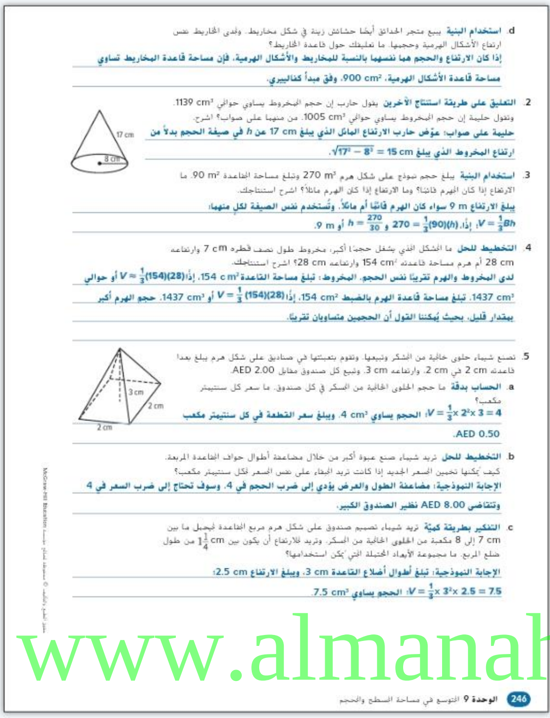
تمرين

يتدرب الطلاب على **م.م.ر 4** من خلال تمثيل مسائل من الحياة اليومية باستخدام الكثافة بناء على الحجم.

يحلل الطلاب صيغة أحجام المخاريط لتحديد خطأ وقع به طالب آخر.

يستخدم الطلاب صيغ أحجام الأشكال الهرمية لحل مسألة تتضمن الارتفاع في **التمرين 3**.

في **التمرين 4**، يستخدم الطلاب صيغ أحجام المخاريط والأشكال الهرمية أو صيغ مساحات قواعدها لمقارنة المجسمات.



d. **استخدام البنية** يبيع متجر الحدائق أيضًا حشائش زينة في شكل مخاريط. ولدى المخاريط نفس ارتفاع الأشكال الهرمية وحجمها. ما تعليقك حول قاعدة المخاريط؟
إذا كان الارتفاع والحجم هما نفسهما بالنسبة للمخاريط والأشكال الهرمية، فإن مساحة قاعدة المخاريط تساوي مساحة قاعدة الأشكال الهرمية، $900\ cm^2$، وفق مبدأ كفاليبيري.

2. **التعليق على طريقة استنتاج الآخرين** يقول حارب إن حجم المخروط يساوي حوالي $1139\ cm^3$. وتقول حليمة إن حجم المخروط يساوي حوالي $1005\ cm^3$. من منهما على صواب؟ اشرح.
17 cm
8 cm
حليمة على صواب؛ عوّض حارب الارتفاع المائل الذي يبلغ 17 cm عن h في صيغة الحجم بدلاً من ارتفاع المخروط الذي يبلغ $\sqrt{17^2 - 8^2} = 15\ cm$.

3. **استخدام البنية** يبلغ حجم نموذج على شكل هرم $270\ m^3$ وتبلغ مساحة القاعدة $90\ m^2$. ما الارتفاع إذا كان الهرم قائمًا؟ وما الارتفاع إذا كان الهرم مائلاً؟ اشرح استنتاجك.
يبلغ الارتفاع 9 m سواء كان الهرم قائمًا أم مائلاً، وتُستخدم نفس الصيغة لكلٍ منهما؛ $V = \frac{1}{3}Bh$؛ إذًا، $270 = \frac{1}{3}(90)(h)$ و $h = \frac{270}{30}$ أو 9 m.

4. **التخطيط للحل** ما الشكل الذي يشغل حجمًا أكبر، مخروط طول نصف قطره 7 cm وارتفاعه 28 cm أم هرم مساحة قاعدته $154\ cm^2$ وارتفاعه 28 cm؟ اشرح استنتاجك.
لدى المخروط والهرم تقريبًا نفس الحجم. المخروط: تبلغ مساحة القاعدة $154\ cm^2$، إذًا $V \approx \frac{1}{3}(154)(28)$ أو حوالي $1437\ cm^3$. تبلغ مساحة قاعدة الهرم بالضبط $154\ cm^2$، إذًا $V = \frac{1}{3}(154)(28)$ أو $1437\ cm^3$. حجم الهرم أكبر بمقدار قليل، بحيث يُمكننا القول أن الحجمين متساويان تقريبًا.

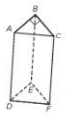
5. تصنع شيماء حلوى خالية من السكر وتبيعها. وتقوم بتعبئتها في صناديق على شكل هرم يبلغ بعدا قاعدته 2 cm في 2 cm، وارتفاعه 3 cm. وتبيع كل صندوق مقابل AED 2.00.
3 cm
2 cm
2 cm
a. **الحساب بدقة** ما حجم الحلوى الخالية من السكر في كل صندوق. ما سعر كل سنتيمتر مكعب؟
$V = \frac{1}{3} \times 2^2 \times 3 = 4$؛ الحجم يساوي $4\ cm^3$. ويبلغ سعر القطعة في كل سنتيمتر مكعب AED 0.50.
b. **التخطيط للحل** تريد شيماء صنع عبوة أكبر من خلال مضاعفة أطوال حواف القاعدة المربعة. كيف يُمكنها تخمين السعر الجديد إذا كانت تريد الإبقاء على نفس السعر لكل سنتيمتر مكعب؟
الإجابة النموذجية: مضاعفة الطول والعرض يؤدي إلى ضرب الحجم في 4. وسوف تحتاج إلى ضرب السعر في 4 وتتقاضى AED 8.00 نظير الصندوق الكبير.
c. **التفكير بطريقة كميّة** تريد شيماء تصميم صندوق على شكل هرم مربع القاعدة ليحمل ما بين 7 cm إلى 8 مكعبة من الحلوى الخالية من السكر. وتريد للارتفاع أن يكون بين $1\frac{1}{4}$ cm من طول ضلع المربع. ما مجموعة الأبعاد المحتملة التي يُمكن استخدامها؟
الإجابة النموذجية: تبلغ أطوال أضلاع القاعدة 3 cm، ويبلغ الارتفاع 2.5 cm؛ $V = \frac{1}{3} \times 3^2 \times 2.5 = 7.5$؛ الحجم يساوي $7.5\ cm^3$.

246 الوحدة 9 التوسع في مساحة السطح والحجم

أخطاء شائعة

في **التمرين 2**، يُقدم للطلاب موقف يستخدم فيه طالب آخر بشكل خاطئ الارتفاع المائل ℓ بدلاً عن الارتفاع h لحساب حجم مخروط. هذا الخطأ يسبب الضيق بشكل خاص لأن كثيرًا ما يكون الارتفاع المائل ℓ قريب للغاية من طول الارتفاع h بحيث تبدو القيمة غير الصحيحة للحجم مقبولة ولا يتم التعرف على الخطأ إلا بعد فترة عند تضاعف تأثيره نتيجة الحسابات المتتالية المعتمدة على النتائج الخاطئة.

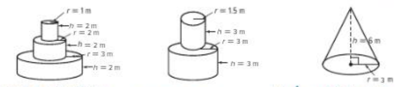
6. **استخدام نموذج** يبني يوسف صندوقًا على شكل منشور ثلاثي قائم لعرضه السحري. ويصنع داخل الصندوق حجرة سرية. وستكون الحجرة على شكل هرم قاعدته عبارة عن $\triangle ABE$ ورأسه عند النقطة C. بعد الانتهاء من صنع الحجرة السرية. ما نسبة حجم الحيز المتبقي داخل الصندوق إلى حجم الحجرة السرية؟ اشرح استنتاجك.



حجم المساحة المتبقية تساوي ضعف حجم الحجرة السرية؛ وحجم الحجرة السرية هو هرم من بين ثلاثة أهرام متساوية الحجم تكوّن المنشور الثلاثي. إذًا، يبلغ حجم الحجرة السرية $\frac{1}{3}$ من حجم المنشور، ويبلغ حجم المساحة المتبقية $\frac{2}{3}$ من حجم المنشور أو ضعف مساحة الغرفة السرية.

7. أراد أحمد توضيح أن حساباته لحجم المخروط كانت صحيحة. فقام بتمثيلها باستخدام سلسلة من الإسطوانات المرصوصة فوق بعضها.

a. **الحساب بدقة** أوجد حجم كل شكل مقربًا إلى أقرب متر مكعب.



$V = (\pi \times 1^2 \times 2) + (\pi \times 2^2 \times 2) + (\pi \times 3^2 \times 2) \approx 88\ m^3$

$V = (\pi \times 1.5^2 \times 3) + (\pi \times 3^2 \times 3) \approx 106\ m^3$

$V = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 6 \approx 57\ m^3$

b. **تفسير المسائل** ما وجه المقارنة بين أحجام الشكل؟

أحجام الإسطوانات المصفوفة فوق بعضها أكبر من حجم الهرم، وحجم الإسطوانتين المصفوفتين فوق بعضهما أكبر من حجم الإسطوانات الثلاث المصفوفة فوق بعضها.

c. **استخدام البنية** ما الشكل الذي ستتخذه مجموعة الإسطوانات المصفوفة إذا كانت هناك 24 إسطوانة ويبلغ ارتفاع كل إسطوانة منها $\frac{1}{2}$ cm وتقل أقطارها تدريجيًا؟

الإجابة النموذجية: سوف تشبه المخروط.

d. **التخمين** ماذا تتنبأ حول حجم مجموعة إسطوانات مصفوفة يبلغ ارتفاعها 60.5 cm ويقل طول الأقطار تدريجيًا؟

الإجابة النموذجية: سوف تكون أقرب لحجم المخروط.

e. **التخمين** كيف يُمكننا استخدام نفس الإجراءات لتقدير حجم الهرم المربع؟

يُمكن تقدير الهرم المربع باستخدام سلسلة من المناشير المربعة المصفوفة فوق بعضها ويقل حجمها تدريجيًا. ويبلغ حجم كل منشور s^2h، ثم نضيف الأحجام لإيجاد حجم المنشور.

التأكيد على معايير الممارسات الرياضية

يمكنك استخدام **المثال 2** لمناقشة أوجه **م.م.ر 3 (بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين)**. في التمرين، قدم طالبان إجابتين مختلفتين للمسألة ذاتها. وقع أحدهما في خطأ شائع للغاية. لأن الرياضيات مليئة بالمواقف المعرضة لوقوع الأخطاء، فمن الهام الحفاظ على بيئة موضوعية حيث يشعر الطلاب بالحرية في تقديم المعلومات والحصول عليها بشأن الأخطاء وتصحيحها.

التمرين (يتبع)

في **التمرين 5 الجزء c**، يجب على الطلاب التفكير بطريقة كميّة (**م.م.ر 2**) عند تعديل أبعاد الهرم لتحقيق الحجم المطلوب.

التمرين 6 مسألة من الحياة اليومية يمكن للطلاب حلها من خلال تطبيق الفرضية غير الرسمية لحجم الهرم.

في **التمرين 7**، يستكشف الطلاب تغيير حجم كومة من الإسطوانات ومقارنتها بحجم مخروط من خلال تقديم فرضية غير رسمية لحجم المخروط.

عرض المعايير

التمرين	م.م.ر
1	2, 3, 4, 7, 8
2	3
3	7
4	1
5	1, 2, 6
6	4
7	1, 3, 6, 7

9.6 مساحة سطح الأشكال الكروية وحجمها

المعايير

معايير الممارسات في الرياضيات:
1, 2, 3, 6, 7, 8

المتطلبات الأساسية

- إيجاد أحجام الأشكال الهرمية والمخاريط
- إيجاد مساحات أسطح الأشكال الكروية

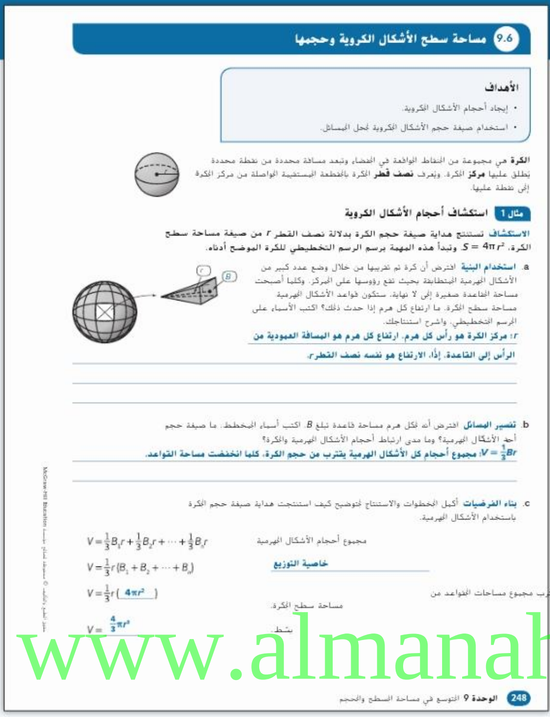
مثال 1

نصيحة للتدريس م.م.ر3

سوف يقوم الطلاب بإنشاء فرضية لاشتقاق صيغة حجم شكل كروي من صيغة حجم شكل هرمي، $V = \frac{1}{3}Bh$. لاحظ أن B هي مساحة القاعدة بغض النظر عن الشكل.

الأسئلة الداعمة

- ماذا تعرف عن حجم كل شكل هرمي في المجموع $V = \frac{1}{3}Br + \frac{1}{3}Br + \ldots + \frac{1}{3}Br$؟ **أحجام جميع الأشكال الهرمية هي ذاتها.**
- لماذا يمكنك التحليل إلى عوامل $\frac{1}{3}r$ من التعبير باستخدام خاصية التوزيع؟ **ارتفاع كل شكل هرمي يساوي نصف قطر r الشكل الكروي، إذًا كل حد يحتوي على العامل $\frac{1}{3}r$.**
- لإكمال الفرضية، هل من الضروري تحديد قيمة n؟ **لأن قاعدة الأشكال الهرمية تتضاءل بلا نهاية، فالتعبير $B_1 + B_2 + \ldots + B_n$ يساوي $4\pi r^2$، مساحة سطح الشكل الكروي.**



9.6 مساحة سطح الأشكال الكروية وحجمها

الأهداف
- إيجاد أحجام الأشكال الكروية.
- استخدام صيغة حجم الأشكال الكروية لحل المسائل.

الكرة هي مجموعة من النقاط الواقعة في الفضاء وتبعد مسافة محددة من نقطة محددة يُطلق عليها **مركز** الكرة. ويُعرف **نصف قطر** الكرة بالقطعة المستقيمة الواصلة من مركز الكرة إلى نقطة عليها.

مثال 1 استكشاف أحجام الأشكال الكروية

الاستكشاف تستنتج هداية صيغة حجم الكرة بدلالة نصف القطر r من صيغة مساحة سطح الكرة، $S = 4\pi r^2$. وتبدأ هذه المهمة برسم الرسم التخطيطي للكرة الموضح أدناه.

a. **استخدام البنية** افترض أن كرة تم تقريبها من خلال وضع عدد كبير من الأشكال الهرمية المتطابقة بحيث تقع رؤوسها على المركز. وكلما أصبحت مساحة القاعدة صغيرة إلى لا نهاية، ستكون قواعد الأشكال الهرمية مساحة سطح الكرة. ما ارتفاع كل هرم إذا حدث ذلك؟ اكتب الأسماء على الرسم التخطيطي، واشرح استنتاجك.
r؛ مركز الكرة هو رأس كل هرم. ارتفاع كل هرم هو المسافة العمودية من الرأس إلى القاعدة. إذًا، الارتفاع هو نفسه نصف القطر r.

b. **تفسير المسائل** افترض أن لكل هرم مساحة قاعدة تبلغ B. اكتب أسماء المخطط. ما صيغة حجم أحد الأشكال الهرمية؟ وما مدى ارتباط أحجام الأشكال الهرمية والكرة؟
$V = \frac{1}{3}Br$؛ مجموع أحجام كل الأشكال الهرمية يقترب من حجم الكرة، كلما انخفضت مساحة القواعد.

c. **بناء الفرضيات** أكمل الخطوات والاستنتاج لتوضيح كيف استنتجت هداية صيغة حجم الكرة باستخدام الأشكال الهرمية.

$V = \frac{1}{3}B_1r + \frac{1}{3}B_2r + \cdots + \frac{1}{3}B_nr$ مجموع أحجام الأشكال الهرمية

$V = \frac{1}{3}r(B_1 + B_2 + \cdots + B_n)$ خاصية التوزيع

$V = \frac{1}{3}r(4\pi r^2)$ ...عدة، يقترب مجموع مساحات القواعد من مساحة سطح الكرة.

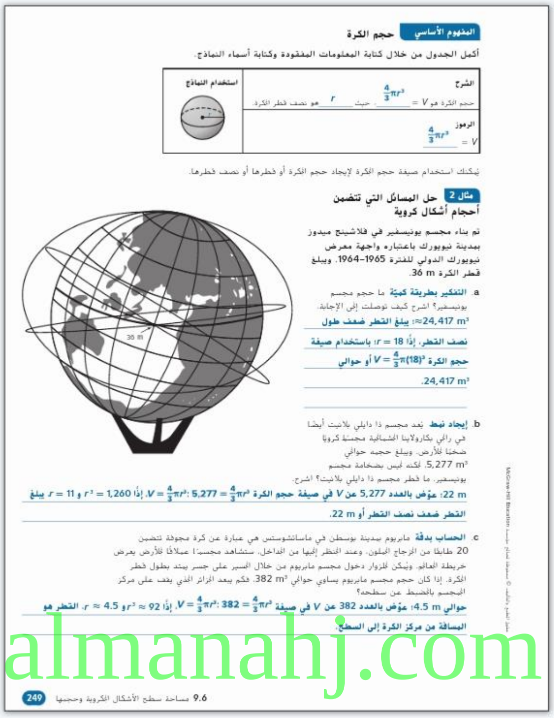
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ بسّط.

248 الوحدة 9 التوسع في مساحة السطح والحجم

معلومات أساسية رياضية

الكرة هي المحل الهندسي لجميع النقاط الواقعة في الفضاء وتبعد مسافة محددة من نقطة محددة يُطلق عليها مركز الكرة. ويمكن إيجاد حجم الكرة إذا عُلم نصف قطر الكرة وهو القطعة المستقيمة الواصلة من مركز الكرة إلى نقطة عليها.

إذا كان حجم الكرة V وحدة مكعبة ونصف قطرها r وحدة، إذًا $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. يمكن اشتقاق هذه الصيغة من صيغة مساحة السطح S للشكل الكروي، وهي $S = 4\pi r^2$. يستكشف الطلاب صيغة حجم الكرة في **المثال 1** وتُقدم لهم مفاهيم سيقابلونها مرة أخرى في ما قبل حساب التفاضل والتكامل وحساب التفاضل والتكامل.



المفهوم الأساسي حجم الكرة

أكمل الجدول من خلال كتابة المعلومات المفقودة وكتابة أسماء النماذج.

الشرح	استخدام النماذج
حجم الكرة هو $V = \frac{4}{3}\pi r^3$، حيث r هو نصف قطر الكرة.	
الرموز $V = \frac{4}{3}\pi r^3$	

يمكنك استخدام صيغة حجم الكرة لإيجاد حجم الكرة أو قطرها أو نصف قطرها.

مثال 2 حل المسائل التي تتضمن أحجام أشكال كروية

تم بناء مجسم يونيسفير في فلاشينج ميدوز بمدينة نيويورك باعتباره واجهة معرض نيويورك الدولي للفترة 1965–1964. ويبلغ قطر الكرة 36 m.

a. **التفكير بطريقة كمية** ما حجم مجسم يونيسفير؟ اشرح كيف توصلت إلى الإجابة.
$\approx 24{,}417\ m^3$؛ يبلغ القطر ضعف طول نصف القطر. إذًا $r = 18$؛ باستخدام صيغة حجم الكرة $V = \frac{4}{3}\pi(18)^3$ أو حوالي $24{,}417\ m^3$.

b. **إيجاد نمط** يُعد مجسم ذا دايلي بلانيت أيضًا في رالي بكارولاينا الشمالية مجسمًا كرويًا ضخمًا للأرض. ويبلغ حجمه حوالي $5{,}277\ m^3$، لكنه ليس بضخامة مجسم يونيسفير. ما قطر مجسم ذا دايلي بلانيت؟ اشرح.
$22\ m$؛ عوّض بالعدد 5,277 عن V في صيغة حجم الكرة $5{,}277 = \frac{4}{3}\pi r^3$:$V = \frac{4}{3}\pi r^3$. إذًا $r^3 = 1{,}260$ و $r = 11$ يبلغ القطر ضعف نصف القطر أو $22\ m$.

c. **الحساب بدقة** مابريوم بمدينة بوسطن في ماساتشوستس هي عبارة عن كرة مجوفة تتضمن 20 طابقًا من الزجاج الملون. وعند النظر إليها من الداخل، ستشاهد مجسمًا عملاقًا للأرض بعرض خريطة العالم. ويُمكن للزوار دخول مجسم مابريوم من خلال السير على جسر يمتد بطول قطر الكرة. إذا كان حجم مجسم مابريوم يساوي حوالي $382\ m^3$، فكم يبعد الزائر الذي يقف على مركز المجسم بالضبط عن سطحه؟
حوالي $4.5\ m$؛ عوّض بالعدد 382 عن V في صيغة $382 = \frac{4}{3}\pi r^3$:$V = \frac{4}{3}\pi r^3$. إذًا $r^3 \approx 92$ و $r \approx 4.5$. القطر هو المسافة من مركز الكرة إلى السطح.

249 مساحة سطح الأشكال الكروية وحجمها 9.6

مثال 2

نصيحة للتدريس

م.م.ر.7

في **المثال 2**، يستخدم الطلاب صيغة حجم الأشكال الكروية لحل مجموعة متنوعة من مسائل الأشكال الكروية. عندما يقوم الطلاب بحل عدد متزايد من المسائل المتشابهة، فقد يبدأ بعضهم في "تجميع" خطوات الحل المنفردة وابتكار إستراتيجيات لحل فئات المسائل.

الأسئلة الداعمة

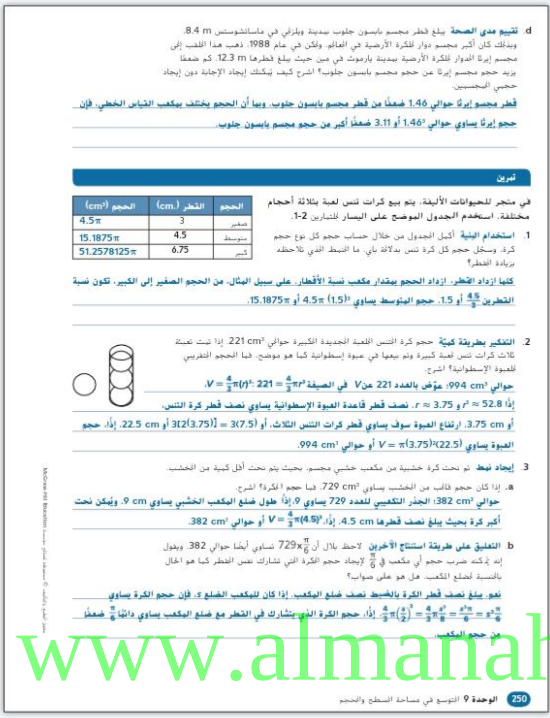
- إذا علمتَ قطر شكل كروي، فما الإستراتيجية التي يمكنك استخدامها لإيجاد حجمه؟ **اقسم على 2 لحساب نصف القطر ثم عوض عن نصف القطر r في الصيغة $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.**
- إذا علمتَ حجم شكل كروي، فما الإستراتيجية التي يمكنك استخدامها لإيجاد قطره؟ **عوض عن الحجم V في الصيغة $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. ثم حل لإيجاد قيمة r واضرب في 2 لإيجاد القطر.**
- ما وجه الارتباط بين حجمي شكلين كرويين إذا علمتَ قياسات القطرين أو نصفي القطر للشكلين الكرويين؟ **هل سيكون هذا صحيحًا إذا علمتَ محيط الشكلين الكرويين؟ نسبة حجمي الشكلين الكرويين تساوي مكعب نسبة القطرين أو نصفي القطر؛ نعم. نسبة الحجمين تساوي نسبة أي قياسين خطيين مناظرين بالشكلين الكرويين.**

تمرين

في **التمرين 1**، يستخدم الطلاب صيغة حجم الكرة للتحقق من العلاقة بين زيادة القطر وزيادة الحجم.

في **التمرين 2**، يستخدم الطلاب صيغة حجم الأشكال الكروية لحساب نصف قطر القاعدة والارتفاع وحجم إسطوانة من خلال معرفة حجم كرة تنس.

في **التمرين 3**، يستخدم الطلاب صيغ أحجام المكعبات والأشكال الكروية لإيجاد العلاقة بين حجم مكعب وحجم كرة قطرها يساوي ضلع المكعب.



d. **تقييم مدى الصحة** يبلغ قطر مجسم بابسون جلوب بمدينة ويلزلي في ماساتشوستس 8.4 m. وبذلك كان أكبر مجسم دوار للكرة الأرضية في العالم. ولكن في عام 1988، ذهب هذا اللقب إلى مجسم إيرثا الدوار للكرة الأرضية بمدينة يارموث في مين حيث يبلغ قطرها 12.3 m. كم ضعفًا يزيد حجم مجسم إيرثا عن حجم مجسم بابسون جلوب؟ اشرح كيف يمكنك إيجاد الإجابة دون إيجاد حجمي المجسمين.

قطر مجسم إيرثا حوالي 1.46 ضعفًا من قطر مجسم بابسون جلوب. وبما أن الحجم يختلف بمكعب القياس الخطي، فإن حجم إيرثا يساوي حوالي 1.46^3 أو 3.11 ضعفًا أكبر من حجم مجسم بابسون جلوب.

تمرين

في متجر للحيوانات الأليفة، يتم بيع كرات تنس لعبة بثلاثة أحجام مختلفة. استخدم الجدول الموضح على اليسار للتمارين 2-1.

الحجم	القطر (.cm)	الحجم (cm^3)
صغير	3	4.5π
متوسط	4.5	15.1875π
كبير	6.75	51.2578125π

1. **استخدام البنية** أكمل الجدول من خلال حساب حجم كل نوع حجم كرة. وسجل حجم كل كرة تنس بدلالة باي. ما النمط الذي تلاحظه بزيادة القطر؟

كلما ازداد القطر، ازداد الحجم بمقدار مكعب نسبة الأقطار. على سبيل المثال، من الحجم الصغير إلى الكبير، تكون نسبة القطرين $\frac{4.5}{3}$ أو 1.5. حجم المتوسط يساوي $(1.5)^3\ 4.5\pi$ أو 15.1875π.

2. **التفكير بطريقة كمية** حجم كرة التنس اللعبة الجديدة الكبيرة حوالي $221\ cm^3$. إذا تمت تعبئة ثلاث كرات تنس لعبة كبيرة وتم بيعها في عبوة إسطوانية كما هو موضح، فما الحجم التقريبي للعبوة الإسطوانية؟ اشرح.

حوالي $994\ cm^3$؛ عوّض بالعدد 221 عن V في الصيغة $221 = \frac{4}{3}\pi r^3$:$V = \frac{4}{3}\pi(r)^3$.
إذًا $r^3 \approx 52.8$ و $r \approx 3.75$. نصف قطر قاعدة العبوة الإسطوانية يساوي نصف قطر كرة التنس، أو 3.75 cm. ارتفاع العبوة سوف يساوي قطر كرات التنس الثلاث، أو $3(7.5) = [3[2(3.75)]$ أو 22.5 cm. إذًا، حجم العبوة يساوي $V = \pi(3.75)^2(22.5)$ أو حوالي $994\ cm^3$.

3. **إيجاد نمط** تم نحت كرة خشبية من مكعب خشبي مجسم، بحيث يتم نحت أقل كمية من الخشب.

a. إذا كان حجم قالب من الخشب يساوي $729\ cm^3$، فما حجم الكرة؟ اشرح.
حوالي $382\ cm^3$؛ الجذر التكعيبي للعدد 729 يساوي 9. إذًا طول ضلع المكعب الخشبي يساوي 9 cm. ويُمكن نحت أكبر كرة بحيث يبلغ نصف قطرها 4.5 cm. إذًا، $V = \frac{4}{3}\pi(4.5)^3$ أو حوالي $382\ cm^3$.

b. **التعليق على طريقة استنتاج الآخرين** لاحظ بلال أن $729 \times \frac{\pi}{6}$ تساوي أيضًا حوالي 382. ويقول إنه يُمكنه ضرب حجم أي مكعب في $\frac{\pi}{6}$ لإيجاد حجم الكرة التي تشارك نفس القطر كما هو الحال بالنسبة لضلع المكعب. هل هو على صواب؟
نعم. يبلغ نصف قطر الكرة بالضبط نصف ضلع المكعب. إذا كان للمكعب الضلع s، فإن حجم الكرة يساوي $\frac{4}{3}\pi\left(\frac{s}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{s^3}{8} = \frac{s^3\pi}{6} = s^3\frac{\pi}{6}$. إذًا، حجم الكرة الذي يتشارك في القطر مع ضلع المكعب يساوي دائمًا $\frac{\pi}{6}$ ضعفًا من حجم المكعب.

250 الوحدة 9 التوسع في مساحة السطح والحجم

أخطاء شائعة

صيغة الحجم V للكرة هي $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. صيغة مساحة السطح S للكرة هي $S = 4\pi r^2$.

إذا التبست هذه الصيغ على الطلاب، فاقترح عليهم التعود على التحقق من صيغ الحجم ومساحة السطح في كل مرة يستخدمونها. وذكّرهم بالاشتقاق في **المثال 1** حيث أحجام الأشكال الهرمية المربعة تكوّن حجم الكرة. قد يساعد هذا الطلاب على التمييز بين الصيغ.

البُعد الأكثر استخدامًا لوصف كرة هو القطر. ويجب على الطلاب التأكد من التعويض بقيمة نصف القطر في صيغة الحجم. ويمكن أن يساعدهم استخدام رسم تخطيطي لتجنب استخدام البُعد غير الصحيح.

في **التمرين 4**، يحل الطلاب مسألة عن الأشكال الكروية.

التمرين 5 يدرب الطلاب على تطبيق **م.م.ر 6** حيث يقومون بمراعاة الدقة عند حساب الفرق بين حجمي المكعب والكرة.

يستخدم الطلاب صيغتي حجم المكعب والكرة في **التمرين 6** لتحليل العلاقات بين حجم الكرة والمكعب، من خلال التدريب على **م.م.ر 1**، أثناء العمل على حساب حجم مجسم مركب.

في **التمرين 7**، يستخدم الطلاب بنية الأشكال الكروية لحساب طول قطعة مستقيمة ناتجة عن كرة داخل كرة.

عرض المعايير

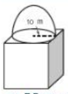
التمرين	م.م.ر
1	7
2	2
3	3,7
4	7
5	6
6	1
7	7

4. **إيجاد نمط** يجمع أيوب كرات شباك الصيد التي هي عبارة عن كرات زجاجية كانت تُستخدم في الماضي حتى تستمر شباك الصيد في الطفو. هناك ثلاثة أنواع من كرات شباك الصيد في مجموعة أيوب. المجموعة الأولى زرقاء اللون، ويبلغ قطر الكرات 5 cm. والمجموعة الثانية حمراء اللون، ويبلغ قطرها 7.5 cm. يبلغ قطر المجموعة الأكبر من كرة الكهرمان 10 cm. أوجد حجم الكرات الزرقاء باستخدام صيغة حجم الكرة. بالنسبة للكرات الحمراء وكرات الكهرمان، أوجد الحجم، ولكن مع استخدام الملاحظة التي توصلت إليها من خلال زيادة أنصاف الأقطار والحجم في **التمرين 1**.

حجم الكرة الزرقاء يساوي $\left(\frac{4}{3}\right)\pi(2.5)^3 = \frac{62.5\pi}{3}$ سنتيمتر مكعب. في التمرين 1، نحن نعلم أنه إذا زاد نصف القطر وفق عامل، فإن الحجم يزداد بمكعب هذا العامل. ونظرًا لأن نصف قطر الكرة الحمراء يساوي 1.5 ضعف من الكرة الزرقاء، فإن الحجم يساوي $70.3\pi = \frac{62.5\pi}{3}(1.5^3)$ سنتيمتر مكعب. بما أن نصف قطر كرة الكهرمان يبلغ ضعف نصف قطر الكرة الزرقاء، فإن الحجم يساوي $\frac{62.5\pi}{3}(2^3) = \frac{500\pi}{3}$ سنتيمتر مكعب.

5. **الحساب بدقة** ترسل نسرين إلى إحدى صديقاتها بالبريد كرة زينة خضراء يبلغ قطرها 10 cm. وقد وضعت الكرة داخل صندوق على شكل مكعب يستوعب على الأقل 2 cm من البطانة بين الكرة والصندوق. لأقرب جزء من عشرة، كم سنتيمترًا مكعبًا لمواد التغليف التي ستستخدمها؟ اشرح.

$2220.4\ cm^3$؛ بما أننا نحتاج إلى وضع 2 cm من البطانة في كل جانب، فإنه يجب أن يكون للصندوق الجوانب $14\ cm = 2 + 2 + 10$. ويبلغ حجم الصندوق $V = 14 \times 14 \times 14$ أو $2744\ cm^3$. ويبلغ نصف قطر كرة الزينة $2 \div 10$ أو 5. إذًا حجمها يساوي $V = \frac{4}{3}\pi(5)^3$ أو حوالي $523.6\ cm^3$. كمية مواد البطانة اللازمة هي $2744 - 523.6 = 2220.4\ cm^3$.



6. **تفسير المسائل** يصنع عمر نموذج مقياس لمبنى باستخدام مقياس كل $3\ cm = 4\ m$. ويأخذ المبنى شكل مكعب يعلوه نصف كرة بحيث تكون القاعدة الدائرية محاطة بالقاعدة المربعة للمكعب. في أعلى نقطة للمبنى، يكون ارتفاعه 30 m وموضح كذلك نصف قطر نصف الكرة. أوجد حجم نموذج المقياس الخاص بعمر إلى أقرب سنتيمتر مكعب. اشرح.

$4259\ cm^3$؛ في المبنى الفعلي، طول قطر نصف الكرة هو نفسه طول الضلع s في المكعب، ونصف القطر r يبلغ نصف هذا الطول. إذًا، $s = 20\ m$ و $r = 10\ m$. في نموذج المقياس، $s = 15\ cm$ و $r = 7.5\ cm$. وحجم المكعب هو $V = 15^3$ أو $3375\ cm^3$. وحجم نصف الكرة هو $V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi(7.5)^3$ أو $\approx 884\ cm^3$. إذًا، الحجم يساوي حوالي $884 + 3375$ أو $4259\ cm^3$.

7. **استخدام البنية** يوجد بنبات الثوم زهرة كروية الشكل تتكون من زهيرات صغيرة تنمو من زهرة على شكل الكرة الأرضية، ورأسها في المنتصف. تصمم أسماء منحوتة تجريدية على غرار نبات الثوم، وفي هذه المنحوتة، يبلغ قطر الكرة الصغيرة الواقعة في المركز 1.5 cm. ويبلغ حجم المنحوتة الكروية حوالي $381.7\ cm^3$. ما طول المسافة x؟ اشرح.

$3.75\ cm$؛ عند التعويض بالعدد 381.7 عن V في صيغة حجم الكرة، يكون الناتج $381.7 = \frac{4}{3}\pi(r)^3$. وعند الحل لإيجاد قيمة r، نتوصل إلى أن $r \approx 4.5$. يمثل نصف قطر الكرة الواقعة في المركز نصف الطول 1.5 أو 0.75 cm. إذًا، $x \approx 4.5 - 0.75$ أو 3.75 cm

التأكيد على معايير الممارسات الرياضية

التمرين 1. يركز على **م.م.ر 7** من خلال تشجيع الطلاب على التفكير في النمط القائم بين زيادة قطر كرة وزيادة حجم كرة، حيث يزيد القطر بمضاعف، يزيد الحجم بمكعب المضاعف. لتعزيز حدس الطلاب، وضح الارتباط بين هذه الحقيقة ونصف القطر المكعب في صيغة حجم الكرة.

لمساعدة الطلاب على تفسير المسألة وتعزيز **م.م.ر 1** في **التمرين 6**، وجه الطلاب إلى فهم أن الدائرة الكبيرة، وهي محيط قاعدة نصف الكرة، محاطة بمربع، وهو محيط الوجه العلوي من المكعب. يستطيع الطلاب استخدام هذه العلاقات لتحديد أن قطر نصف الكرة يساوي طول ضلع من المكعب.

9.7 الهندسة الفراغية

الأهداف

- استخدام الأشكال ثلاثية الأبعاد في وصف الأشياء.
- تمثيل المسائل وحلها باستخدام الأشكال وقياساتها.

لقد تعلمت كيفية إيجاد حجم الأشكال الكروية والإسطوانات والمناشير والأشكال الهرمية. ويمكن استخدام هذه المجموعات من الأجسام لإنشاء أجسام أخرى مفيدة بشكل أكبر ويمكن استخدامها لوصف أشياء من الحياة اليومية وأبعادها. وستساعدك صيغ الحجم التي تعرفت عليها في إيجاد أحجام هذه الأجسام الأكثر تعقيدًا.

مثال 1 صِف شكلاً تراه في الحياة اليومية

الاستكشاف تأمل الكوب الموضح على اليسار.

a. **استخدام نموذج** حدد مجسمين يمكن استخدامهما لتقدير حجم الكوب. اشرح كيف يُمكنك استخدام كل مجسم للتوصل إلى الحجم.

إسطوانة ومخروط: يُمكنني تمثيل الكوب باستخدام إسطوانة لديها نفس الارتفاع ونصف القطر وقاعدتها تساوي متوسط القاعدتين العلوية والسفلية للكوب. ثم يُمكنني التعويض عن الارتفاع ونصف القطر بالصيغة $V = \pi r^2 h$ للحصول على تقدير للحجم. يُمكن تمثيل الكوب كذلك باستخدام مخروط لقاعدته نفس نصف قطر أعلى الكوب وارتفاعها يساوي ارتفاع الكوب. ثم يُمكنني إيجاد تقدير للحجم بالتعويض عن نصف القطر والارتفاع في الصيغة $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

b. **وصف طريقة** يُعد المخروط الناقص جزءًا من المجسم الذي يقع بين مستوى يتضمن القاعدة والمستوى الموازي الذي يقطع المجسم. وصف كيفية إنشاء مخروط ناقص يمثل شكل الكوب.

اقطع مخروطًا يوازي القاعدة لتقسمها إلى مخروط ناقص يمثل الكوب ومخروط صغير يشبه المخروط الأصلي.

c. **استخدام نموذج** ارسم منظرًا جانبيًا للكوب واستمر في رسم الجوانب حتى تتقاطع وتكون مخروطًا. اكتب على نصف قطر أعلى الكوب R، واكتب على ارتفاع الكوب h، واكتب كذلك على نصف قطر قاع الكوب r. افترض أن x يمثل صيغة ارتفاع القاعدة الصغيرة للكوب إلى رأس المخروط. وعبّر عن x بدلالة المتغيرات الثلاثة الأخرى.

باستخدام نسب متساوية من المثلثات المتشابهة الناتجة عن المخروطين الكبير والصغير، $\frac{R}{x+h} = \frac{r}{x}$. إذًا $xR = r(x+h)$ و $xR - rx = rh$. وينتج عن التحليل إلى عوامل $x(R-r) = rh$ إذًا $\frac{rh}{R-r}$

الوحدة 9 التوسع في مساحة السطح والحجم 252

9.7 الهندسة الفراغية

المعايير

معايير الممارسات في الرياضيات:
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

المتطلبات الأساسية

- إيجاد أحجام المجسمات
- حل المعادلات الحرفية
- إيجاد القياسات المفقودة من المثلثات المتشابهة

مثال 1

نصيحة للتدريس م.م.ر4

يجب على الطلاب حساب حجم كوب. مبدئيًا، عليهم تمثيل الكوب باستخدام مجسم يعرفونه. سوف يختار الطلاب على الأرجح إسطوانة أو مخروطًا. والنموذج الأفضل هو جزء من مخروط يُسمى المخروط الناقص.

الأسئلة الداعمة

- ما المجسم الشبيه بهذا الكوب؟ **الإجابة النموذجية: إسطوانة أو مخروط**
- ما وجه الشبه بين الكوب والمخروط؟ **الإجابة النموذجية: قطر الشكلين يزيد (أو ينقص) مع زيادة الارتفاع.**
- ما وجه الاختلاف بين الكوب والمخروط؟ **الإجابة النموذجية: أحد طرفي الكوب لا ينتهي بنقطة.**

معلومات أساسية رياضية

في هذا الدرس، يعمل الطلاب على تمثيل أشكال ثلاثية الأبعاد من الحياة اليومية باستخدام مجسمات هندسية. وسوف يستكشفون كيف يمكن تقريب حجم شكل وكيف يمكن اشتقاق صيغة دقيقة في أمثلة أخرى. وعندما ينتقل الطلاب إلى مقررات أخرى، سوف يستكشفون الأشكال الأخرى ثلاثية الأبعاد مثل طارة أو مخروط ثنائي الرؤوس ويفكرون كيف يمكن إنشاء مجسم عبر تدوير شكل ثنائي الأبعاد حول مستقيم. في حساب التفاضل والتكامل، يمكن تحديد الأحجام الدقيقة بأخذ الحدود وفي النهاية عبر المكاملة.

d. **التخطيط للحل** كيف يُمكنك إيجاد حجم المخروط الناقص الذي يُمثل الكوب في **الجزء c**؟ اكتب إجابتك بدلالة المتغيرات.

يُمكنني طرح حجم المخروط الصغير من المخروط الأصلي للحصول على حجم المخروط الناقص:

$V = \frac{1}{3}\pi R^2(x + h) - \frac{1}{3}\pi r^2(x)$

e. **استخدام الأدوات** أوجد حجم الكوب الذي على شكل مخروط ناقص. وتتبع كل قاعدة في المساحة أدناه أو على ورقة منفصلة. ثم بقياس نصفي قطري الكوب وارتفاعه. وضع قياساتك على الشكل في **الجزء c**. أوجد أي قياسات مفقودة. ثم احسب حجم الكوب.

الإجابة النموذجية:

نصف قطر القاعدة الصغيرة: 1.25 cm

نصف قطر القاعدة الكبيرة: 1.5 cm

الارتفاع: 8 cm

$x = \frac{1.25(8)}{1.5 - 1.25} = \frac{10}{0.25}$ or 40, $x + h = 48$; $V = \frac{1}{3}\pi(1.5)^2(48) - \frac{1}{3}\pi(1.25)^2(40) \approx$

$113.1 - 65.45$ أو حوالي $47.65\ cm^3$.

مثال 2 تمثيل مسائل الحجم المحددة بقيود

تحتوي قارورة مبرد مياه على $18,000\ cm^3$ من المياه. تلقى مصنع طلبًا لتصنيع أكواب مياه ورقية على شكل مخروط، بحيث تستوعب مجموعة من 100 كوب جميع المياه.

a. **الحساب بدقة** إذا كان نصف قطر الكوب 3.75 cm، فما ارتفاعه؟ برر إجابتك.

سوف يستوعب كل كوب $18,000/100\ cm^3 = 180\ cm^3$; $V = \frac{1}{3}\pi(3.75)^2h = 180$; $h \approx 12.25\ cm$

b. **الحساب بدقة** إذا كان ارتفاع الكوب 15 cm، فما طول نصف قطره؟ برر إجابتك.

سوف يستوعب كل كوب $18,000/100\ cm^3 = 180\ cm^3$; $V = \frac{1}{3}\pi r^2 15 = 11.55$; $r \approx 3.4\ cm$

قرر المصنع استخدام أبعاد للكوب تستخدم أقل كمية من الورق.

c. **استخدام البنية** تنتج المعادلة $L = \pi r\sqrt{h^2 + r^2}$ المساحة الجانبية للكوب المخروطي. استخدم قيد الحجم لإيجاد قيمة h وإعادة كتابة المعادلة بدلالة r.

$180 = \frac{1}{3}\pi r^2h$, so $h = \frac{3(180)}{\pi r^2}$ و $h^2 = \frac{9(180)^2}{\pi^2 r^4}$; $L = \pi r\sqrt{\frac{9(180)^2}{\pi^2 r^4} + r^2}$

d. **استخدام الأدوات** استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل المعادلة بيانيًا من **الجزء c**. استخدم نافذة مثل $0 < r < 10$ و $0 < L < 400$. استخدم سمة الحد الأدنى على الحاسبة لإيجاد النقطة الأدنى على التمثيل البياني. ماذا تمثل قيمة كل إحداثي؟

حوالي $(4.95, 334.4)$؛ عند يكون نصف القطر 4.95 cm، تكون كمية الورق المستخدمة هي $334.4\ cm^3$.

التأكيد على معايير الممارسات الرياضية

المثال 1 الجزء e يرتبط مع م.م.ر 5 **(استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية)** لأن الطلاب يجب عليهم العثور على جسم مناسب لتتبع القواعد على الصفحة. سوف يقوم الطلاب المتفوقون في الرياضيات أيضًا بالعثور على مراكز الدوائر التي رسموها بالإنشاء بالرغم من أن السؤال لا يطلب هذا. سوف يكون الكوب بحجم أونصتين مناسبًا لهذا السؤال ولكن سيكفي أي جسم على شكل مخروط ناقص له قواعد تناسب مساحة الرسم.

المثال 1 (تابع)

نصيحة للتدريس

م.م.ر 3

في **الجزء d**، يكتب الطلاب تعبيرًا لحجم المخروط الناقص من خلال طرح حجم المخروط الصغير من المخروط الكبير المرسوم في **الجزء c**. قبل أن يتمكن الطلاب من حساب الحجم، عليهم استخدام المعادلة من **الجزء c** لحساب ارتفاع المخروط الصغير.

الأسئلة الداعمة

- أي من الأبعاد الأربعة R و r و h و x يمكن إيجادة عبر قياس الكوب؟ **R و r و h**
- لماذا لا يُعطى الحجم بواسطة $V = \pi R^2h$؟ **الإجابة النموذجية: ارتفاع الكوب أو المخروط الناقص هو h. ارتفاع المخروط الكبير هو $x + h$.**

التدريس المتمايز

اسأل الطلاب عما يحدث عندما تتساوى قاعدتي المخروط الناقص (الإسطوانة؛ $R = r$)، وما إذا كانت الصيغة تُختزل إلى صيغة إسطوانة.

مثال 2

نصيحة للتدريس
م.م.ر3

في **الجزء c** والجزء **d**، يكتب الطلاب تعبيرًا يمثل العلاقة بين المساحة الجانبية لكوب ونصف قطر الكوب، بمعرفة قيود الحجم، وبالتعويض عن h باستخدام $\frac{3(180)}{\pi r^2}$. سوف يقومون بالتمثيل البياني للمعادلة الناتجة باستخدام حاسبة التمثيل البياني والبحث عن الحد الأدنى الذي يمثل الحد الأدنى للمساحة الجانبية.

الأسئلة الداعمة

- هل صيغة L تكافئ $L = \pi r\ell$؟ **نعم؛ وفق نظرية فيثاغورس، $h^2 + r^2 = \ell^2$.**
- لماذا من المفيد في **الجزء c** التعويض عن h باستخدام تعبير يحتوي على r في صيغة L؟ **الإجابة النموذجية: الآن الصيغة الجديدة تتضمن القيد. بالإضافة إلى ذلك، يتم الآن التعبير عن مساحة السطح كدالة بمتغير واحد، r. إذًا يمكن تمثيل العلاقة بيانيًا لحساب القيمة الدنيا لمساحة السطح.**

تمرين

في **التمرينين 1** و **2**، يقوم الطلاب بتمثيل أجسام من الحياة اليومية حسب **م.م.ر 4** من خلال التفكير في الأشكال ثلاثية الأبعاد التي درسوها.

e. **الحساب بدقة** أوجد أبعاد الكوب التي تقلل كمية الورق المُستخدم للحد الأدنى. اكتب الحل هنا.

$r \approx 4.95$ cm, $h \approx 7.03$ cm؛ عوّض بالقيمتين $L = 133.7$ و $r = 4.95$ في صيغة المساحة الجانبية، وأوجد قيمة h: $133.7 = \pi(4.95)\sqrt{h^2 + (4.95)^2}$, $h^2 + 24.50 = \left(\frac{133.7}{15.5\pi}\right)^2$, $h \approx 7.03$ cm

f. **التواصل بدقة** هل هناك أسباب تمنع المصنع من استخدام هذه الأبعاد بعينها؟ اشرح استنتاجك.

الإجابة النموذجية: نعم، مثل قدرة الكوب على الاستقرار. أنتجت الأبعاد كوبًا عرضه أكبر من طوله، مما يجعله شكله غريبًا عند الاستخدام وسهل السكب.

تمرين

استخدام نموذج صِف كيف يُمكنك استخدام الأشكال ثلاثية الأبعاد لوصف الشكل المعطى.

1. مخروط مروري بقاعدته.

مخروط به منشور مستطيل لتقريب القاعدة

2. ثقل وزن الكيلوجرام.

هرم مُقتطع إلى شرائح توازي القاعدة.

3. **التخطيط للحل** تريد حورية المقارنة بين كثافة نوعين من المناديل الورقية في المتجر. تُباع المناديل الورقية في شكل لفات إسطوانية. وعندما زارت الموقع الإلكتروني للشركة المصنعة، وجدت المعلومات التالية:

النوع A

أبعاد المنديل	عدد المناديل/ اللفات	قطر اللفة	القطر الداخلي
11 cm × 6 cm	77	4.5 cm	1.75 cm

النوع B

أبعاد المنديل	عدد المناديل/ اللفات	قطر اللفة	القطر الداخلي
11 cm × 12 cm	35	5 cm	2 cm

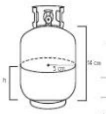
حدد كثافة كل لفة من المناديل الورقية بدلاً من حورية. إذا كانت تفضل المناديل الأكبر كثافة، فما النوع الذي يجب عليها شراؤه؟

افترض أن x هو كثافة النوع A، و y هو كثافة النوع B. وحجم لفة النوع A هو $V = \pi(2.25^2 - 0.875^2)11 \approx 148.49$ cm³. إذا قمنا بإخراج جميع المناديل عن اللفة، فإن المناديل تكوّن منشورًا مستطيلاً مسطحًا طويلاً أبعاده 11 cm و (6) cm (77)، و x cm. بمعنى أن، $5082x = 148.49$. وبالحل لإيجاد قيمة x نحصل على حوالي 0.029 cm. وحجم لفة النوع B يساوي $V = \pi(2.25^2 - 1^2)11 \approx 181.43$ cm³. وحجم المنشور المستطيل الذي تكوّن من إخراج المناديل عن اللفة هو $180.43 = (12)y(35)(11)$. عند الحل لإيجاد قيمة y نحصل على 0.04؛ ولذلك ينبغي لها شراء النوع B إن كانت تفضّل المناديل الورقية الأكبر كثافة.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

سوف يستخدم الطلاب م.م.ر 6 (مراعاة الدقة) لحل **المثال 2 الجزء e** والجزء **f**. ذكّر الطلاب بأن عليهم عدم تقريب الحسابات الوسيطة. ينبغي على الطلاب أيضًا الانتباه لاستخدام الرمزين المناسبين ≈ و= عند كتابة المعادلات. في **الجزء f**، تحقق من التفسيرات جيدة الصيغة، واطلب من الطلاب مناقشة الأسباب المتعددة لاختيار الشركات المصنعة لأبعاد معينة. إن أمكن، أحضر الكوب إلى الفصل ليقوم الطلاب بقياسه ومناقشة النتائج وعلاقتها بمساحة السطح والحجم.

4. يستوعب خزان من البروبان السائل 5 L من البروبان عندما يكون ممتلئًا. يوضح الرسم التخطيطي الأبعاد التقريبية للخزان بالسنتيمترات.



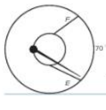
a. **استخدام النموذج** اختر مجسمًا لتمثيل الخزان. واستخدم صيغة حجم هذا المجسم لتقريب حجم الخزان.

قد تكون الإسطوانة نموذجًا جيدًا للخزان. $V = \pi r^2 h = \pi(25)(14) = 350\pi$، أو حوالي $1099\ cm^3$.

b. **التفكير بطريقة تجريدية** افترض أن h يمثل ارتفاع البروبان المتبقي في الخزان في أي وقت، ويمثل g لترات البروبان المتبقية. إذا كانت نسبة h إلى 14 تساوي دائمًا نسبة g إلى 5، فعبّر عن h بدلالة g.

النسبة $\frac{h}{14}$ تساوي $\frac{g}{5}$، إذًا $h = \frac{14g}{5}$.

c. **التفكير بطريقة تجريدية** يُظهر عداد الوقود الكمية التقريبية للبروبان المتبقية في الخزان. عبِّر عن الزاوية θ التي يصنعها المؤشر من علامة E (فارغ) بدلالة g، بحيث تمثل حجم الوقود الموجود في الخزان. وعبِّر عن الزاوية θ بدلالة h، بحيث تمثل ارتفاع الوقود في الخزان. هل إجابتك معقولة؟



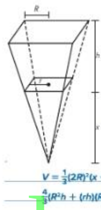
النسبة $\frac{g}{5}$ تساوي $\frac{\theta}{70}$، إذًا $14g = \theta$. بالتعويض باستخدام $g = \frac{5h}{14}$ ينتج $\theta = 5h$.

هذه الإجابة معقولة. نظرًا لأن $5(14) = 70$ (تنتج 5 أمثال ارتفاع الخزان قياس زاوية كاملة).

d. **بناء الفرضيات** تستهلك مشواة خليفة 0.5 L من البروبان في الساعة. ووجه دعوة لأصدقائه للشواء في الهواء الطلق. وقدّر الوقت اللازم لطهي الطعام كله بساعة واحدة من الشواء. إذا كانت الزاوية θ في **الجزء c** تساوي 3.5°، فهل لديه ما يكفي من البروبان لطهي هذا الطعام؟

لا؛ $\theta = 14g$. لذلك إذا كان $\theta = 3.5$، فإن $g = 0.25$. بما أنه يحتاج إلى 0.5 L للشواء لمدة ساعة، فإن 0.25 L من البروبان لن يكون كافيًا.

5. **التفكير بطريقة تجريدية** في **المثال 1** أوجدت حجم المخروط الناقص الذي نتج عن قطع قمة مخروط. وسوف توجد في هذا المثال حجم المخروط الناقص الناتج عند قطع مربع بواسطة مستوى موازٍ للقاعدة.



a. افترض أن R هو نص طول ضلع واحد من القاعدة. وافترض أن h هو ارتفاع المجسم. وافترض أن r هو نصف طول ضلع القاعدة الصغيرة. وافترض أن x هو الطول اللازم "لإكمال" الهرم. هل المنظر الجانبي للمجسم يشبه الرسم التخطيطي في **المثال 1**؟ أوجد x بدلالة المتغيرات الأخرى.

نعم؛ المنظر الجانبي هو نفسه المنظر الجانبي في المثال 1. إذًا $x = \frac{rh}{R} - r$.

b. استخدم صيغة حجم الهرم المربع والإجابة التي توصلت إليها في **الجزء a** لاستنتاج صيغة لحجم هذا المجسم.

اطرح حجم الهرم الصغير من الهرم الأصلي للتوصل إلى حجم المجسم.

$$V = \frac{1}{3}(2R)^2(x+h) - \frac{1}{3}(2r)^2 x = \frac{1}{3}(4R^2)\left(\frac{rh}{R-r} + h\right) - \frac{1}{3}(4r^2)\left(\frac{rh}{R-r}\right) = \frac{4}{3}\left(R^2h + \frac{rh(R^2 - r^2)}{R-r}\right) =$$
$$\frac{4}{3}(R^2h + (rh)(R+r)) = \frac{4}{3}(R^2h + Rrh + r^2h)$$

تمرين

التمرين 3 يتحدى الطلاب لاستخدام عدة نماذج لحل مسألة من الحياة اليومية. يستخدم الطلاب الإسطوانات لتمثيل لفافة المناديل الورقية ومركزها واستخدام منشور لتمثيل أوراق المناديل الورقية.

في **التمرين 4**، يجب على الطلاب التفكير بطريقة تجريدية لتكوين روابط مختلفة بين جسم من الحياة اليومية والقياسات والخواص الهندسية.

في **التمرين 5**، يستخدم الطلاب الأشكال الهندسية لتمثيل مجسم جديد ثم المتابعة لحساب حجمه.

عرض المعايير

التمرين	م.م.ر
1–2	4
3	1
4	2, 3, 4
5	2

أخطاء شائعة

في **التمرين 3**، قد يفسر الطلاب حجم اللفافة بالكامل على أنها حجم المناديل الورقية. اطلب منهم تفحص الرسم التخطيطي للمسألة بتمعّن لمعرفة أن حجم المناديل الورقية يساوي حجم اللفافة ناقص حجم المركز. أكّد على أن الطلاب عليهم دائمًا استخدام الرسوم التخطيطية لمساعدتهم في معرفة ليس فقط القياسات التي يعرفون للمسألة، ولكن كذلك لمعرفة ما يحاولون إيجاده.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

سوف يستخدم الطلاب **م.م.ر 4 (استخدام نماذج الرياضيات)** خلال الدرس، من خلال تطبيق المعرفة بالمجسمات ثلاثية الأبعاد على المواقف المتعلقة بالحياة اليومية. ينبغي على الطلاب وضع افتراضات وتخمينات لتبسيط المسائل الأكثر تعقيدًا مع العلم بأنها ستحتاج إلى المراجعة لاحقًا. تحقق من قدرتهم على تحديد الكميات الهامة وتخطيط العلاقات باستخدام أدوات مثل التمثيلات البيانية والصيغ والرسوم التخطيطية. يمكنهم تحليل تلك العلاقات رياضيًا لوضع الاستنتاجات.

9 مهمة تقويم الأداء

رصف سطح

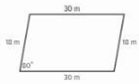
يستخدم الطلاب المفاهيم المكانية وصيغ القياس والنسب المثلثية لتقييم خيارات رصف قطعة من الأرض.

مهمة تقويم الأداء

رصف سطح

قدم حلاً واضحا للمسألة. تأكد من توضيح كل خطواتك، وضمّن كل الرسومات ذات الصلة، وبرر إجاباتك.

قرر السيد حارب رصف قطعة الأرض الواقعة أمام متجره. ويوضح الرسم التخطيطي قطعة الأرض هذه.



ويفكر في استخدام الحصى أو الخرسانة كمواد للرصف.

الجزء A

حدد مساحة قطعة الأرض. وقرّب إلى أقرب عدد صحيح. اشرح إجابتك.

المعايير

معايير الممارسات الرياضية: تدعم مهمة تقويم الأداء للوحدة 12 الممارسات الرياضية (م.م.ر 1) و(م.م.ر 2) و(م.م.ر 4) و(م.م.ر 5) و(م.م.ر 6) و(م.م.ر 7).

بداية سريعة

في **الجزء A**، يجب على الطلاب معرفة أن الشكل هو متوازي أضلاع ومعرفة أن المعطيات بمفردها لا يمكن أن تساعدهم في تحديد مساحته. إذا واجه الطلاب صعوبة في البدء، فيمكنك طرح أسئلة كالتالية.

- ما الشكل الهندسي الذي يمثل شكل قطعة الأرض؟كيف تعلم ذلك؟ **متوازي أضلاع؛ زوجا الأضلاع المتقابلة متطابقان**
- كيف يمكن حساب مساحة متوازي الأضلاع؟ **احسب ناتج ضرب القاعدة في الارتفاع.**
- ما قاعدة وارتفاع متوازي الأضلاع؟ **أي ضلع يمكن أن يكون قاعدة. والارتفاع غير معلوم.**

ذكر الطلاب بأنهم استخدموا قياسات الزوايا عند حساب أطوال الأضلاع غير المعلومة في المثلثات قائمة الزاوية. قم بتوجيههم إلى التفكير في كيفية تصور مثلثًا قائم الزاوية داخل متوازي الأضلاع.

التأكيد على معايير الممارسات الرياضية

تتواءم مهمة تقويم الأداء هذه بشكل وثيق مع م.م.ر 4 **(نماذج الرياضيات)**. خلال المهمة، يستخدم الطلاب النماذج الهندسية لتمثيل الأوجه المختلفة لموقف من الحياة اليومية، ويستخدمون النماذج لاتخاذ القرارات المرتبطة بالموقف. في **A**، ينبغي على الطلاب إدراك أن القياسات المكتوبة تحدد شكل قطعة الأرض بوصفها متوازي أضلاع، ويجب عليهم استخدام خواص متوازي الأضلاع لحساب مساحة قطعة الأرض. **الجزء B والجزء C** يتطلبان من الطلاب توسيع نموذج متوازي الأضلاع إلى ثلاثة أبعاد لحساب الكميات والتكاليف. في **الجزء D**، يجب على الطلاب ربط حجر الرصف، الممثل بوضوح بمنشور مستطيل، بنموذج متوازي الأضلاع لقطعة الأرض. تأكد أن الطلاب يستوعبون أن عمق الحجر الذي يبلغ 6 cm ليست له علاقة بحل المسألة.

نصيحة للتدريس

م.م.ر 6

مهمة تقويم الأداء هذه توفر الفرصة للربط مع م.م.ر 6 **(مراعاة الدقة)**. الأجزاء B وC وD تتطلب العديد من التحويلات بين وحدات القياس. إذا واجه الطلاب صعوبة في متابعة جميع هذه التحويلات، فيمكنك أن تقترح عليهم استخدام تحليل الأبعاد لتنظيم الحل.

أخطاء شائعة

عند كتابة معادلة لحساب ارتفاع متوازي الأضلاع، قد يقوم الطلاب باختيار نسبة مثلثية غير مناسبة أو التعويض عن طول ضلع على نحو غير صحيح. على سبيل المثال، لحساب الارتفاع h عندما تكون القاعدة 30، قد يكتب الطلاب $\cos 80° = \frac{h}{18}$ (وبالتالي $h \approx 3.15$) أو $\sin 80° = \frac{h}{30}$ (وبالتالي $h \approx 29.5$). اطلب من الطلاب مقارنة نتيجة مثل هذه بأطوال الأضلاع غير المعلومة والتفكير في مدى قبول النتيجة كارتفاع.

الجزء B

ما كمية المواد اللازمة لتغطية قطعة الأرض، وفق كل خيار؟ قرّب الحسابات إلى أقرب جزء من مئة.
فيما يلي معلومات العمق المطلوبة.

- **الحصى:** 5 cm عمقًا
- **الأسفلت :** 6.25 cm عمقًا
- **الخرسانة:** 10 cm عمقًا

الجزء C

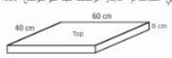
لدى السيد حارب AED 8000 لينفقها على مواد الرصف. وفيما يلي تقدير لتكلفة مواد الرصف.

- **الحصى:** AED 8.00 لكل متر مكعب
- **الأسفلت:** AED 6.64 لكل متر مكعب
- **الخرسانة:** AED 2.50 لكل متر مكعب

أي الخيارات الثلاثة يمكنه اختياره؟

الجزء D

يفكر السيد حارب كذلك في استخدام أحجار الرصف كما هو موضح أدناه.



قدّر عدد أحجار الرصف التي سيحتاج إليها لتغطية قطعة الأرض.
إذا كانت تكلفة كل حجر رصف هي AED 6.36، فهل ستغطي الميزانية المتاحة تكلفة استخدام أحجار الرصف؟

معايير رصد الدرجات

الجزء	الحد الأقصى للنقاط	إجابة تستحق الدرجة الكاملة
A	2	قطعة الأرض رباعية الأضلاع حيث الأضلاع المتقابلة متطابقة، وهي كذلك على شكل متوازي أضلاع. ارسم ارتفاعًا من الزاوية العليا اليسرى إلى الضلع الذي يبلغ طوله 30 m لإنشاء مثلث قائم الزاوية. لحساب الارتفاع، h، حل $\sin 80° = \frac{h}{18}$. استخدم صيغة المساحة $A = bh$. تبلغ مساحة قطعة الأرض تقريبًا $30\ m \times 17\ m$، أو تقريبًا $510\ m^2$.
B	3	اقسم كل عمق على 100 لتحويل السنتيمتر إلى متر؛ كمية الحصى: $510\ m^2 \times (5 \div 100)\ m \approx 26.6\ m^3$؛ كمية الأسفلت: $510\ m^2 \times (6.25 \div 100)\ m \approx 33.23\ m^3$؛ كمية الخرسانة: $510\ m^2 \times (10 \div 100) = 53.18\ m^3$
C	2	تكلفة الحصى: $26.6\,m^3 \times \left(\frac{AED8}{m^3}\right) = AED212.8$، تكلفة الأسفلت: $33.23\,m^3 \times \left(\frac{AED6.64}{m^3}\right) = AED220.6$؛ تكلفة الخرسانة: $53.18\,m^3 \times \left(\frac{AED2.5}{m^3}\right) \times (1) = AED132.95$؛ يمكنه اختيار الحصى أو الخرسانة.
D	3	الإجابة النموذجية: قرب مساحة قطعة الأرض إلى $600\ m^2$. مساحة حجر واحد هي $(40 \div 100)\ m \times (60 \div 100)\ m$, or $0.24\ m^2$. إذًا، يتم حساب عدد الأحجار المطلوبة كالتالي $600\ m^2 \div 0.24\ m^2 = 2500$. تكلفة 2500 حجر هي $2500 \times AED6.36 = AED15,900$. هذه التكلفة تتجاوز الميزانية بمقدار كبير.
الإجمالي	10	

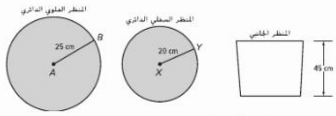
9 مهمة تقويم الأداء

مهمة تقويم الأداء

تقدير أحجام أحواض النباتات

قدّم حلاً واضحًا للمسألة. تأكد من توضيح كل خطواتك، وضمّن كل الرسومات ذات الصلة، وبرر إجاباتك.

تصمم هدى أحواض زراعة وتصنعها. ويوضح هذا الرسم التخطيطي المناظر العلوية والسفلية والجانبية لتصميم أصيص تفكر في تصنيعه.



وهدفها هو مراعاة أشكال الأصص وأحجامها، وتقديرها، وتكلفة التربة الزراعية.

الجزء A

باستخدام الإسطوانات، حدد أقل تقدير وأعلى تقدير لحجم الأصيص.

تقدير أحجام أحواض النباتات

سوف يستخدم الطلاب المفاهيم المكانية وصيغ القياس والنسب المثلثية لتقدير تكاليف ملء أحواض النبات ذات الأشكال غير القياسية.

المعايير

معايير الممارسات الرياضية: تعمل مهمة تقويم الأداء بالوحدة 9 على دعم الممارسات الرياضية **(م.م.ر 1)**، و**(م.م.ر 2)**، **(م.م.ر 4)**، و**(م.م.ر 5)**، و **(م.م.ر 6)**.

بداية سريعة

تحقق من معرفة جميع الطلاب لمعنى حوض النبات. واستخدم بعض الأسئلة التالية أو جميعها لمساعدتهم على فهم الرسم وتصور شكل حوض النبات.

- ما شكل حوض النبات؟ الإجابة النموذجية: مخروط تم قص رأسه
- ما وجه الشبه بين شكل حوض النبات والإسطوانة؟ **يحتويان على قواعد دائرة متوازية.**
- ما وجه الاختلاف بين شكل حوض النبات والإسطوانة؟ **القواعد ليست متطابقة وهكذا تميل الأسطح الجانبية للخارج من القاع إلى القمة.**

التالي، اطلب من الطلاب قراءة **الجزء A**. تأكد من فهم الطلاب أنه لا يجب عليهم حساب الحجم بالضبط، ولكن يجب عليهم وصف المدى المعقول للأحجام. اقترح عليهم التفكير في الإسطوانات التي يمكن حشرها داخل حوض النبات وحشر حوض النبات داخلها.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

تتواءم مهمة تقويم الأداء هذه بشكل وثيق مع **م.م.ر 4 (نماذج الرياضيات)**. خلال المهمة، يستخدم الطلاب النماذج الهندسية لتمثيل الأوجه المختلفة لموقف من الحياة اليومية ويستخدمون النماذج لاتخاذ القرارات المرتبطة بالموقف. في **الجزء A**، يجب أن يعلم الطلاب أن الرسوم التخطيطية ثنائية الأبعاد تمثل شكلاً ثلاثي الأبعاد، ويجب عليهم ربط ذلك الشكل بالإسطوانات داخله وخارجه. في **الجزء C**، يجب على الطلاب استيعاب أنه بالرغم من تغير النموذج من نموذج يتضمن الدوائر إلى نموذج يتضمن الأشكال ثنائية الأضلاع، إلا أن الاستنتاجات تبقى كما هي في **الجزء A** و **B**.

نصيحة للتدريس

م.م.ر 6

مهمة تقويم الأداء هذه توفر الفرصة للربط مع م.م.ر 6 **(مراعاة الدقة)**. تم تقديم عوامل التحويل في **الجزء** B إلى 10 أرقام ذات معنى. ولكن ينبغي أن يدرك الطلاب أنه من غير الضروري الحساب بتلك الدرجة من الدقة لأن التربة الصالحة للزراعة يتم بيعها في أكياس يتم التعبير عنها بأعداد كلية. وبالتالي، ربما يكون من الأفضل من حيث الفعالية التعامل مع العوامل مع تقريبها لأقرب جزء من المئة أو الألف.

أخطاء شائعة

عند حساب مساحة القواعد في **الجزء D**، ربما يستخدم بعض الطلاب القياسين 20 cm و 25 cm على نحو غير صحيح. ذكر الطلاب بأن عليهم استخدام القياسين وحساب المثلثات قائمة الزاوية لإيجاد عامد ثماني الأضلاع ومحيطه. (أو، إذا كان الطلاب يحاولون حساب المساحة بقسمة ثماني الأضلاع إلى ثمانية مثلثات متطابقة، فيجب عليهم استخدام هذين القياسين لحساب ارتفاع كل مثلث وقاعدته).

الجزء B

استخدمت هدى الإنترنت في البحث عن هذه المعلومات وجمعها.

$1\ m^3 = 1{,}000\ L$

$1\ L = 0.001\ m^3$

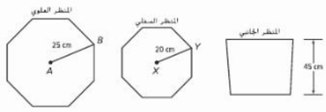
$1\ cm^3 = 0.001\ L$

$1\ L = 1{,}000\ cm^3$

وقد توصلت أيضًا إلى أن الحقيبة التي تسع 10 kg من التربة الزراعية تستوعب 16.1 L وتبلغ تكلفتها AED 4.99. كم تتوقع أن تنفق على التربة الزراعية باستخدام التقدير الأعلى والتقدير الأقل للحجم في **الجزء A**؟

الجزء C

افترض أن هدى قررت إحداث بعض التغييرات إلى تصميمها. فغيرت القاعدتين الدائريتين إلى قاعدتين على شكل ثماني أضلاع منتظم كما هو موضح. باستخدام مناشير الأشكال ثمانية الأضلاع المنتظمة، حدد التقدير الأقل والتقدير الأعلى لحجم هذا الأصيص.

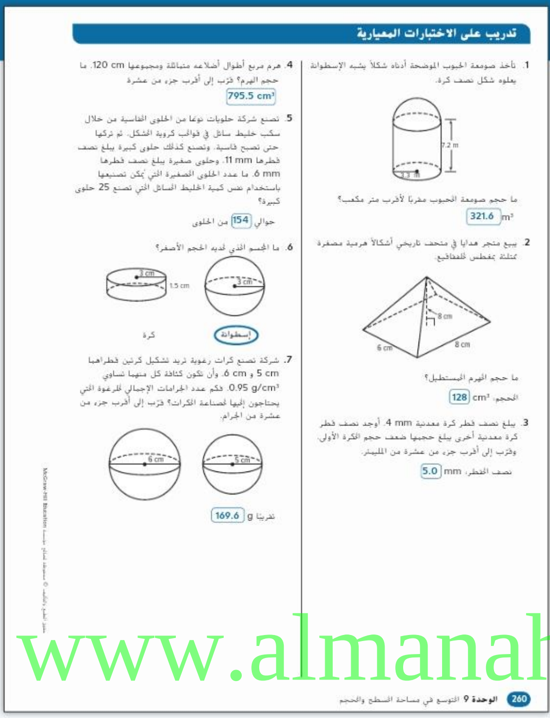


وضّح كيف يمكنها تقدير تكلفة التربة الزراعية لهذا الأصيص باستخدام مناشير الأشكال ثمانية الأضلاع المنتظمة. ما تقديرات التكلفة التي يمكنها توقعها؟

معايير رصد الدرجات

الجزء	الحد الأقصى للنقاط	إجابة تستحق الدرجة الكاملة
A	2	التقدير الأدنى: إسطوانة بنصف قطر 20 cm؛ $V = \pi r^2h = \pi(20\ cm)^2(45\ cm) \approx 56{,}548.59\ cm^3$ التقدير الأعلى: إسطوانة بنصف قطر 25 cm؛ $V = \pi r^2h = \pi(25\ cm)^2(45\ cm) \approx 88{,}357.34\ cm^3$
B	3	التقدير الأدنى: 56,56 ≈ 548.59 cm³ لترًا؛ 56 ÷ 16.1 ≈ 3.47 أكياس؛ 4 أكياس، تكلفتها AED19.96 التقدير الأعلى: 88,88 ≈ 357.34 cm³ لترًا؛ 88 ÷ 16.1 ≈ 5.46 أكياس؛ 6 أكياس، تكلفتها AED29.94
C	5	التقدير الأدنى للحجم: $V = Bh = [(0.5)ap]h = (0.5)(20\cos 22.5°)[16(20\sin 22.5°)](45) \approx 50{,}911.71$ cm³ التقدير الأعلى للحجم: $V = Bh = [(0.5)ap]h = (0.5)(25\cos 22.5°)[16(25\sin 22.5°)](45) \approx$ 79,549.53 cm³ التقدير الأدنى لعدد اللترات: 50.9,50 ≈ 911.71 cm³ لترًا؛ عدد الأكياس حسب التقدير الأدنى: 4 أكياس، تكلفتها AED19.96 التقدير الأعلى لعدد اللترات: 79.54,79≈ 549.53 cm³ لترًا؛ عدد الأكياس حسب التقدير الأعلى: 5 أكياس، تكلفتها AED24.95
الإجمالي	10	

تدريب على الاختبارات المعيارية



تدريب على الاختبارات المعيارية

1. تأخذ صومعة الحبوب الموضحة أدناه شكلاً يشبه الإسطوانة يعلوه شكل نصف كرة.

ما حجم صومعة الحبوب مقربًا لأقرب متر مكعب؟

321.6 m^3

2. يبيع متجر هدايا في متحف تاريخي أشكالاً هرمية مصغرة تمثله بمغطس للفقاقيع.

ما حجم الهرم المستطيل؟

الحجم: 128 cm^3

3. يبلغ نصف قطر كرة معدنية 4 mm. أوجد نصف قطر كرة معدنية أخرى يبلغ حجمها ضعف حجم الكرة الأولى. وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة من المليمتر.

نصف القطر: 5.0 mm

4. هرم مربع أطوال أضلاعه متماثلة ومجموعها 120 cm. ما حجم الهرم؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة

795.5 cm^3

5. تصنع شركة حلويات نوعًا من الحلوى القاسية من خلال سكب خليط سائل في قوالب كروية الشكل، ثم تركها حتى تصبح قاسية. وتصنع كذلك حلوى كبيرة يبلغ نصف قطرها 11 mm، وحلوى صغيرة يبلغ نصف قطرها 6 mm. ما عدد الحلوى الصغيرة التي يمكن تصنيعها باستخدام نفس كمية الخليط السائل التي تصنع 25 حلوى كبيرة؟

حوالي 154 من الحلوى

6. ما الجسم الذي لديه الحجم الأصغر؟

كرة

إسطوانة

7. شركة تصنع كرات رغوية تريد تشكيل كرتين قطراهما 5 cm و 6 cm، وأن تكون كثافة كل منهما تساوي $0.95\ g/cm^3$. فكم عدد الجرامات الإجمالي للرغوة التي يحتاجون إليها لصناعة الكرات؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة من الجرام.

تقريبًا 169.6 g

تشخيص الأخطاء

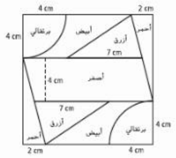
الطلاب الذين قدموا الإجابة $1125\ cm^3$ عن **العنصر 4** ربما استخدموا طول الحافة 15 cm كارتفاع للشكل الهرمي. اطلب منهم رسم الشكل الهرمي لمساعدتهم على فهم كيفية إيجاد ارتفاع الشكل الهرمي.

الطلاب الذين قدموا الإجابة 187.9 جرامًا عن **العنصر 7** طبقوا صيغة الكثافة على نحو غير صحيح. لأن الكثافة تساوي ناتج قسمة الكتلة على الحجم، ويتم حساب العدد الإجمالي من جرامات الرغوة المطلوبة عن طريق ضرب الكثافة في الحجم. وتشير الإجابة 187.9 جرامًا إلى القسمة وليس الضرب.

الطلاب الذين قدموا قيمة صحيحة لمساحة **الجزء** الأصفر في **العنصر 8** ربما لم يستوعبوا كيفية حساب قاعدة متوازي الأضلاع. وضح أن بإمكانهم توسيع القاعدة عبر المثلث الأحمر بإنشاء مثلثين متشابهين. احسب قاعدة المثلث المشابه الأصغر، والتي يمكن طرحها من 12 لحساب قاعدة متوازي الأضلاع.

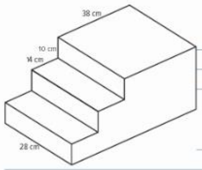
102 / 73

8. صممت سمية قطعة اللحاف الموضحة على اليسار. وتبلغ أبعاد قطعة اللحاف 12 cm في 12 cm. أكمل الجدول لتوضيح مساحة كل لون. وقرّب لأقرب عدد صحيح.



اللون	المساحة (cm^2)
برتقالي	25
أبيض	31
أزرق	28
أحمر	16
أصفر	44

9. مجموعة من الدرج تتضمن الأبعاد الموضحة.



a. صف مجموعة الدرج باعتبارها تكوّن الأشكال ثلاثية الأبعاد.

يتكوّن الدرج من ثلاثة مناشير مستطيلة مصفوفة فوق بعضها ولها نفس العرض والارتفاع، لكنها مختلفة في الطول.

b. سيتم صنع الدرج من الخرسانة. إذا كانت تكلفة الخرسانة هي AED 200 لكل متر مكعب، فكم ستبلغ تكلفة الدرج؟ اكتب الحل هنا.

AED 113.75؛ حجم الدرجات: $(28 \times 10 \times (14 + 14 + 38)) + (28 \times 10 \times (14 + 38)) + (28 \times 10 \times 38) = 43{,}680\ cm^3$؛ $1\ m^3 = 1{,}000{,}000\ cm^3$، إذًا $43{,}680\ cm^3 = \frac{43{,}680}{1{,}000{,}000} \approx 0.043\ m^3$; $0.043 \times AED\ 200 = AED\ 8.60$

10. يبلغ طول قاعدة منشور مستطيل ضعف عرضها، ونصف قطر المخروط يساوي عرض قاعدة المنشور. إذا كان لدى المجسمين نفس الحجم، وكان ارتفاع المنشور يساوي 15 cm، فما ارتفاع المخروط بالضبط؟ اكتب الحل هنا.

$\frac{90}{\pi}$ cm; $15(x)(2x) = \frac{1}{3}\pi x^2 h,\ h = \frac{30x^2}{\frac{1}{3}\pi x^2} = \frac{90}{\pi}$

تشخيص الأخطاء

الطلاب الذين واجهوا صعوبة في الإجابة عن **العنصر 10** ربما لم يستوعبوا كيفية استخدام أبعاد قاعدة المنشور ونصف قطر المخروط. اطلب منهم تحديد المتغير المستخدم ثم إثبات أن هذا المتغير يتم اختزاله في المعادلة، مما يعني أن الإجابة لا تعتمد على هذا المتغير على الإطلاق.

المعايير

العنصر 9

[3] وصف الشكل المركب وحساب التكلفة وتقديم التفسير على نحو صحيح

[2] حساب التكلفة على نحو صحيح، ولكن مع عدم استكمال خطوات الحل أو وصف الشكل المركب

[1] وصف الشكل المركب على نحو صحيح أو حساب التكلفة على نحو صحيح دون استكمال خطوات الحل

[0] لا توجد إجابة أو أن الإجابة والاستنتاج خطأ

العنصر 10

[2] الارتفاع صحيح وجميع الخطوات موضحة

[1] الإجابة صحيحة ولكن خطوات الحل غير مكتملة أو الإجابة غير صحيحة استنادًا إلى خطأ بسيط في الحسابات

[0] لا توجد إجابة أو أن الإجابة والاستنتاج خطأ

إستراتيجية خوض الاختبار

شجع الطلاب على التحقق من إجاباتهم عن **العنصر** 8 للتأكد من مدى صحة الحل من خلال فحص الرسم التخطيطي. على سبيل المثال، ينبغي أن يكون **الجزء** الأصفر أصغر قليلاً من ثلث المساحة الإجمالية، وينبغي أن يكون **الجزء** الأزرق أكبر من المساحة الحمراء. بالإضافة إلى ذلك، ينبغي أن يكون مجموع المساحات 144.

10 الهدف الأساسي من الوحدة

استخدام دليل الطالب التفاعلي
يمكن استخدام دليل الطالب التفاعلي (ISG) إلى جانب الرياضيات للصف العاشر المسار العام.

درس دليل الطالب التفاعلي	*الرياضيات للصف 10 المسار العام*
10.2	الدرس 2-10
10.3	الدرس 3-10
10.4	الدرس 4-10
10.5	الدرس 5-10
10.6	الدرس 6-10

10 الاحتمالات والقياس

الهدف الأساسي من الوحدة التعرف على ما ستستكشفه في هذه الوحدة. والإجابة عن الأسئلة التمهيدية. وعندما تنتهي من كل درس، عد إلى هذه الصفحات للتحقق من إجابتك.

الدروس المستفادة	السؤال التمهيدي
الدرس10.2: استخدام التباديل والتوافيق مع الاحتمالات	
استخدم التباديل والتوافيق في حساب احتمالات الأحداث المركبة وحل المسائل.	سيذهب ثمانية أصدقاء لركوب قطار ملاهٍ. ولا يمكن أن يجلس في كل عربة سوى 4 أفراد. كم عدد طرق اختيار مجموعة من 4 أصدقاء للجلوس مع بعضهم في عربة قطار الملاهي؟ **70**
الدرس 10.3: الاحتمالات الهندسية	
استخدم التباديل والتوافيق في حساب احتمالات الأحداث المركبة وحل المسائل.	تم اختيار خمسة أفلام عشوائيًا من مجموعة مكونة من 6 أفلام حركة و9 أفلام كوميدية. ما احتمال اختيار 3 أفلام حركة وفيلمين كوميديين؟ **0.2397**
الدرس 10.4: المحاكاة	
استخدم الاحتمالات في اتخاذ قرارات عادلة (مثل سحب القرعة أو استخدام مولد الأعداد العشوائية).	يحاول نادي الرياضيات أن يقرر من سيقدم العرض التقديمي في الاجتماع القادم. يوجد 7 أعضاء، ولكن لا يوجد لديهم سوى قرص دوار به 8 أقسام متساوية. ويقترح أحد الأعضاء أن يحصل كل عضو على قسم من القرص الدوار وإذا وقف القرص على القسم الثامن، سيلفونه مرة أخرى. فهل هذا عادل؟ **نعم؛ لكل عدد فرصة متساوية حتى يتم اختياره.**

نصيحة للتدريس
م.م.ر 4

يتناول السؤال التمهيدي للدرس 10.2 م.م.ر 4 **(استخدام نماذج الرياضيات)**. وتعتبر الخطوة الأهم في حل مسائل من الحياة اليومية حيث تقرر ما إن كان الموقف يمثل تباديل أم توافيق. اسأل الطلاب كيف يعرفون ما إن كان الترتيب مهمًا أم لا. اطلب من الطلاب العمل على مسألة مماثلة باستخدام أعداد أصغر يمكن حلها بوضع قائمة منظمة. على سبيل المثال، "تم اختيار كتابين بشكل عشوائي من مجموعة من 3 كتب قصص الغموض وروايتين. فما احتمال اختيار كتاب قصص الغموض ورواية؟" ينبغي أن يتلقى الطلاب توجيهًا لفهم أن حل المسائل الأبسط هي إستراتيجية يمكنهم الاستمرار في استخدامها طوال هذا المقرر وجميع مقررات الرياضيات.

الدروس المستفادة	السؤال التمهيدي
الدرس 10.5: احتمالات الأحداث المستقلة وغير المستقلة	
صف الأحداث على أنها مجموعات جزئية للفضاء العيني (مجموعة النتائج) باستخدام خصائص (أو فئات) النتائج، أو في صورة اتحادات أو تقاطعات أو متممات لأحداث أخرى ("أو"، "و"، "ليس"). افهم أن الحدثين A و B حدثان مستقلان إذا كان احتمال وقوع الحدثين A و B معًا هو ناتج ضرب احتمالاتهما، واستخدم هذه الخاصية لتحديد ما إذا كان الحدثان مستقلين أم لا.	زمي مكعبي أعداد. كيف تقارن الحدث "مجموع الأعداد يكون زوجيًا وأكبر من 12" بالحدث "مجموع الأعداد لا يكون زوجيًا وليس أكبر من 12"؟ **الحدث الأول يتضمن جميع المجاميع الزوجية الأكبر من 12، والحدث الثاني هو جميع المجاميع التي تقع بين 2 و 12 وجميعها مجاميع فردية.**
الدرس 10.6: احتمالات الأحداث المنفصلة	
طبّق قاعدة الجمع، $P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B)$، وفسّر الإجابة بما يتفق مع النموذج.	زمي مكعب أعداد ذو ستة أوجه. أوجد احتمال الاستقرار على عدد زوجي أو عدد أولي. اشرح لماذا يُعد الحدث غير منفصل. **0.8333؛ العدد 2 زوجي وأولي.**

نصيحة للتدريس م.م.ر 6

إن السؤال التمهيدي للدرس 10.5 يتناول **م.م.ر 6 (مراعاة الدقة)**. اطلب من الطلاب تفسير الاختلاف بين العبارة "مجموع الأعداد زوجي وأكبر من 12" والعبارة "مجموع الأعداد زوجي أو أكبر من 12". اطلب منهم ذكر قائمة بنتائج كل حدث ليروا الاختلاف بين النتائج. ثم اسألهم عما سيحدث إذا تم تطبيق "النفي" على كل عبارة. ويمكن للطلاب وضع قائمة مرتبة لتساعدهم على حل المسألة.

نصيحة للتدريس م.م.ر 4

يمكن للسؤال التمهيدي للدرس 10.2 الحث على مناقشة **م.م.ر 4 (استخدام نماذج الرياضيات)**. ابدأ بأن تطلب من الطلاب إيجاد إجمالي الأعمدة وإجمالي الصفوف. ثم ناقش كيفية استخدام الأعداد لإيجاد الاحتمالات. اطلب من الطلاب وضع جدول للتكرارات النسبية ومناقشة ما تمثله كل خانة في الجدول. وينبغي أن يفهم الطلاب أنه ما إن يتم وضع جدول من التكرارات النسبية، فيمكنهم استخدامها لإيجاد أي احتمال يتعلق بالحدث الممثل في الجدول.

10.2 استخدام التباديل والتوافيق مع الاحتمالات

المعايير

معايير الممارسات الرياضية:
1, 2, 3, 4, 6, 7

المتطلبات الأساسية

- استخدم مبدأ العد الأساسي.

مثال 1

نصيحة للتدريس م.م.ر 1

اطلب من الطلاب تحديد أي تكرار في الحروف وعدد المرات في كل حالة لتحديد قانون التباديل الصحيح لاستخدامه.

الأسئلة الداعمة

- ما وجه الاختلاف بين المجموعات الثلاث للأحرف؟ **تحتوي إحدى المجموعات على 8 أحرف، بينما تحتوي كل من المجموعتين الآخرتين على 6 أحرف؛ وتحتوي إحدى هاتين المجموعتين على أحرف متكررة بينما لا تحتوي الأخرى على أي تكرارات.**
- في الكسر العادي، يمكن التخلص من العامل المشترك 2 لتغيير $\frac{8}{2}$ إلى 4!. هل يمكن تقليل $\frac{8!}{2!}$ إلى 4!؟ **لا؛ (8 · 7 · 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1) بالقسمة على (2 · 1) تساوي (3 · 4 · 5 · 6 · 7 · 8)، وليس (1 · 2 · 3 · 4).**
- إذا كنت تستخدم أمر المضروب على الحاسبة، فما الذي يحدث إذا نسيت الأقواس وأدخلت $\frac{8!}{8-6!}$ بدلاً من $\frac{8!}{(8-6)!}$؟ **ستكون النتيجة 4320 بدلاً من 20،160 حيث إن 8! مقسومة على 8 بدلاً من 2! ثم يطرح منها 6!.**

10.2 استخدام التباديل والتوافيق مع الاحتمالات

الأهداف

- استخدام استخدام التباديل والتوافيق مع الاحتمالات لحل المسائل.
- استخدام استخدام التباديل والتوافيق مع الاحتمالات في الاحتمالات.

التباديل عبارة عن تنظيم للعناصر التي يكون ترتيبها ضروريًا. ويمكن استخدام التعبير $n!$، الذي يُقرأ مضروب n لحساب عدد تباديل n العناصر. و**مضروب** العدد الصحيح الموجب n، الذي يُكتب $n!$، هو حاصل ضرب الأعداد الصحيحة الموجبة الأقل من العدد n أو المساوية له.

المفهوم الأساسي

التباديل	التباديل مع التكرار	التباديل الدائرية
عدد تباديل n من العناصر المختلفة مأخوذة منها r عنصر في كل مرة ويرمز لها باستخدام $_nP_r$ ويتم الحصول عليه باستخدام $_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$	عدد التباديل القابلة للتمييز لعناصر عددها n ويتكرر فيها عنصر واحد بعدد r_1 مرة، بينما يتكرر فيها عنصر آخر بعدد r_2 مرة وهكذا، يساوي $\frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \ldots \cdot r_k!}$	عدد التباديل القابلة للتمييز لعناصر عددها n مرتبة في شكل دائرة بلا نقطة مرجعية ثابتة، يساوي $\frac{n!}{n}$ أو $(n-1)!$.

مثال 1 استكشاف التباديل

الاستكشاف يريد كل من هدى وأماني وسعيد إنشاء كلمة مرور مكونة من 6 أحرف من مربعات الحروف التالية.

حروف سعيد	حروف أماني	حروف هدى
F R Z F G Z	F R Z Q G M	F R Z L K Q G M

a. **تفسير المسائل** كم عدد كلمات المرور المحتملة التي يمكن أن تنشئها هدى بالحروف التي معها؟ اشرح.
20,160؛ 8 أحرف مأخوذ منها 6 في كل مرة، يساوي $_8P_6 = \frac{8!}{(8-6)!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!}$ أو 20,160.

b. **الحساب بدقة** كم عدد كلمات المرور المحتملة التي يمكن أن تنشئها أماني بالحروف التي معها؟ اشرح.
720؛ يوجد 6! أو 6 X 5 X 4 X 3 X 2 X 1 أو 720 تنظيمًا محتملاً ومرتبًا من الحروف.

c. **الحساب بدقة** كم عدد كلمات المرور المحتملة التي يمكن أن ينشئها سعيد بالحروف التي معه؟ اشرح.
180. عدد تباديل 6 أحرف فيها حرفان يتكرر كل منهما مرتين، يساوي $\frac{6!}{2!2!} = \frac{720}{4}$ أو 180.

معلومات أساسية رياضية

إن احتمال الحدث هو النسبة التي تحصل منها على $\frac{\text{عدد النتائج المفضلة}}{\text{عدد النتائج المحتملة}}$. في بعض الأحيان يكون عدد النتائج المحتملة في الفضاء العيني أسهل في التوصل إليه – فعلى سبيل المثال، يكون لإلقاء عملة معدنية نتيجتان محتملتان، الصورة والكتابة. في حالات أخرى، يكون عدد النتائج المحتملة بناء على عدد الطرق التي يمكن اختيار العناصر وترتيبها. في بعض الحالات، يمكن إيجاد عدد النتائج المحتملة بإيجاد عدد التباديل والتوافيق.

بالتباديل يكون الترتيب الذي توضع عليه العناصر مهمًا، أما التوافيق فلا يكون للترتيب الذي توضع عليه العناصر أهمية.

مثال 2

م.م.ر 1

نصيحة للتدريس

في **المثال 2**، يقدّم للطلاب مسألة من الحياة اليومية تطلب منهم تحليل السياق قبل أن يقرروا كيفية استخدام التباديل والتوافيق للإجابة على سؤال محدد. وبفهم متطلبات المسألة قبل بدء إجراء العمليات الحسابية، يمكن للطلاب تجنب تضييع الوقت في استخدامه القانون الخاطئ.

الأسئلة الداعمة

- لماذا يساوي n العدد 8 بدلاً من 10 في القانون الخاص بعدد التباديل للأعضاء الأربعة في المنتصف؟ **يوجد 2 من أعضاء فريق الشطرنج البالغ عددهم 10 في مواقعهم عند طرفي الصف، إذًا يوجد 8 أعضاء يمكن الاختيار منهم للمواضع البالغ عددها 4 في منتصف الصف.**
- كم عدد الطرق المختلفة التي يمكن بها اختيار 7 أعضاء من الأعضاء الـ 10 ومنحهم مقاعد على طاولة بها 7 مقاعد؟ **يوجد $_{10}C_7 = 120$ طريقة لاختيار 7 أعضاء و 720 ترتيبًا لهم على الطاولة، إذًا توجد $720 \times 120 = 86{,}400$ طريقة مختلفة.**

d. **التخمين** لمن كلمة المرور ذات الاحتمال الأدنى بأن يخمنها شخص ما عشوائيًا؟ وأي كلمة مرور لها الاحتمال الأعلى؟ اشرح استنتاجك.

الاحتمال الأقل: هدى؛ الاحتمال الأكثر: سعيد؛ احتمال أن يخمّن شخص ما كلمة مرور واحدة عشوائيًا يساوي $\frac{1}{\text{العدد المحتمل لكلمات المرور}}$، إذًا، $\frac{1}{180} < \frac{1}{720} < \frac{1}{20{,}160}$.

التوافيق عبارة عن تنظيم مجموعة من العناصر التي ليس لترتيبها أهمية.

المفهوم الأساسي التوافيق

عدد توافيق n من العناصر مأخوذة منها r عنصر في كل مرة، يرمز لها بالرمز $_nC_r$، ويتم الحصول عليه باستخدام

$$_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

عندما يكون الترتيب ضروريًا في المسألة، استخدم التباديل.
وعندما لا يكون الترتيب ضروريًا في المسألة، استخدم التوافيق.

مثال 2 استخدام استخدام التباديل والتوافيق مع الاحتمالات لحل المسائل

في المأدبة السنوية لنادي الشطرنج، ستُلتقط صورة فوتوغرافية لجميع الأعضاء العشرة. وسيقف ستة أعضاء في الصف الأمامي.

a. **التفكير بطريقة كمية** أدرج الأسماء في الجدول التالي لتوضيح أحد التنظيمات المحتملة في الصف الأول. هل ينبغي استخدام التوافيق أو التباديل لإيجاد العدد الإجمالي للمجموعات المحتملة المكونة من ستة أفراد للوقوف في الصف الأول؟ هل هذا مختلف عن إيجاد العدد الإجمالي للتنظيمات المحتملة للصف الأول؟ اشرح استنتاجك.

أعضاء نادي الشطرنج

الاسم	العام	الاسم	العام
أحمد	12	راشد	9
فهد	12	علي	12
جمال	10	حسام	12
حسن	11	محمد	11
حسين	12	خالد	10

استخدم التوافيق لإيجاد إجمالي عدد المجموعات المحتملة للوقوف في الصف الأول لأن الترتيب ليس ضروريًا. ولأن تغيير ترتيب الصف الأول سيؤدي إلى تنظيم مختلف، استخدم التباديل لإيجاد العدد الإجمالي للتنظيمات في الصف الأول.

b. **تفسير المسائل** أوجد العدد الإجمالي للمجموعات المحتملة المكونة من ستة أعضاء يقفون في الصف الأول. ما احتمال أن تكون المجموعة المكونة من ستة أعضاء التي اخترتها في **الجزء a** واقفة في الصف الأول؟ اشرح استنتاجك.

$\frac{10!}{6!(10-6)!} = 210$ العدد الإجمالي للمجموعات يساوي 210. وبما أن الموجودين هم 10 أعضاء، يوجد 210 مجموعات مختلفة من الأعضاء للوقوف في الصف الأول. احتمال أن تقف المجموعة التي اخترتها في الجزء a للوقوف في الصف الأول يساوي $\frac{1}{\text{العدد الإجمالي للمجموعات المحتملة}} = \frac{1}{210}$.

تلميح تقني

قد لا يكون بعض الطلاب على دراية بأن بحاسبة التمثيل البياني أمر المضروب. وفي العديد من الحاسبات، يمكن الوصول إلى هذا الأمر بالضغط على "MATH". بالضغط على السهم الأيمن لتحديد PRB للاحتمال، ثم الضغط على السهم لأسفل لتحديد "!". ويستخدم الأمر بالطباعة في صورة عدد (مثل 8) ثم اتباع التسلسل أعلاه والضغط على ENTER، مما يؤدي إلى علامة التعجب التي تظهر بعد العدد (مثل !8). بالضغط على إدخال ثانية يتم إجراء حساب المضروب. يستطيع الطلاب إجراء حساباتهم باستخدام أمر المضروب. على سبيل المثال، لحساب $_7P_5 = \frac{7!}{(7-5)!}$، يمكن للطلاب ببساطة إدخال !7 مقسومًا على !(5 – 7) اشرح للطلاب أنه لاستخدام خاصية $_nP_r$ على الحاسبة، يجب أن يدخلوا القيمة n أولاً. على سبيل المثال، لإيجاد قيمة $_7P_5$، أدخل أولاً 7، ثم $_nP_r$، وأخيرًا.

تمرين

التمرين 1 يمنح الطلاب خبرة في رؤية كيف يمكن استخدام التباديل والتوافيق في حل المسائل.

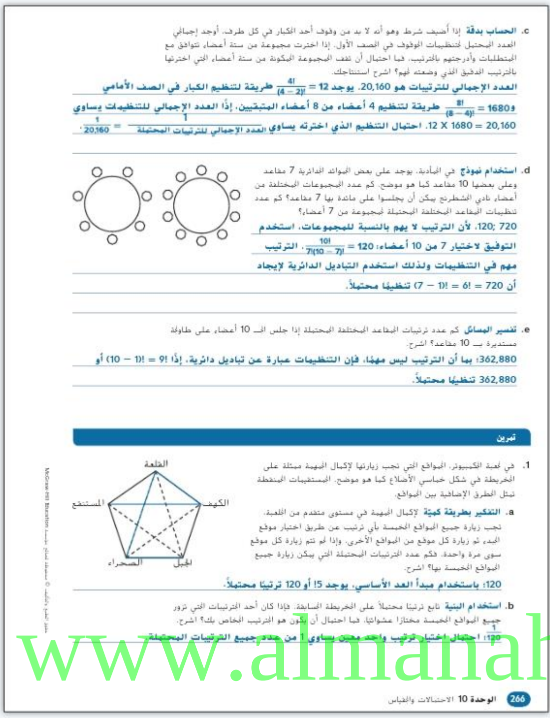
التمرين 2 يتحدى الطلاب لاستخدام التباديل أولاً لإيجاد عدد النتائج المحتملة في الفضاء العيني ثم لاستخدام هذا العدد لتحديد احتمال أن يكون إحدى النتائج مفضلة.

التمرين 3 يمنح الطلاب خبرة أكبر في التعليق على الاستنتاج واستخدام الاستدلال المجرد حيث يستكشفون التباديل والتوافيق.

التمرين 4 يطلب من الطلاب التمييز بين التباديل الخطية والتباديل الدائرية ومراعاة الدقة حيث يجرون الحسابات باستخدام القوانين الملائمة.

عرض المعايير

تمرين	م.م.ر.
1	2, 3, 7
2	7
3	3
4	2, 6



c. **الحساب بدقة** إذا أضيف شرط وهو أنه لا بد من وقوف أحد الكبار في كل طرف، أوجد إجمالي العدد المحتمل لتنظيمات الوقوف في الصف الأول. إذا اخترت مجموعة من ستة أعضاء تتوافق مع المتطلبات وأدرجتهم بالترتيب، فما احتمال أن تقف المجموعة المكونة من ستة أعضاء التي اخترتها بالترتيب الدقيق الذي وضعته لهم؟ اشرح استنتاجك.

العدد الإجمالي للترتيبات هو 20,160. يوجد $12 = \frac{4!}{(4-2)!}$ طريقة لتنظيم الكبار في الصف الأمامي و$1680 = \frac{8!}{(8-4)!}$ طريقة لتنظيم 4 أعضاء من 8 أعضاء المتبقيين. إذًا العدد الإجمالي للتنظيمات يساوي $20,160 = 12 \times 1680$. احتمال التنظيم الذي اخترته يساوي $\frac{1}{\text{العدد الإجمالي للترتيبات المحتملة}} = \frac{1}{20,160}$.

d. **استخدام نموذج** في المأدبة، يوجد على بعض الموائد الدائرية 7 مقاعد وعلى بعضها 10 مقاعد كما هو موضح. كم عدد المجموعات المختلفة من أعضاء نادي الشطرنج يمكن أن يجلسوا على مائدة بها 7 مقاعد؟ كم عدد تنظيمات المقاعد المختلفة المحتملة لمجموعة من 7 أعضاء؟

720 ;120، لأن الترتيب لا يهم بالنسبة للمجموعات، استخدم التوفيق لاختيار 7 من 10 أعضاء: $120 = \frac{10!}{7!(10-7)!}$. الترتيب مهم في التنظيمات ولذلك استخدم التباديل الدائرية لإيجاد أن $720 = 6! = (7-1)!$ تنظيمًا محتملاً.

e. **تفسير المسائل** كم عدد ترتيبات المقاعد المختلفة المحتملة إذا جلس الـ 10 أعضاء على طاولة مستديرة بـ 10 مقاعد؟ اشرح.

362,880؛ بما أن الترتيب ليس مهمًا، فإن التنظيمات عبارة عن تباديل دائرية. إذًا $9! = (10-1)!$ أو 362,880 تنظيمًا محتملاً.

تمرين

1. في لعبة الكمبيوتر، المواقع التي تجب زيارتها لإكمال المهمة ممثلة على الخريطة في شكل خماسي الأضلاع كما هو موضح. المستقيمات المنقطة تمثل الطرق الإضافية بين المواقع.

a. **التفكير بطريقة كميّة** لإكمال المهمة في مستوى متقدم من اللعبة، تجب زيارة جميع المواقع الخمسة بأي ترتيب عن طريق اختيار موقع البدء ثم زيارة كل موقع من المواقع الأخرى. وإذا لم تتم زيارة كل موقع سوى مرة واحدة، فكم عدد الترتيبات المحتملة التي يمكن زيارة جميع المواقع الخمسة بها؟ اشرح.

120؛ باستخدام مبدأ العد الأساسي، يوجد !5 أو 120 ترتيبًا محتملاً.

b. **استخدام البنية** تابع ترتيبًا محتملاً على الخريطة السابقة. فإذا كان أحد الترتيبات التي تزور جميع المواقع الخمسة مختارًا عشوائيًا، فما احتمال أن يكون هو الترتيب الخاص بك؟ اشرح.

$\frac{1}{120}$؛ احتمال اختيار ترتيب واحد معين يساوي 1 من عدد جميع الترتيبات المحتملة.

أخطاء شائعة

عند العمل بالتباديل والتوافيق، يقع الطلاب في أخطاء شائعة عند إجراء الحسابات. قد تتضمن مثل هذه الأخطاء التالي: تعيين قيم غير صحيحة للمتغيرات في القوانين؛ إلغاء بعض أجزاء التعابير بشكل غير صحيح في البسط والمقام، وخاصة مع المضروبات؛ نسيان وضع التعبير بين أقواس عند إدخال التعابير في حاسبة التمثيل البياني.

ومن إحدى الطرق لمنع هذه الأخطاء هو المبالغة في التحقق من الحسابات إما باستخدام حاسبة إذا تم إجراء الحل في الأصل باستخدام الورقة والقلم أو العكس.

c. **التفكير بطريقة كمية** في المستوى المبتدئ من اللعبة، أي 3 مواقع يمكن زيارتها بأي ترتيب لإكمال المهمة. كم عدد التوافيق المحتملة لثلاث مواقع لإكمال المهمة في المستوى المبتدئ؟ ما احتمال أن تكون المواقع الثلاثة مستنقعًا وصحراء وجبلاً؟ اشرح.

$\frac{1}{10}$؛ 10، عدد توافيق 5 مواقع مأخوذ منها 3 في كل مرة يساوي $10 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5!}{(5-3)!3!}$ إذًا، احتمال أن يمر الطريق المختار عشوائيًا بهذه المواقع الثلاثة يساوي $\frac{1}{10}$.

d. **بناء الفرضيات** في المستوى المتوسط، يجب أن يزور اللاعبون 4 مواقع من أصل 5 مواقع. فإذا كان كل موقع لا تتم زيارته إلا مرة واحدة، فهل ستوجد طرق إضافية لإكمال المهمة إذا كان الترتيب ضروريًا أو إذا لم يكن الترتيب ضروريًا؟ برر إجابتك.

ستوجد طرق أخرى إذا كان الترتيب مهمًا؛ $\frac{5!}{1!} = \frac{5!}{(5-4)!} = {}_5P_4$ أو $\frac{5!}{4!} = \frac{5!}{(5-4)!4!} = {}_5C_4$؛ 120 أو 5.

2. **إيجاد نمط** في متجر لأغراض الحفلات، اشترت والدة رغد الحروف المقطعة التالية. ما احتمال إذا نظمت والدة رغد جميع الحروف عشوائيًا أنها ستكون العبارة "طريق رغد للذهاب" بصرف النظر عن المسافات بين الكلمات؟ اشرح استنتاجك.

د	غ	ل	ذ	ه	ب	ل	ي	ر	ا	ق	ر	ط

$\frac{1}{43,243,200}$، عدد تباديل 13 حرفًا يُكرر فيها الحرفان O و A 3 مرات ويُكرر الحرفان T و Y مرتين يساوي $\frac{6,227,020,800}{144} = \frac{13!}{3!3!2!2!}$ أو 43,243,200.

3. **التعليق على طريقة استنتاج الآخرين** يقول أحمد إن عدد الطرق n التي يمكن ترتيب العناصر بها إذا كان الترتيب ضروريًا يساوي عدد تباديل n العناصر المأخوذة من $n - 1$ في كل مرة. هل توافق أحمد؟ برر إجابتك.

نعم؛ عدد الطرق n التي يمكن تنظيم العناصر بها يساوي $n!$ عدد تباديل n العناصر المأخوذ منها $n - 1$ في كل مرة يساوي $n! = \frac{n!}{1!} = \frac{n!}{(n-(n-1))!} = {}_nP_{n-1}$.

4. صنعت مريم عقودًا دائرية من 12 حجر ميلاد. بعض العقود تضم حلية ذهبية على شكل قلب بينما لا تضم عقود أخرى تلك الحلية كما هو موضح.

a. **الحسب بدقة** إذا صنعت مريم عقدًا من 12 حجر ميلاد مختلفًا منظمين عشوائيًا. ما احتمال أن يتم تنظيمها بترتيب تاريخي على حسب الشهور؟ اشرح.

$\frac{1}{39,916,800}$، تنظيم أحجار الميلاد عبارة عن تباديل دائرية، إذًا يوجد $11! = (12-1)!$ أو 39,916,800 تنظيم محتمل، واحد منها يتم تنظيمه زمنيًا حسب الشهور.

b. **التفكير بطريقة كمية** كم عدد العقود التي يمكن أن تصنعها مريم بأحجار الميلاد حتى يكون شهر يناير وفبراير بجانب بعضهما البعض؟

7,257,600، يمكن ترتيب حجري الميلاد لشهري يناير وفبراير بطريقتين، وهما يمثلان نقطة مرجعية والترتيب يهم لذا يمكن ترتيب أحجار الميلاد الـ 10 المتبقية بعدد $10! = 3,628,800$ طريقة. العدد الإجمالي للطرق التي سيكون فيها حجرا الميلاد تاليين لبعضهما يساوي $(3,628,800)(2) = 7,257,600$.

نصيحة للتدريس

م.م.ر 8

بينما يحل الطلاب عددًا متزايدًا من المسائل تنطوي على تباديل وتوافيق، وكذلك الاحتمال، يبدؤون في ملاحظة الأنماط التي تميز بشكل أفضل المواقف التي تمثل بالتباديل الخطية والتباديل مع التكرار والتباديل الدائرية والتوافيق وما إلى ذلك.

الأسئلة الداعمة

- ما الأنماط التي تساعدك على تحديد أن قانون التباديل بالتكرار ينبغي أن يستخدم لإيجاد عدد النتائج المحتملة في **التمرين 2**؟ **الترتيب هام؛ تتضمن التباديل جميع العناصر؛ بعض العناصر ممثلة بالقيم التي تتكرر عدة مرات.**
- ما الأنماط التي تساعدك على تحديد أي القوانين تستخدم في **التمرين 4**؟ **كلما تم ترتيب العناصر على شكل دائرة، ينبغي أن يدرك الطلاب أنه يمكنهم استخدام قانون التباديل الدائرية ما لم يكن هناك نقطة مرجعية ثابتة، وفي هذه الحالة تكون التباديل خطية.**
- ما الأنماط التي تساعدك على تحديد ما إن كان يتعين استخدام التباديل أم التوافيق لإيجاد النتائج المحتملة؟ **إذا كان الترتيب مهمًا، فاستخدم التباديل وإذا كان الترتيب غير مهم، فاستخدم التوافيق.**

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

استخدم **التمرينين 1d** و **3** للاستمرار في المناقشة المستمرة للممارسة **م. م. ر 3 (بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين)**، بالتركيز على التباديل والتوافيق. في **التمرين 1d**، يبرر الطلاب إجاباتهم بشأن كيفية تأثر عدد النتائج المحتملة اعتمادًا على ما إذا كان الترتيب مهمًا أم لا. في **التمرين 3**، يعلق الطلاب على طريقة الاستنتاج لطالب يقدم جملة عامة حول العلاقات بين الأنواع المختلفة للتباديل.

شجع الطلاب على أن يتعودوا على التعليق على طريقة استنتاجهم حول التباديل والتوافيق واستنتاج الآخرين إن أمكن. ويوجد العديد من الأخطاء المحتملة التي يتعين تجنبها بما في ذلك عدم تحديد ما إن كان الترتيب مهمًا أم لا، واختيار القانون غير الصحيح وإجراء الحسابات بشكل غير صحيح. وينبغي أن يحلل المواقف بشكل منطقي في البداية لتجنب الأخطاء اللاحقة في حلولهم.

10.3 الاحتمالات الهندسية

الأهداف

- استخدام التباديل والتوافيق لحساب احتمالات الأحداث المركبة.
- استخدام التباديل والتوافيق لحل المسائل التي تتضمن الاحتمال.

يمكن استخدام الإستراتيجيات التي تستخدمها لحساب عدد النتائج في التباديل والتوافيق، من أجل تحديد **الاحتمال**.

المفهوم الأساسي

أكمل الجدول بكتابة المعلومات المفقودة.

الاحتمال
الاحتمال هو نسبة عدد النتائج المفضلة بالتساوي مع النتائج المحتملة إلى عدد الاحتمالات بالتساوي مع النتائج المحتملة. $P(\text{الحدث}) = \frac{\text{عدد النتائج المفضلة}}{\text{عدد النتائج المحتملة}}$

يمكن حل المسائل من الحياة اليومية التي تتضمن الاحتمال باستخدام التباديل والتوافيق لحساب عدد كلٍ من النتائج المفضلة والمحتملة.

مثال 1 استكشاف الاحتمال مع التباديل والتوافيق

الاستكشاف باعتبار ذلك من إستراتيجيات المبيعات، يعلن صاحب صالون حلاقة أنه في اليوم الأول من كل شهر، سيحصل أول 6 عملاء على أحد القسائم الموضحة على اليسار للحصول على خصم من إجمالي الفاتورة. وتُعطى كل قسيمة عشوائيًا إلى عميل مختلف وقد تُستخدم مرة واحدة فقط.

خصم 10%	خصم 5%
خصم 20%	خصم 15%
خصم 50%	خصم 25%

a. **التفكير بطريقة كمية** ما احتمال أن يحصل أول عميل في 1 مايو على تخفيض 10% وثاني عميل على 25%؟ اشرح باستخدام النتائج المفضلة والمحتملة.

$\frac{1}{30}$؛ يوجد 6 قسائم محتملة لأول عميل، و5 قسائم محتملة للعميل الثاني، وهكذا. إذًا إجمالي عدد النتائج المحتملة يساوي $720 = !6$. إذا حصل العميل الأول على قسيمة بقيمة 10% وحصل العميل الثاني على قسيمة بقيمة 25%، فعندئذ يوجد $24 = !4$ طريقة يمكن أن يحصل بها العملاء الأربعة المتبقون على القسائم. إذًا عدد النتائج المفضلة يساوي 24. الاحتمال هو $\frac{\text{عدد النتائج المفضلة}}{\text{عدد النتائج المحتملة}} = \frac{1}{30} = \frac{24}{720}$.

268 الوحدة 10 الاحتمالات والقياس

المعايير

المعايير الخاصة بالممارسات في الرياضيات: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8

المتطلبات الأساسية

- استخدم مبدأ العد الأساسي.
- أوجد عدد التباديل أو التوافيق لعدة مواقف.

مثال 1

نصيحة للتدريس م.م.ر 1

بينما يحاول الطلاب إيجاد الاحتمالات لعدة مواقف في **المثال 1**، يحاولون تحليل العلاقات بين العملاء والخصومات التي سيتلقونها. ومن المهم أن يفهم الطلاب متى يكون الترتيب مهمًا ومتى لا يكون مهمًا حيث سيحدد ذلك ما إن كانت التباديل أو التوافيق تستخدم لحساب النتائج.

الأسئلة الداعمة

- هل هناك أي تغيير في المسألة عند اعتبار المجموعة الثانية من العملاء الثلاثة بدلاً من الأولى؟ **لا؛ سيكون الحل والعملية مماثلة إذا تم اعتبار أي ثلاثة عملاء.**
- كيف يتأثر الاحتمال عندما تكون العلاقات مرتبة وغير مرتبة؟ **عادة ما يقل الاحتمال حيث يوجد مزيد من النتائج المحتملة في التباديل عن التوافيق.**

معلومات أساسية رياضية

استخدم الطلاب التباديل والتوافيق لحساب عدد النتائج المحتملة في الفضاء العيني. والآن يطبقون نفس هذه الإستراتيجيات لحساب كل من النتائج المحتملة والنتائج المفضلة بالترتيب لكتابة نسب الاحتمال بالصورة $\frac{\text{عدد النتائج المفضلة}}{\text{عدد النتائج المحتملة}}$.

إذا كان الترتيب مهمًا، يمكن حساب عدد النتائج المحتملة أو المفضلة باستخدام نوع التباديل. إذا لم يكن الترتيب مهمًا، يمكن استخدام التوافيق.

b. **تفسير المسائل** كم عدد المجموعات المختلفة من القسيمتين التي يمكن أن يتسلمهما أول عميلين في 1 أغسطس بصرف النظر عن الترتيب؟ علمًا بمجموعة مكونة من قسيمتين. كم عدد الطرق المختلفة التي يمكن توزيع هاتين القسيمتين من خلالها على أول عميلين؟ كيف يمكن استخدام ذلك في حساب الاحتمال في **الجزء a**؟

عدد التوافيق للقسائم التي قد يأخذها أول عميلين يساوي $_6C_2 = 15$ وعدد الطرق المختلفة التي يمكن منح القسيمتين بها لأول عميلين يساوي $2 = 2!$. النتيجة في الجزء a هي النتيجة المفضلة وبها تكون القسيمتين المختارتين هما 10% و 25% ويُمنحوا بذلك الترتيب. وهذا يعني أن تلك هي النتيجة المفضلة للمسألة $15 \times 2 = 30$ نتيجة محتملة، وهي الاحتمال ذاته الموجود في الجزء a.

c. **تفسير المسائل** ما وجه الاختلاف بين إيجاد احتمال أن يحصل أول 3 عملاء على خصومات بمقدار 50% و 25% و 20% على الترتيب، وبين إيجاد احتمال أن يحصل أول 3 عملاء على تلك الخصومات وفقًا لأي ترتيب؟

إذا كان الترتيب مهمًا، فإن عدد النتائج المفضلة يساوي 1. عدد النتائج المحتملة يساوي عدد تباديل 6 خصومات مكونة من 3 خصومات في المرة؛ $_6P_3 = \frac{6!}{(6-3)!}$ أو 120. إذا لم يكن الترتيب ضروريًا، فإن عدد النتائج المحتملة يساوي عدد توافيق 6 خصومات من 3 في المرة؛ $_6C_3 = \frac{6!}{(6-3)!3!}$ أو 20. تظل نتيجة واحدة مفضلة موجودة؛ وهي اختيار قسائم 50% و25% و20%. إذًا، الاحتمالات تساوي $\frac{1}{120}$ و $\frac{1}{20}$.

d. **إيجاد نمط** يضيف صاحب الصالون قسيمة أخرى خاصة؛ في اليوم الخامس عشر من كل شهر، وتُمنح كل قسيمة من أصل 15 قسيمة موضحة عشوائيًا إلى أحد العملاء. ما احتمال أن توزَّع جميع قسائم 10% أولاً، وجميع قسائم 20% ثانيًا، وجميع قسائم 25% ثالثًا وقسيمة 50% أخيرًا؟ اشرح.

خصم 20%
4 قسائم
خصم 10%
7 قسائم
خصم 50%
1 قسائم
خصم 25%
3 قسائم

$\frac{1}{1,801,800}$. عدد النتائج المحتملة يساوي عدد التباديل ذات التكرار؛ $\frac{15!}{7!4!3!}$ أو 1,801,800. عدد النتائج المفضلة يساوي 1 من تلك التباديل. إذًا، الاحتمال يساوي $\frac{1}{1,801,800}$.

يمكنك استخدام التباديل والتوافيق لإيجاد احتمالات **الأحداث المركبة** التي تشتمل على اثنين أو أكثر من الأحداث البسيطة.

مثال 2 **حل المسائل باستخدام التباديل والتوافيق**

تبرع كل متخرج من 12 متخرجًا بزرع شجرة في أرض المدرسة باعتبار ذلك جزءًا من مشروع تجميل المدرسة. أنواع الأشجار موضحة في الجدول. ستوجد علامة بجانب كل شجرة تحمل اسم المتبرع.

الأشجار المتبرع بزراعتها	
النوع	عدد الأشجار
الكرز	5
القرانيا	4
التفاح	2
البرعم الأحمر	1

a. **استخدام الأدوات** إذا تمت زراعة الأشجار في صف واحد بشكل عشوائي، فما احتمال أن تكون بالترتيب الأبجدي حسب اسم المتبرع؟ اشرح.

$\frac{1}{479,001,600}$. ليس من الضروري التفكير في التكرار لأن أسماء المتبرعين مدرجة. الترتيب ضروري، وبالتالي عدد النتائج المحتملة يساوي عدد تباديل 12 شجرة بالأسماء؛ $479,001,600 = 12!$. ولا يوجد سوى نتيجة واحدة مفضلة: الأشجار بالترتيب الأبجدي على حسب أسماء المتبرعين. إذًا، $\frac{\text{عدد النتائج المفضلة}}{\text{عدد النتائج المحتملة}} = \frac{1}{479,001,600}$.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

استخدم **المثال 2** لبدء مناقشة م.م.ر 5 **(استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية)**. بالتركيز على الفوائد باستخدام التكنولوجيا مقابل الورقة والقلم لحساب الاحتمالات باستخدام التباديل والتوافيق. شجع الطلاب على التعبير عما يحبونه ويكرهونه بشأن كل من الطريقتين.

على سبيل المثال، من أحد مزايا استخدام التكنولوجيا أنها أكثر سرعة في العادة. فعدن الحاجة لإيجاد !12، تأتي الحاسبات بالنتائج المنطقية سريًا. على الجانب الآخر، عندما تتطلب المسألة إيجاد عدد التوافيق لعدد 12 عنصر بأخذ 4 منهم في المرة، وإجراء الحسابات خطوة بخطوة بالورقة والقلم، يوفر ذلك فهمًا عميقًا للمسألة يختلف عن إدخال $\frac{12!}{(8!4!)}$ بالحاسبة.

مثال 2

نصيحة للتدريس

م.م.ر 1

في **التمرين 2**، يطلب من الطلاب التفكير بطريقة تجريدية وكميّة مع كل طريقة تتمم الأخرى. وأكد على أهمية التمهل في تحليل المسألة بحيث تكون طريقة العد والقانون المستخدم صحيحًا.

الأسئلة الداعمة

- كيف يكون الموقف في **الجزء b** مختلفًا عن الموقف في **الجزء a**؟ **الترتيب مهم في الجزء a ولا يكون مهمًا في الجزء b.**
- كيف يمكنك استخدام المعلومات في المسألة لمساعدتك على تحديد ما إن كان الترتيب مهمًا أم لا؟ **انتبه للكلمات الدليلية التي تمنحك تلميحات. على سبيل المثال، في الجزء a يمكن للعبارات مثل "في صف" و"الترتيب الهجائي" توضيح أن الترتيب مهم. أما في الجزء b، توضح الكلمة "قريب" تجميع بدون ترتيب.**
- كيف يتأثر الاحتمال في **الجزء e** إذا كان لا بد من زرع شجرة في موضع الشمال الأقصى للدائرة؟ **لوجود شجرة واحدة في موضع ثابت، ستكون الحسابات بالتباديل الخطية بدلاً من الدائرية. وسيظل عدد النتائج المحتملة المفضل 1، ولكن سيوجد !12 نتيجة محتملة، مما سيؤدي إلى احتمال $\frac{1}{479,001,600}$.**

مثال 2

نصيحة للتدريس

م.م.ر 7

قد يستخدم بعض الطلاب حساباتهم لإيجاد قيمة كل تعبير للمضروب، مثل استبدال !10 بقيمة 3,628,800 في **الجزء d** في **التمرين 2**. قد ينتظر الطلاب الآخرون ويكتبون نسب الاحتمال بجميع القيم التي توجد في صورة مضروب. ثم يمكنهم استخدام بنية النسبة لمساعدتهم على التوسع في المضروب، قسمة العوامل المشتركة وتحويل نسبة الاحتمال لأبسط صورة.

الأسئلة الداعمة

- يحل طالب **الجزء c** من **المثال 2** ويقول أن الاحتمال هو $\frac{1}{81} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9}$ لأن هناك احتمال $\frac{1}{9}$ أن تكون شجرة أماني هي الأولى جهة اليسار واحتمال $\frac{1}{9}$ أن تكون شجرة عبود هي الثانية من اليسار. ما خطأ الطالب؟ **لا يفهم الطالب أن شجرة أماني تم زرعها باحتمال $\frac{1}{9}$ بينما يكون لشجرة عبود الآن 8 مواقع محتملة فقط ليتم زرعها.**
- ما الطريقة الأخرى لاستخدام بنية نسبة الاحتمال لإيجاد الاحتمال في **الجزء c**؟ **توسيع كل من تعبيرات المضروب بشكل كامل، قسمة العوامل المشتركة والتحويل لأبسط صورة:**

$$\frac{\cancel{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{9 \cdot 8 \cdot \cancel{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{1}{72}$$

- يقول الطالب أن نسبة الاحتمال في **الجزء f** هي $\frac{8!}{5!2!}$. فهل توافقه؟ **لا؛ هذه النسبة لإيجاد عدد التباديل بالتكرار. وتساوي نسبة الاحتمال**

$$\frac{1}{\frac{8!}{5!2!}} \text{ or } \frac{1}{168}$$

---

b. **استخدام الاستنتاج** إذا تم اختيار 4 شجرات عشوائيًا، وتم زرعهم بالقرب من مدخل المدرسة، فما احتمال أن تكون أشجار القرانيا؟ اشرح.

$\frac{1}{495}$، الترتيب لا يهم، لذا عدد النتائج المحتملة هو عدد توافيق 12 شجرة مأخوذ منها 4 أشجار في كل مرة: $\frac{12!}{(12-4)!4!}$ أو 495. توجد نتيجة مفضلة واحدة فقط وهو اختيار أشجار القرانيا الأربعة، بأي ترتيب.

c. **استخدام البنية** تبرع كل من أماني وعبود بشجرة من أشجار الكرز الخمسة. إذا زرعت جميع أشجار الكرز والقرانيا التسعة عشوائيًا في صف، فما احتمال أن تكون شجرة أماني هي أول شجرة على اليسار؟ وإذا اخترت أول شجرة على اليسار بالفعل، فما احتمال أن تكون شجرة عبود هي الثانية؟ استخدم تلك الاحتمالات لإيجاد احتمال أن تكون شجرة أماني هي الأولى على اليسار وشجرة عبود هي الثانية. اشرح.

$\frac{1}{72}$؛ احتمال أن تكون شجرة أماني هي الأولى على اليسار يساوي $\frac{1}{9}$. إذا أختيرت الشجرة الأولى على اليسار بالفعل، فإن احتمال أن تكون شجرة عبود هي الثانية يساوي $\frac{1}{8}$. احتمال أن تكون شجرة أماني هي الأولى على اليسار وشجرة عبود هي الثانية يساوي $\frac{1}{72} = \frac{1}{9} \times \frac{1}{8}$.

d. **تفسير المسائل** إذا زرعت جميع الأشجار التي عددها 12 في صف، فما احتمال أن تزرع شجرتا التفاح في الموضع الأول والأخير؟

$\frac{1}{66}$، إذا زُرعت شجرتا التفاح في نهايتي الصف، فإن عدد التنظيمات للعشرة أشجار الأخرى يساوي التباديل مع أشجار الكرز مكررة 5 مرات، وأشجار القرانيا 4 مرات، وشجرة البرعم الأحمر مرة واحدة فقط. يوجد $1260 = \frac{10!}{5!4!}$ نتيجة مفضلة. إجمالي عدد التنظيمات لعدد 12 شجرة يساوي التباديل مع أشجار الكرز مكررة 5 مرات، والقرانيا 4 مرات والتفاح مرتين والبرعم الأحمر مرة واحدة. يوجد $83{,}160 = \frac{12!}{5!4!2!}$ نتيجة إجمالي لذا الاحتمال يساوي $\frac{1}{66} = \frac{1260}{83{,}160}$.

e. **استخدام البنية** إذا زرعت أشجار الكرز والتفاح بشكل عشوائي في شكل دائرة كما هو موضح. فما احتمال أن تكون الأشجار بالترتيب الأبجدي حسب اسم المتبرع؟ اشرح.

$\frac{1}{720}$، عدد النتائج المحتملة للتباديل الدائرية يساوي !(1 − 7) أو 720، ويوجد نتيجة مفضلة واحدة.

f. **التعليق على طريقة استنتاج الآخرين** لنفترض أن أشجار الكرز والتفاح والبرعم الأحمر زرعت عشوائيًا في صف واحد. تقول لمياء إن احتمال زراعة شجرة البرعم الأحمر أولاً ويليها جميع أشجار التفاح ثم جميع أشجار الكرز يساوي $\frac{1}{40{,}320}$. هل لمياء على صواب؟ إذا كانت غير ذلك، فاكتشف الخطأ وصححه.

لا؛ فقد حسبت لمياء عدد النتائج المحتملة لتباديل 8 أشجار دون تكرار: !8 أو 40,320. مع التكرار، يكون عدد التباديل هو $\frac{8!}{5!2!}$ أو 168. توجد نتيجة مفضلة واحدة، لذا الاحتمال الصحيح هو $\frac{1}{168}$.

تمرين

1. **استخدام البنية** إذا أدرجت الأعداد 1 و 2 و 3 و 4 و 5 و 6 بترتيب عشوائي، فما احتمال أن يكون مجموع أول عددين يساوي 7؟ اشرح.
$\frac{1}{120}$، مجموع أول عددين سيساوي 7 إذا وُضع 1 و 6، أو 2 و 5، أو 3 و 4 أولاً. ولأن الترتيب مهم، فإنه يوجد 6 نتائج مفضلة. وإجمالي عدد النتائج يساوي تباديل 6 أعداد أو 720 = !6. الاحتمال يساوي $\frac{6}{720} = \frac{1}{120}$.

2. **استخدام الأدوات** درجات امتحان نصف الفصل الدراسي في الرياضيات موضحة على اليسار. إذا نُظمت أوراق الامتحان في رزمة، فما احتمال أن يكون أول 5 اختبارات هي الحاصلة على أعلى 5 درجات، بالترتيب التنازلي؟ اشرح.

درجات امتحان نصف الفصل الدراسي				
86	93	71	62	95
51	75	90	100	88
86	71	72	82	55
60	75	74	95	86

$\frac{1}{930{,}240}$، أعلى 5 درجات هي 100 و 95 و 95 و 93 و 90. توجد نتيجة واحدة مفضلة. يمكن إيجاد احتمال أن يكون أعلى 5 درجات في الأعلى بترتيب تنازلي عن طريق ضرب احتمال أن يكون أعلى 5 درجات في الأعلى في احتمال أن يكون الترتيب تنازليًا. عدد توافيق 5 اختبارات يساوي $_{20}C_5 = 15{,}504$ إذًا احتمال أن يكون أعلى 5 درجات في الأعلى يساوي $\frac{1}{15{,}504}$. عدد الطرق التي يمكن تنظيم أعلى 5 درجات بها يساوي التباديل مع درجة مكررة مرتين، إذًا $\frac{5!}{2!} = 60$. احتمال أن يكون أعلى 5 درجات بترتيب تنازلي يساوي $\frac{1}{60}$. احتمال أن يكون أعلى 5 درجات في الأعلى يساوي $\frac{1}{15{,}504} \times \frac{1}{60} = \frac{1}{930{,}240}$.

3. **استخدام نموذج** تحتوي سلة تخفيضات في المتجر على 15 علبة من حساء الطماطم المركز. ومن بين تلك العلب الخمسة عشر، توجد 7 علب بها انبعاج. إذا اختارت ميادة 4 علب عشوائيًا من السلة، فما احتمال أن تكون جميع العلب الأربعة بها انبعاج؟ اشرح.
$\frac{1}{39}$، النتائج المحتملة: $_{15}C_4 = \frac{15!}{(15-4)!4!}$ أو 1365، النتائج المفضلة: $_{7}C_4 = \frac{7!}{(7-4)!4!}$ أو 35. إذًا، الاحتمال يساوي $\frac{35}{1365}$ أو $\frac{1}{39}$.

4. **التعليق على الاستنتاج** عندما يعاد ترتيب 10 مربعات الأحرف التالية، فإنها تكوّن كلمة غير مألوفة لأنها تحتوي على ثلاثة أزواج متتالية من الحروف المزدوجة. يقول خالد إنه ليس ضروريًا معرفة الكلمة بالترتيب لحساب احتمال أن يكون التنظيم العشوائي للحروف العشرة هو الكلمة. هل خالد على صواب؟ برر إجابتك.

P	E	K	E	O	B	R	O	E	K

نعم؛ عدد النتائج المحتملة يساوي عدد التباديل لعدد 10 أحرف مع التكرار: $\frac{10!}{3!2!2!}$ أو 151,200. عدد النتائج المفضلة هو 1. إذًا، احتمال أن يكوّن الترتيب العشوائي كلمة معاد ترتيبها (BOOKKEEPER) يساوي $\frac{1}{151{,}200}$.

تمرين

التمرين 1 يطلب من الطلاب استخدام التباديل لإيجاد الاحتمال.

التمرين 2 يطلب من الطلاب حل مسألة من الحياة اليومية باستخدام التباديل والتوافيق.

في **التمرين 3**، يستخدم الطلاب التوافيق لحل مسألة احتمال تتضمن الأحداث المركبة.

التمرين 4 يطلب من الطلاب التعليق على فرضية طالب آخر والتي تتعلق حل مسألة الاحتمال التي تتضمن التباديل.

عرض المعايير

التمرين	م.م.ر
1	7
2	5
3	4
4	3

أخطاء شائعة

عند العمل بمسائل الاحتمالات، قد يقع خطأ في الأعداد نتيجة لعدم التمهل في فهم المسألة تمامًا.

على سبيل المثال، قد يقرأ الطالب **التمرين 4** بسرعة ويستخدم !10 لإيجاد النتائج، ويفكر بشكل خاطئ أنه ينبغي تجاهل تكرار الأحرف نظرًا لأن العبارة مرتبة بشكل عشوائي.

المعايير

معايير الممارسات في الرياضيات:
1, 2, 4, 6

المتطلبات الأساسية

- حساب احتمالات الأحداث المستقلة والمنفصلة والمتممة
- حساب الاحتمالات المشروطة

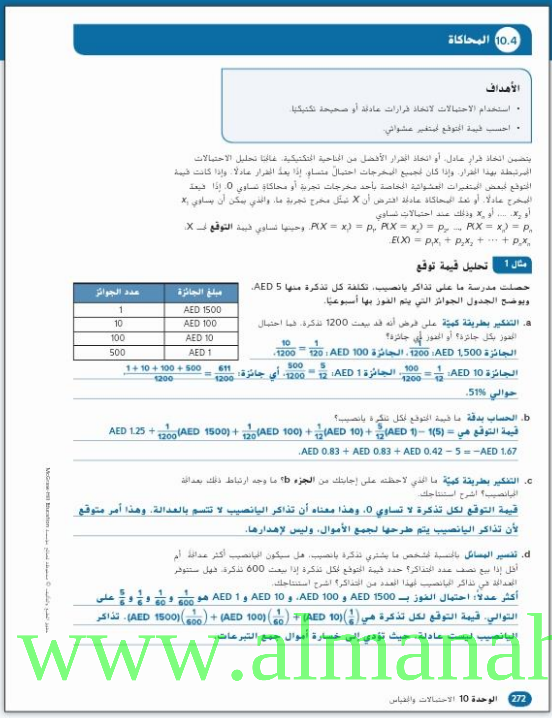
مثال 1

نصيحة للتدريس م.م.ر 2

يستخدم مبدأ قيمة التوقع كثيرًا لتقييم اتخاذ القرار بتحديد التوقع الرياضي للنتائج المحتملة. وإذا لزم الأمر، فساعد الطلاب في فهم طبيعة الكميات والعلاقات بينها.

الأسئلة الداعمة

- إذا كان احتمال الفوز بأي جائزة أكبر من 50%، فكيف يكون اليانصيب سليمًا ومتوازنًا؟ **إن الاحتمال وحده لا يحدد مدى سلامة اليانصيب وتوازنه، حيث يجب أخذ سعر التذكرة ومبالغ الجوائز في الحسبان.**
- إذا كانت قيمة التوقع للفوز لتذكرة واحدة أكبر من قيمة التذكرة، فكيف سيكون ذلك في صالح المدرسة أم حامل التذكرة؟ **حامل التذكرة**



10.4 المحاكاة

الأهداف
- استخدام الاحتمالات لاتخاذ قرارات عادلة أو صحيحة تكتيكيا.
- احسب قيمة التوقع لمتغير عشوائي.

يتضمن اتخاذ قرارٍ عادل، أو اتخاذ القرار الأفضل من الناحية التكتيكية، غالبًا تحليل الاحتمالات المرتبطة بهذا القرار. وإذا كان لجميع المخرجات احتمالٌ متساوٍ، إذًا يعدّ القرار عادلًا. وإذا كانت قيمة التوقع لبعض المتغيرات العشوائية الخاصة بأحد مخرجات تجربة أو محاكاة تساوي 0، إذًا فيعدّ المخرج عادلًا. أو تعدّ المحاكاة عادلة افترض أن X تمثّل مخرج تجربة ما، والذي يمكن أن يساوي x_1 أو x_2، ...، أو x_n وذلك عند احتمالات تساوي $P(X = x_1) = p_1, P(X = x_2) = p_2, ..., P(X = x_n) = p_n$. وحينها تساوي قيمة **التوقع** لـ X: $E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n$.

مثال 1 تحليل قيمة توقع

حصلت مدرسة ما على تذاكر يانصيب، تكلفة كل تذكرة منها AED 5، ويوضح الجدول الجوائز التي يتم الفوز بها أسبوعيًا.

مبلغ الجائزة	عدد الجوائز
AED 1500	1
AED 100	10
AED 10	100
AED 1	500

a. **التفكير بطريقة كميّة** على فرض أنه قد بيعت 1200 تذكرة، فما احتمال الفوز بكل جائزة؟ أو الفوز بأي جائزة؟
الجائزة AED 1,500: $\frac{1}{1200}$، الجائزة AED 100: $\frac{1}{120} = \frac{10}{1200}$، الجائزة AED 10: $\frac{1}{12} = \frac{100}{1200}$، الجائزة AED 1: $\frac{5}{12} = \frac{500}{1200}$، أي جائزة: $\frac{611}{1200} = \frac{1 + 10 + 100 + 500}{1200}$، حوالي 51%.

b. **الحساب بدقة** ما قيمة التوقع لكل تذكرة يانصيب؟
قيمة التوقع هي = $\frac{1}{1200}(\text{AED } 1500) + \frac{1}{120}(\text{AED } 100) + \frac{1}{12}(\text{AED } 10) + \frac{5}{12}(\text{AED } 1) - 1(5) = \text{AED } 1.25 + \text{AED } 0.83 + \text{AED } 0.83 + \text{AED } 0.42 - 5 = -\text{AED } 1.67$.

c. **التفكير بطريقة كميّة** ما الذي لاحظته على إجابتك من **الجزء b**؟ ما وجه ارتباط ذلك بعدالة اليانصيب؟ اشرح استنتاجك.
قيمة التوقع لكل تذكرة لا تساوي 0، وهذا معناه أن تذاكر اليانصيب لا تتسم بالعدالة. وهذا أمر متوقع لأن تذاكر اليانصيب يتم طرحها لجمع الأموال، وليس لإهدارها.

d. **تفسير المسائل** بالنسبة لشخص ما يشتري تذكرة يانصيب، هل سيكون اليانصيب أكثر عدالةً أم أقل إذا بيع نصف عدد التذاكر؟ حدد قيمة التوقع لكل تذكرة إذا بيعت 600 تذكرة، فهل ستتوفر العدالة في تذاكر اليانصيب لهذا العدد من التذاكر؟ اشرح استنتاجك.
أكثر عدلاً؛ احتمال الفوز بـ AED 1500 و AED 100، و AED 10 و AED 1 هو $\frac{1}{600}$ و $\frac{1}{60}$ و $\frac{1}{6}$ و $\frac{5}{6}$ على التوالي. قيمة التوقع لكل تذكرة هي $(\text{AED } 1500)\left(\frac{1}{600}\right) + (\text{AED } 100)\left(\frac{1}{60}\right) + (\text{AED } 10)\left(\frac{1}{6}\right)$... تذاكر اليانصيب ليست عادلة، حيث تؤدي إلى خسارة أموال جمع التبرعات.

272 الوحدة 10 الاحتمالات والقياس

معلومات أساسية رياضية

يُقدّم مفهوم قيمة التوقع على أنه أداة مفيدة عند تقييم اتخاذ القرار الذي ينطوي على احتمالات (انظر **مثال 1** بشكل خاص). ولم يتم تقديم المفهوم المتعلق بالمتغير العشوائي بالرغم من استخدامه ضمنيًا لتحديد قيمة التوقع. وينبغي التأكيد على أن قيمة التوقع عبارة عن متوسط يتوقعه المرء للنتيجة ويتم إيجاده باستخدام احتمالات النتائج.

مثال 2

م.م.ر 1

نصيحة للتدريس

شجع الطلاب على التفكير في مدى سلامة قرار تحديد الطالب الأول وتوازنه بناءً على نتائج **الجزء a** فحسب. وينبغي أن يتّضح للطلاب أن المسابقة لن تكون عادلةً ومتوازنةً ما لم يكن لكل فتاة فرصة متساوية في الفوز.

الأسئلة الداعمة

- كيف يمكن استخدام سحب ماصات الشرب لتحديد أي الفتيات ستكون الأولى؟ **الإجابة النموذجية: اجمع أربع ماصات على أن تكون إحداهن أقصر من الأخريات. واطلب من كل فتاة سحب ماصة؛ وستكون الفتاة التي ستسحب الماصة القصيرة هي الفائزة.**
- هل يعتبر تصويت الطلاب على من تكون الأولى سليمًا ومتوازنًا؟ **لا؛ حيث إن التصويت ليس عشوائيًا، وبالتالي فلن يكون هناك احتمال متساوٍ لكل فتاة بالفوز.**

مثال 2 حدد عدالة المسابقة

ينوي المجلس الطلابي اختيار أكثر طالبةٍ تميّزًا من أصل أربع طالباتٍ من السنة الأخيرة.

a. **تفسير المسائل** ترمي حجرا نرد وبستخدم مجموع العددين الظاهرين لتحديد أكثر طالبة تميّزًا. تخصص للفتاة الأولى المجاميع 2 و 4 و 8. بينما تخصص للفتاة الثانية المجاميع 3 و 6 و 11. وتخصص للثالثة المجاميع 5 و 9 و 12. ويخصص للرابعة المجموعان 7 و 10. حدد احتمال انتقاء كل من الفتيات لتكون أكثر طالبة تميّزًا.
من بين كل 36 احتمالاً، توجد دائمًا طريقة واحدة لدحرجة حجري النرد والحصول على مجموع 2، وتوجد طريقتان للحصول على مجموع 3، وثلاث طرق للحصول على مجموع 4، وأربعة طرق للحصول على مجموع 5، وخمس طرق للحصول على مجموع 6، وست طرق للحصول على مجموع 7، وخمس طرق للحصول على مجموع 8، وأربع طرق للحصول على مجموع 9، وثلاث طرق للحصول على مجموع 10، وطريقتان للحصول على مجموع 11، وطريقة وحدة للحصول على مجموع 12. لذا احتمال اختيار الفتاة الأولى هو $\frac{1+3+5}{36} = \frac{1}{4}$، والفتاة الثانية $\frac{2+5+2}{36} = \frac{1}{4}$ والفتاة الثالثة $\frac{4+4+1}{36} = \frac{1}{4}$، والفتاة الرابعة $\frac{6+3}{36} = \frac{1}{4}$.

b. **التفكير بطريقة كميّة** حدد ما إذا كانت هذه الطريقة عادلة لتحديد الفتاة التي ستكون الطالبة المتميزة. واشرح استنتاجك.
احتمال اختيار كل فتاة متساوٍ، إذًا العدالة متوفرة.

غالبًا ما يتضمن اتخاذ القرارات للعديد من المواقف إستراتيجية يتم اتخاذ القرار بناءً عليها. ومثل هذه المواقف ربما تتضمن احتمالات ونموذجًا هندسيًا.

مثال 3 اتخاذ القرارات

سيتم استخدام مولّد أعداد عشوائيًا لتحديد الطلاب الذين ثم وضعهم في الفصل.

a. **استخدام نموذج** سيلزم توزيع الطلاب على ثلاثة فصول. وسوف يُستخدم مولّد أعداد عشوائية لتوليد عدد صحيح يتراوح بين 1 و 20 لكل طالب. فإذا كان الرقم عبارة عن مضاعف للعدد 3، فسوف ينسب الطالب إلى الفصل A، وإذا كان العدد مضاعفًا للعدد 4، فسوف ينسب الطالب إلى الفصل B، أما إذا كان مضاعفًا للعدد 5، فسوف ينسب الطالب إلى الفصل C. حدد احتمال تخصيص أي طالب إلى كل فصل.
يوجد 6 مضاعفات للعدد 3، لذا فإن احتمال التخصيص إلى الفصل A هو $\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$، على نحو مماثل، الفصل B له الاحتمال $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ والفصل C له الاحتمال $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$.

b. **التفكير بطريقة كميّة** هل هذه وسيلةٌ عادلة لاتخاذ قرار؟ اشرح استنتاجك.
لا؛ فاحتمال جميع المخرجات ليس متساويًا.

c. **التواصل بدقة** ما التغيير الذي يمكن إحداثه في عملية اتخاذ القرار ليكون عادلاً؟ اشرح.
الإجابة النموذجية: يمكن استخدام مولد أعداد عشوائية لتوليد أحد الأرقام 1 أو 2 أو 3 لكل طالب. وإذا كان الرقم الذي تم توليده هو 1، فسيتم تخصيص الطالب إلى الفصل A، أما إذا كان 2 فسيتم التخصيص إلى الفصل B؛ وإذا كان 3، فسيتم التخصيص إلى الفصل C. ونظرًا لما سبق سيكون احتمال التخصيص إلى كل فصل متساوٍ، مما يجعل عملية اتخاذ القرار عادلة.

تلميح تقني

تضم أوراق البيانات وحاسبات التمثيل البياني وظائف للأعداد العشوائية يمكن استخدامها لإنشاء نماذج محاكاة. وبالنسبة **للمثال 3**، اطلب من الطلاب محاكاة الحالة باستخدام حاسبة التمثيل البياني أو ورقة البيانات. وكثيرًا ما يوجد في حاسبة التمثيل البياني نماذج محاكاة لدحرجة حجر نرد. ويمكن استخدام هذا التطبيق لتمثيل حالة من **المثال 2**.

مثال 3

نصيحة للتدريس

م.م.ر 6

شجع الطلاب على السعي لانتهاج البساطة عند تشكيل نظام لاتخاذ قرار منصف. وتسمح البساطة بمزيد من الوضوح والفهم لعملية اتخاذ القرار.

الأسئلة الداعمة

- اذكر مثالاً على موقف قد يحتاج فيه الطلاب إلى الانتشار في غرف الصف باستخدام أداةٍ غير سليمةٍ ولا متوازنةٍ لاتخاذ قرار. **الإجابة النموذجية: إذا أرادت المدرسة موازنة كل غرفة صف بناءً على درجات الطلاب. فقد تضع وسيلة اتخاذ القرار غير السليمة والمتوازنة العديد من الطلاب أصحاب أعلى الدرجات عشوائيًا في غرفة الصف الدراسي نفسها.**
- كيف يمكن استخدام سحب ماصات الشرب بمثابة طريقةٍ سليمةٍ ومتوازنةٍ لتوزيع الطلاب على الصفوف؟ **الإجابة النموذجية: اطلب من الطلاب سحب ثلاث ماصات بأطوال مختلفة ووضع الطالب في غرفة الصف المقابلة.**

تمرين

1. يُستخدم مولد أعداد عشوائية لتحديد اللاعبين الذين سيختارون لكل فريق.

a. **تفسير المسائل** يلزم تقسيم اللاعبين بين فريقين. A يُستخدم مولد أعداد عشوائية لتعيين عدد صحيح من 1 إلى 19 لكل لاعب. إذا كان العدد زوجيًا فسيكون اللاعب ضمن الفريق A. أما إذا كان فرديًا فسيكون اللاعب ضمن الفريق B. احسب احتمال فرز كل لاعب في كل فريق، واحسب احتمال الفرز إلى كل فريق. هل هذه طريقةٌ عادلةٌ لاتخاذ القرار؟ اشرح استنتاجك.

توجد 10 أعداد فردية من 1 إلى 19 و 9 أعداد زوجية. لذا احتمال التعيين إلى الفريق A هو $\frac{9}{19}$ أما احتمال التعيين إلى الفريق B هو $\frac{10}{19}$. لا؛ فاحتمالات جميع المخرجات ليست متساوية.

b. **التواصل بدقة** ما التغيير الذي يمكن إحداثه في عملية اتخاذ القرار لتكون عادلة؟ اشرح.

بإمكان مولد الأعداد العشوائي توليد عدد صحيح من 1 إلى 20 وبالتالي توجد فرصة متساوية لأعداد زوجية وفردية.

2. طُرحت تذاكر يانصيب لجمع الأموال في لعبة كرة السلة بمدرسة ثانوية. وهناك جائزة واحدة قيمتها AED 100 وجائزتان بقيمة AED 50 وثلاث جوائز بقيمة AED 10.

a. **الحساب بدقة** إذا اشتُريت 500 تذكرة يانصيب، فاحسب احتمال الفوز بكل جائزة من الجوائز واحتمال الفوز بأية جائزة.

احتمال الفوز بـــ AED 100 هو $\frac{1}{500}$، والفوز بـــ AED 50 هو $\frac{1}{250} = \frac{2}{500}$، والفوز بـــ AED 10 هو $\frac{3}{500}$، والفوز بأي جائزة هو $\frac{3}{250} = \frac{6}{500} = \frac{3}{500} + \frac{2}{500} + \frac{1}{500}$.

b. **تفسير المسائل** إذا كانت تكلفة كل تذكرة يانصيب هي AED 2، فأوجد قيمة التوقع لكل تذكرة.

قيمة التوقع للتذكرة هي: $\frac{1}{500}(\text{AED } 100) + \frac{1}{250}(\text{AED } 50) + \frac{3}{500}(\text{AED } 10) - \text{AED } 2 = -\text{AED } 1.54$

c. **التفكير بطريقة كمية** هل تذكرة اليانصيب هذه عادلة؟ اشرح.

اليانصيب ليس عادلاً لأن قيمة التوقع لكل تذكرة لا تساوي صفرًا. وهذا متوقع لأن اليانصيب يُوزع لجمع الأموال.

3. **استخدام نموذج** يحتاج مدرس إلى تقسيم صفٍ دراسي من الطلاب إلى خمس مجموعات.

a. بمجرد جلوس الطلاب بالفعل، قرر المدرس البدء بالطالب الجالس أقصى يسار الصف الأمامي وخصص لهذا الطالب العدد 1. ثم خصص العدد 2 للطالب التالي، وهكذا. ثم يعاود الكرة ويخصص العدد 1 بعد كل خمسة طلاب. حدد احتمال فرز الطلاب إلى كل مجموعة من المجموعات الخمس.

بمجرد جلوس الطلاب، يكتمل تحديد المجموعة التي سيكون فيها كل طالب، وذلك بناءً على موضع جلوس الطالب في الفصل. ويوجد احتمال بنسبة 1 بأن كل طالب سيكون في المجموعة المتوافقة واحتمال آخر بنسبة 0 بأن كل طالب سيكون في أي مجموعة أخرى.

أخطاء شائعة

من الأخطاء الشائعة عند حساب قيمة التوقع إغفال واحدة أو أكثر من النتائج المحتملة. وتكون المخططات الشجرية ومخططات الفضاء العيني من الأدوات المفيدة لتجنب هذا الخطأ.

تمرين

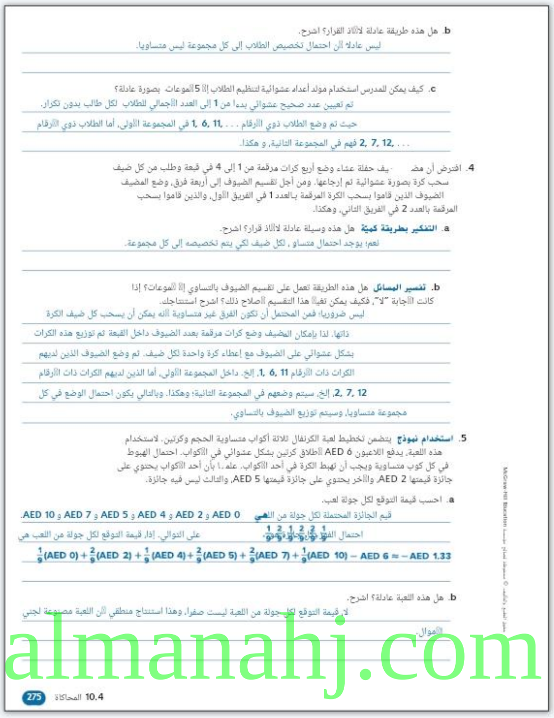
في **التمارين 1 و 3 و 4**. يحلل الطلاب مدى سلامة أداة اتخاذ القرار المستخدمة في إنشاء الفرق والمجموعات وتوازنها.

في **التمرين 2**. يحدد الطلاب مدى سلامة يانصيب وتوازنه ويفسرون النتائج في السياق.

التمرين 5 يطلب من الطلاب تحديد مدى سلامة لعبة كرنفال وإنصافها في استخدام قيمة التوقع.

عرض المعايير

تمرين	م.م.ر
1	1, 6
2	1, 2, 6
3	4
4	1, 2
5	4



b. هل هذه طريقة عادلة لاتخاذ القرار؟ اشرح.
ليس عادلاً لأن احتمال تخصيص الطلاب إلى كل مجموعة ليس متساويا.

c. كيف يمكن للمدرس استخدام مولد أعداد عشوائية لتنظيم الطلاب إلى 5 مجموعات بصورة عادلة؟
تم تعيين عدد صحيح عشوائي بدءا من 1 إلى العدد الإجمالي للطلاب لكل طالب بدون تكرار. حيث تم وضع الطلاب ذوي الأرقام . . . ,11 ,6 ,1 في المجموعة الأولى، أما الطلاب ذوي الأرقام . . . ,12 ,7 ,2 فهم في المجموعة الثانية، و هكذا.

4. افترض أن مضيف حفلة عشاء وضع أربع كرات مرقمة من 1 إلى 4 في قبعة وطلب من كل ضيف سحب كرة بصورة عشوائية ثم إرجاعها. ومن أجل تقسيم الضيوف إلى أربعة فرق، وضع المضيف الضيوف الذين قاموا بسحب الكرة المرقمة بالعدد 1 في الفريق الأول، والذين قاموا بسحب المرقمة بالعدد 2 في الفريق الثاني، وهكذا.

a. **التفكير بطريقة كمية** هل هذه وسيلة عادلة لاتخاذ قرار؟ اشرح.
نعم؛ يوجد احتمال متساو، لكل ضيف لكي يتم تخصيصه إلى كل مجموعة.

b. **تفسير المسائل** هل هذه الطريقة تعمل على تقسيم الضيوف بالتساوي إلى مجموعات؟ إذا كانت الإجابة "لا"، فكيف يمكن تغيير هذا التقسيم لإصلاح ذلك؟ اشرح استنتاجك.
ليس ضروريا؛ فمن المحتمل أن تكون الفرق غير متساوية لأنه يمكن أن يسحب كل ضيف الكرة ذاتها. لذا بإمكان المضيف وضع كرات مرقمة بعدد الضيوف داخل القبعة ثم توزيع هذه الكرات بشكل عشوائي على الضيوف مع إعطاء كرة واحدة لكل ضيف. ثم وضع الضيوف الذين لديهم الكرات ذات الأرقام 11 ,6 ,1، إلخ. داخل المجموعة الأولى، أما الذين لديهم الكرات ذات الأرقام 12 ,7 ,2، إلخ، سيتم وضعهم في المجموعة الثانية؛ وهكذا. وبالتالي يكون احتمال الوضع في كل مجموعة متساويا، وسيتم توزيع الضيوف بالتساوي.

5. **استخدام نموذج** يتضمن تخطيط لعبة الكرنفال ثلاثة أكواب متساوية الحجم وكرتين. لاستخدام هذه اللعبة، يدفع اللاعبون AED 6 لإطلاق كرتين بشكل عشوائي في الأكواب. احتمال الهبوط في كل كوب متساوية ويجب أن تهبط الكرة في أحد الأكواب. علماً بأن أحد الأكواب يحتوي على جائزة قيمتها AED 2، والآخر يحتوي على جائزة قيمتها AED 5، والثالث ليس فيه جائزة.

a. احسب قيمة التوقع لكل جولة لعب.
قيم الجائزة المحتملة لكل جولة من اللعب هي AED 0 و AED 2 و AED 4 و AED 5 و AED 7 و AED 10.
احتمال الفوز بكل جائزة هو $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9}$ على التوالي. إذا، قيمة التوقع لكل جولة من اللعب هي

$$\frac{1}{9}(AED\ 0) + \frac{2}{9}(AED\ 2) + \frac{1}{9}(AED\ 4) + \frac{2}{9}(AED\ 5) + \frac{2}{9}(AED\ 7) + \frac{1}{9}(AED\ 10) - AED\ 6 \approx -AED\ 1.33$$

b. هل هذه اللعبة عادلة؟ اشرح.
لا، قيمة التوقع لكل جولة من اللعبة ليست صفرا، وهذا استنتاج منطقي لأن اللعبة مصنوعة لجني الأموال.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

يوجد في هذا الدرس العديد من الفرص للتمرن على **م.م.ر 2 (التفكير بطريقة تجريدية وكميّة)**. في **التمرين 4**. يجب على الطلاب استخدام العلاقات الكمية لتحديد إن كانت أداة اتخاذ القرار سليمةً ومتوازنةً أم لا. ويجب أن يفهموا متطلبات الأداة السليمة والمتوازنة لاتخاذ القرار بناء على احتمال وقوع كل مخرج متضمن. وفي **التمرين 2**. يجب أن يربط الطلاب بين قيمة التوقع والمتغير العشوائي لسلامة اليانصيب وتوازنه.

10.5 احتمالات الأحداث المستقلة وغير المستقلة

المعايير

معايير الممارسات الرياضية:
1, 2, 3, 4, 7

المتطلبات الأساسية

- استخدم مبدأ العد الأساسي.
- إيجاد الاحتمالات البسيطة

مثال 1

نصيحة للتدريس
م.م.ر 2

يقدم إيجاد الاحتمالات للأحداث المستقلة وغير المستقلة للطلاب العديد من الفرص للتفكير بطريقة كمّيّة. اطلب من الطلاب التفكير بشأن الاختيار بالاستبدال وبدونه وعدد العناصر المتضمنة والعلاقات بين هذه الكميات.

10.5 احتمالات الأحداث المستقلة وغير المستقلة

الأهداف

- حدد هل الحدثان مستقلان أو غير مستقلين.
- قم بإيجاد احتمالات الأحداث المستقلة وغير المستقلة.

تتكون **الأحداث المركبة** من حدثين بسيطين أو أكثر.
لنفترض أن الحدث المركب يتكون من الحدثين A و B. إذا كانت نتيجة الحدث A لا تؤثر على نتيجة الحدث B، فإن الحدثين A و B عبارة عن **حدثين مستقلين**. وإذا كانت نتيجة الحدث A تؤثر على نتيجة الحدث B أو العكس، فإن الحدثين A و B عبارة عن **حدثين غير مستقلين**. واحتمال وقوع الحدث B الذي يدل على وقوع الحدث A يتم تمثيله باستخدام $P(B|A)$.

المفهوم الأساسي

احتمال وقوع حدثين مستقلين	احتمال وقوع حدثين غير مستقلين
احتمال وقوع كلا الحدثين المستقلين هو ناتج ضرب احتمالات كل حدث بمفرده.	احتمال وقوع كلا الحدثين غير المستقلين هو ناتج ضرب احتمال وقوع الحدث الأول، واحتمال وقوع الحدث الثاني مع العلم بأن الحدث الأول قد حدث بالفعل.
إذا كان الحدثان A و B مستقلين، إذًا $P(A \text{ and } B) = P(A) \times P(B)$.	إذا كان الحدثان A و B غير مستقلين، إذًا $P(A \text{ and } B) = P(A) \times P(B|A)$.

قبل إيجاد احتمال الحدث المركب، قرر ما إذا كان يتكون من أحداث مستقلة أو غير مستقلة.

مثال 1 استكشاف الأحداث المستقلة وغير المستقلة

الاستكشاف يصمم كل من مريم وحسين وحمزة ومصطفى لعبة لمهرجان مدرسي، وتتكون اللعبة من حوض سباحة صغير مملوء بالبط المصنوع من المطاط، وبعض البط مكتوب في أسفله رموز لجوائز. يمكن أن تُتاح الفرصة للاعبين حتى يختاروا بطة. وللبدء، وضع كل طالب خطة كما هو موضح في الجدول.

خطط للعبة البط			
الاسم	إجمالي عدد البط	عدد البط الرابح	هل يتم استبدال البط؟
مريم	200	30	Y
حسين	300	30	N
حمزة	300	25	Y
مصطفى	200	20	N

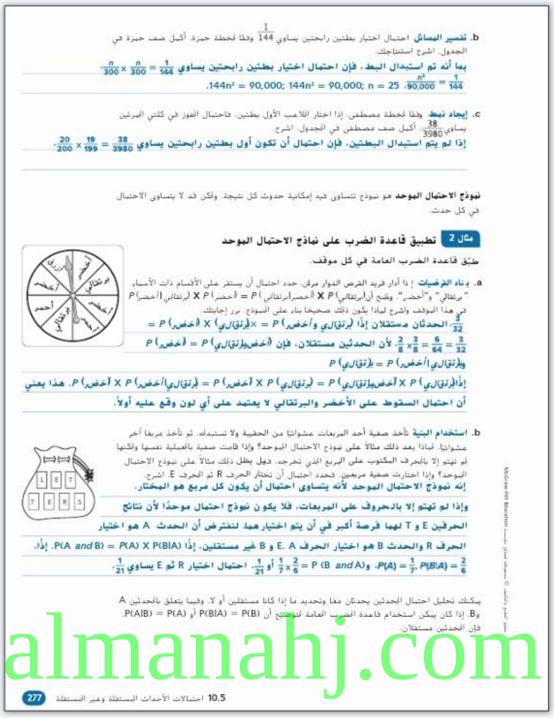
a. **التفكير بطريقة كمية** افترض أن اللاعب الأول اختار بطتين. فهل احتمال اختيار البطة الرابحة هو ذاته بالنسبة للبطة الأولى والثانية بناء على خطة مريم؟ وبناء على خطة حسين؟ هل احتمال الفوز في كلتي المرتين أكبر بناء على خطة مريم أم بناءً على خطة حسين؟ اشرح.

الأحداث في خطة مريم مستقلة لأن البط يُستبدل. وبناء على خطة حسين، فالأحداث غير مستقلة لأن البط لا يُستبدل. وللفوز في كلا المرتين وفقًا لخطة مريم، $P(W \text{ and } W) = P(W) \times P(W) = \frac{30}{200} \times \frac{30}{200}$ أو $\frac{9}{400}$. وفقًا لخطة حسين، $P(W \text{ and } W) = P(W) \times P(W|W) = \frac{30}{300} \times \frac{29}{299}$ أو $\frac{29}{2990}$. لأن $\frac{29}{2990} < \frac{9}{400}$، احتمال الفوز في كلتا المرتين أكبر بناء على خطة مريم.

معلومات أساسية رياضية

عندما يكون حدثان مستقلين، فإن احتمال وقوعهما معًا يساوي ناتج ضرب احتمالاتهما. وأيضًا عندما يساوي احتمال وقوع الحدثين معًا ناتج ضرب احتمالاتهما، يكون الحدثان مستقلين.

على سبيل المثال، من خلال معرفة التعليقات على حدثين A و B. إذا كان $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{4}$ و $P(A \text{ and } B) = \frac{1}{8}$، إذًا A و B مستقلان.


b. **تفسير المسائل** احتمال اختيار بطتين رابحتين يساوي $\frac{1}{144}$ وفقًا لخطة حمزة. أكمل صف حمزة في الجدول. اشرح استنتاجك.

بما أنه تم استبدال البط، فإن احتمال اختيار بطتين رابحتين يساوي $\frac{1}{144} = \frac{n}{300} \times \frac{n}{300}$
$\frac{1}{144} = \frac{n^2}{90,000}$، $144n^2 = 90,000$; $144n^2 = 90,000$; $n = 25$.

c. **إيجاد نمط** وفقًا لخطة مصطفى، إذا اختار اللاعب الأول بطتين، فاحتمال الفوز في كلتي المرتين يساوي $\frac{38}{3980}$. أكمل صف مصطفى في الجدول. اشرح.
إذا لم يتم استبدال البطتين، فإن احتمال أن تكون أول بطتين رابحتين يساوي $\frac{38}{3980} = \frac{19}{199} \times \frac{20}{200}$.

نموذج الاحتمال الموحد هو نموذج تتساوى فيه إمكانية حدوث كل نتيجة. ولكن قد لا يتساوى الاحتمال في كل حدث.

مثال 2 تطبيق قاعدة الضرب على نماذج الاحتمال الموحد

طبّق قاعدة الضرب العامة في كل موقف.

a. **بناء الفرضيات** إذا أدار فريد القرص الدوار مرتين. حدد احتمال أن يستقر على الأقسام ذات الأسماء "برتقالي" و"أخضر". وضح أن P(برتقالي) X P(أخضر|برتقالي) = P(أخضر) X P(برتقالي|أخضر) P في هذا الموقف واشرح لماذا يكون ذلك صحيحًا بناء على النموذج. برر إجابتك.
الحدثان مستقلان إذًا P(برتقالي وأخضر) = P(برتقالي) × P(أخضر) = $\frac{3}{32}$
$\frac{3}{32} = \frac{6}{64} = \frac{3}{8} \times \frac{2}{8}$. لأن الحدثين مستقلان، فإن P(أخضر|برتقالي) = P(أخضر)
وP(برتقالي|أخضر) = P(برتقالي)
إذًا P(برتقالي) X P(أخضر|برتقالي) = P(برتقالي) X P(أخضر) = P(برتقالي|أخضر) X P(أخضر). هذا يعني أن احتمال السقوط على الأخضر والبرتقالي لا يعتمد على أي لون وقع عليه أولاً.

b. **استخدام البنية** تأخذ صفية أحد المربعات عشوائيًا من الحقيبة ولا تستبدله. ثم تأخذ مربعًا آخر عشوائيًا. لماذا يعد ذلك مثالاً على نموذج الاحتمال الموحد؟ وإذا قامت صفية بالعملية نفسها ولكنها لم تهتم إلا بالحرف المكتوب على المربع الذي تخرجه، فهل يظل ذلك مثالاً على نموذج الاحتمال الموحد؟ وإذا اختارت صفية مربعين، فحدد احتمال أن تختار الحرف R ثم الحرف E. اشرح.
إنه نموذج الاحتمال الموحد لأنه يتساوى احتمال أن يكون كل مربع هو المختار.
وإذا لم تهتم إلا بالحروف على المربعات، فلا يكون نموذج احتمال موحدًا لأن نتائج الحرفين E و T لهما فرصة أكبر في أن يتم اختيارهما. لنفترض أن الحدث A هو اختيار الحرف R والحدث B هو اختيار الحرف E. A و B غير مستقلين. إذًا $P(A\ and\ B) = P(A) \times P(B|A)$. إذًا، $P(A) = \frac{1}{7}$، $P(B|A) = \frac{2}{6}$ و$P(B\ and\ A) = \frac{1}{7} \times \frac{2}{6}$ أو $\frac{1}{21}$. احتمال اختيار R ثم E يساوي $\frac{1}{21}$.

يمكنك تحليل احتمال الحدثين يحدثان معًا وتحديد ما إذا كانا مستقلين أو لا. وفيما يتعلق بالحدثين A وB، إذا كان يمكن استخدام قاعدة الضرب العامة لتوضيح أن $P(B|A) = P(B)$ أو $P(A|B) = P(A)$، فإن الحدثين مستقلان.

الأسئلة الداعمة

- ما الأحداث في **الجزء A**؟ **اختيار بطة واختيار بطة أخرى.**
- كيف يمكنك معرفة إن كانت الأحداث مستقلة أم لا؟ **إذا تم استبدال البطة بعد كل اختيار، فإن احتمال الحدث الأول لا يؤثر على احتمال الحدث الثاني، وبالتالي فإن الأحداث مستقلة.**

مثال 2

نصيحة للتدريس
م.م.ر 7

اشرح الفارق بين النتائج والأحداث في نماذج الاحتمالات الموحدة. على سبيل المثال، في **الجزء A**، تكون النتيجة قطاعًا مرقمًا ويمكن أن يؤدي الحدث إلى قطاع أخضر. وما إن يتم تحديد الأحداث بصفتها مستقلة أو غير مستقلة يمكن استخدامها قاعدة الضرب لإيجاد احتمالات الأحداث المركبة.

الأسئلة الداعمة

- ما الحدثان في كل موقف؟ **تدوير القرص الدوار مرتين؛ سحب مربعي أحرف.**
- كيف يمكنك استخدام المعطيات في كل موقف لتحديد ما إن كانت الأحداث مستقلة أم غير مستقلة؟ **لا تؤثر نتيجة المرة الأولى للتدوير على نتيجة المرة الثانية، إذًا فالحدثان مستقلان؛ يؤثر سحب أول مربع حرف من الكيس على نتيجة سحب المربع الثاني، وبالتالي فالحدثان غير مستقلين.**
- هل يمكن استخدام قاعدة الضرب العامة فقط لنماذج الاحتمالات الموحدة؟ **لا؛ تصلح القاعدة لإيجاد احتمال أي أحداث مستقلة أو غير مستقلة.**

التدريس المتمايز

قد يستفيد المتعلمون بالطريقة الحسية الحركية من استخدام العناصر مثل أقلام التلوين أو البلي لتعزيز فهمهم للأحداث المستقلة أو غير المستقلة. على سبيل المثال، بالإضافة إلى الفهم التجريدي لحقيقة أن اختيار عنصر وعدم استبداله لا يؤثر على النتيجة عند اختيار العنصر التالي، يمكن للطلاب ترتيب العناصر لتوضيح عدد النتائج المفضلة كجزء من العدد الإجمالي لنتائج الحدث.

في المواقف التي تتضمن أشخاصًا وليس عناصر، قد يستفيد المتعلمون بالطريقة الحسية الحركية من تمثيل عملية الاختيار.

مثال 3

نصيحة للتدريس

م.م.ر 1

بينما يستلزم إيجاد احتمالات الأحداث غير المستقلة والمستقلة الحساب، فهناك أيضًا متطلب أن يتمكن الطلاب من استكشاف المسألة الأولى وتحليل العلاقات بين الأحداث. إذا تم تحديد الأحداث بشكل غير صحيح على أنها مستقلة أو العكس، فمن المحتمل للغاية أن يكون النموذج برمته غير صحيح.

الأسئلة الداعمة

- ما وجه الاختلاف بين العلاقة بين الأحداث في **الجزء B** عن العلاقات بين الأحداث في **الجزء A** و**الجزء c**؟ **تتأثر نتيجة الحدث الأول في الجزء B باحتمالية وقوع الحدث الثاني وبالتالي تكون الأحداث غير مستقلة. بينما تكون الأحداث في الجزء A والجزء c مستقلة.**
- اذكر مثالاً من الحياة اليومية للأحداث غير المستقلة التي تنطوي على شطائر. **ستحتاج إلى اختيار اثنتين من الشطائر لصديقين؛ ثم تُخرج إحدى الشطيرتين من المبرد ثم تخرج الثانية دون استبدال واحدة بأخرى.**

مثال 3 **تحديد الأحداث المستقلة**

أثناء النزهة، يوجد مبرّد وبداخله بعض الزجاجات. يحتوي الجدول على بعض المعلومات عن المحتويات، ولكن توجد معلومات أخرى ناقصة.

المشروبات في المبرد	
نوع العصير	عدد الزجاجات
البرتقال	8
التوت البري	1
العنب	1
التفاح	4
الإجمالي	14

a. **التفكير بطريقة كميّة** افترض أن سليم يأخذ زجاجة واحدة عشوائيًا ويستبدلها. ثم يأخذ زجاجة أخرى عشوائيًا ويستبدلها. فإذا كان احتمال أن تكون الزجاجة الأولى عصير توت بري والزجاجة الثانية عصير عنب يساوي $\frac{1}{196}$، ما المعلومات التي يمكن أن تدرجها في الجدول؟ هل الحدثان مستقلان؟ اشرح.

يمكنك تحديد أنه يوجد 14 زجاجة عصير في المبرد. وبما أن سليم استبدل الزجاجة الأولى، فإن الحدثين مستقلان. إذًا، $P(A$ و $B) = P(A) \times P(B)$. إذا كان n هو عدد الزجاجات، فإن $P(A) = \frac{1}{n}$، $P(B) = \frac{1}{n}$ و $P(A$ و $B) = \frac{1}{n^2} = \frac{1}{196}$. إذًا، $n^2 = 196$ و $n = 14$.

b. **تفسير المسائل** تأخذ جودي زجاجة عصير عشوائيًا وتحتفظ بها. ثم تأخذ زجاجة أخرى. استخدم قاعدة الضرب العامة لتحديد ما إذا كان الحدثان مستقلين أم لا. احتمال أن يكون كلا المشروبين عصير تفاح يساوي $\frac{12}{182}$ أو $\frac{6}{91}$. إذا وضعت جودي بعد ذلك الزجاجات مرة أخرى في المبرد، فما هي المعلومات التي يمكن أن تدرجها في الجدول بناءً على هذه المعرفة؟ اشرح.

الحدثان غير مستقلين. على سبيل المثال، P (التوت البري) $= \frac{1}{14}$ و P (التوت البري | التفاح) $= \frac{1}{13}$. لأن P (التوت البري | التفاح) $\neq P$ (التوت البري)، فلا يمكن أن يكون الحدثان مستقلين. توجد 4 زجاجات عصير تفاح و 8 زجاجات عصير برتقال. لم تستبدل جودي الزجاجة الأولى. إذًا $P(A)$ له المقام 14، و $P(B)$ له المقام 13، و $13 \times 14 = 182$، الذي هو مقام احتمال أن تكون كلتا الزجاجتين عصير تفاح. بما أن $\frac{12}{182} = \frac{3}{13} \times \frac{4}{14}$، فيُمكنك تحديد أنه يوجد 4 زجاجات من عصير التفاح و $14 - (4 + 1 + 1)$ أو 8 زجاجات من عصير البرتقال.

الشطائر في المبرد الآخر	
نوع الشطائر	عدد الشطائر
تونة	5
لحم بقري	1
سلطة البيض	2
الإجمالي	8

c. **إيجاد نمط** مبرّد آخر يحتوي على الشطائر الموضحة في الجدول على اليسار. يختار كمال مشروبًا من المبرد الأول وشطيرة من المبرد الثاني عشوائيًا. فما احتمال أن يختار زجاجة عصير برتقال وشطيرة تونة؟ هل الحدثان مستقلان؟ اشرح.

$P(A) = \frac{8}{14}$؛ $\frac{5}{14}$ و $P(B) = \frac{5}{8}$. الحدثان مستقلان لأن اختيار المشروب لا يؤثر على أي شطيرة سيتم اختيارها؛ إذًا

$P(B\ and\ A) = P(A) \times P(B) = \frac{5}{14} \times \frac{5}{8} \times \frac{8}{14}$

d. **التفكير بطريقة كمية** افترض أن كمال يختار شطيرة واحدة عشوائيًا من المبرد ولكنه يقرر بعد ذلك أن يغير الشطيرة الحالية ويأخذ شطيرة أخرى عشوائيًا. ما احتمال أن يختار شطيرة سلطة بيض ويستبدلها بشطيرة سلطة بيض؟ هل الحدثان مستقلان؟ اشرح استنتاجك.

P (شطيرة سلطة البيض) $= \frac{1}{4}$. بما أنه لم يستبدل الشطيرة الأولى قبل اختيار الشطيرة الثانية، P (شطيرة سلطة البيض | شطيرة سلطة البيض) $= \frac{1}{7}$ إذًا احتمال اختيار شطيرة سلطة البيض في المرتين يساوي $\frac{1}{28}$. الحدثان مستقلان لأن P (شطيرة سلطة البيض | شطيرة سلطة البيض) $\neq P$ (شطيرة سلطة البيض).

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

استخدم **التمرين** 3 كفرصة لمناقشة م.م.ر 7 **(محاولة إيجاد البنية واستخدامها)**. بعد حل الأنواع المختلفة للاحتمال والعديد من المسائل على كل نوع، قد يبدأ الطلاب في رؤية الأنماط الناشئة، وما إن يتعرفوا عليها، سيساعدهم ذلك على حل مسائل الاحتمال بشكل أكثر كفاءة.

شجع الطلاب على التمهل من فترة لأخرى حتى يتمكنوا من النظر في الخطوات السابقة والبحث عن الأنماط. على سبيل المثال، بافتراض الأنماط A وB، قد يبدأ الطلاب في ملاحظة الأنماط بين القيم في مقامات $P(A)$ و $P(B)$ و $P(A\ And\ B)$. اعثر على هذه الملاحظات لتوجيههم إلى فهم أوسع مثل في الحالة عندما يكون $P(A\ and\ B) = P(A) \cdot P(B)$. يكون الحدثان A و B مستقلين.

تمرين

التمرين 1 يتطلب من الطلاب فهم أي مجموعة جزئية للفضاء العيني يحتاجونها للحساب الصحيح لاحتمال.

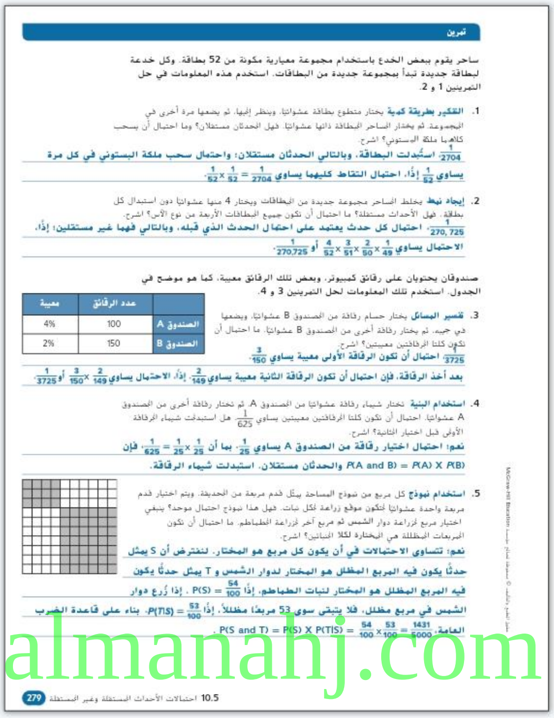
في **التمرينين 2** و **3**، يجب أن يستخدم الطلاب قاعدة الضرب العامة لحساب الاحتمالات في نماذج الاحتمالات الموحدة.

التمرين 4 يتطلب من الطلاب اختبار استقلالية الأحداث بمقارنتها باحتمال وقوع الحدثين معًا وناتج ضرب وقوع كل حدث بشكل منفصل.

التمرين 5 طلب من الطلاب استخدام قاعدة الضرب العامة لحساب الاحتمال في نماذج الاحتمالات الموحدة.

عرض المعايير

تمرين	م.م.ر
1	2
2	7
3	1
4	7
5	4



تمرين

ساحر يقوم ببعض الخدع باستخدام مجموعة معيارية مكونة من 52 بطاقة. وكل خدعة لبطاقة جديدة تبدأ بمجموعة جديدة من البطاقات. استخدم هذه المعلومات في حل التمرينين 1 و 2.

1. **التفكير بطريقة كمية** يختار متطوع بطاقة عشوائيًا، وينظر إليها، ثم يضعها مرة أخرى في المجموعة. ثم يختار الساحر البطاقة ذاتها عشوائيًا. فهل الحدثان مستقلان؟ وما احتمال أن يسحب كلاهما ملكة البستوني؟ اشرح.
$\frac{1}{2704}$، استُبدلت البطاقة، وبالتالي الحدثان مستقلان؛ واحتمال سحب ملكة البستوني في كل مرة يساوي $\frac{1}{52}$ إذًا، احتمال التقاط كليهما يساوي $\frac{1}{2704} = \frac{1}{52} \times \frac{1}{52}$.

2. **إيجاد نمط** يخلط الساحر مجموعة جديدة من البطاقات ويختار 4 منها عشوائيًا دون استبدال كل بطاقة. فهل الأحداث مستقلة؟ ما احتمال أن تكون جميع البطاقات الأربعة من نوع الآس؟ اشرح.
$\frac{1}{270,725}$. احتمال كل حدث يعتمد على احتمال الحدث الذي قبله، وبالتالي فهما غير مستقلين؛ إذًا، الاحتمال يساوي $\frac{1}{49} \times \frac{2}{50} \times \frac{3}{51} \times \frac{4}{52}$ أو $\frac{1}{270,725}$.

صندوقان يحتويان على رقائق كمبيوتر، وبعض تلك الرقائق معيبة، كما هو موضح في الجدول. استخدم تلك المعلومات لحل التمرينين 3 و 4.

	عدد الرقائق	معيبة
الصندوق A	100	4%
الصندوق B	150	2%

3. **تفسير المسائل** يختار حسام رقاقة من الصندوق B عشوائيًا، ويضعها في جيبه. ثم يختار رقاقة أخرى من الصندوق B عشوائيًا. ما احتمال أن تكون كلتا الرقاقتين معيبتين؟ اشرح.
$\frac{1}{3725}$، احتمال أن تكون الرقاقة الأولى معيبة يساوي $\frac{3}{150}$. بعد أخذ الرقاقة، فإن احتمال أن تكون الرقاقة الثانية معيبة يساوي $\frac{2}{149}$. إذًا، الاحتمال يساوي $\frac{2}{149} \times \frac{3}{150}$ أو $\frac{1}{3725}$.

4. **استخدام البنية** تختار شيماء رقاقة عشوائيًا من الصندوق A، ثم تختار رقاقة أخرى من الصندوق A عشوائيًا. احتمال أن تكون كلتا الرقاقتين معيبتين يساوي $\frac{1}{625}$. هل استبدلت شيماء الرقاقة الأولى قبل اختيار الثانية؟ اشرح.
نعم؛ احتمال اختيار رقاقة من الصندوق A يساوي $\frac{1}{25}$. بما أن $\frac{1}{25} \times \frac{1}{25} = \frac{1}{625}$، فإن $P(A \text{ and } B) = P(A) \times P(B)$ والحدثان مستقلان. استبدلت شيماء الرقاقة.

5. **استخدام نموذج** كل مربع من نموذج المساحة يمثّل قدم مربعة من الحديقة. ويتم اختيار قدم مربعة واحدة عشوائيًا لتكون موقع زراعة لكل نبات. فهل هذا نموذج احتمال موحد؟ ينبغي اختيار مربع لزراعة دوار الشمس ثم مربع آخر لزراعة الطماطم. ما احتمال أن تكون المربعات المظللة هي المختارة لكلا النباتين؟ اشرح.
نعم؛ تتساوى الاحتمالات في أن يكون كل مربع هو المختار. لنفترض أن S يمثل حدثًا يكون فيه المربع المظلل هو المختار لدوار الشمس و T يمثل حدثًا يكون فيه المربع المظلل هو المختار لنبات الطماطم. إذًا $P(S) = \frac{54}{100}$. إذا زُرع دوار الشمس في مربع مظلل، فلا يتبقى سوى 53 مربعًا مظللاً. إذًا $P(T|S) = \frac{53}{100}$. بناء على قاعدة الضرب العامة، $P(S \text{ and } T) = P(S) \times P(T|S) = \frac{54}{100} \times \frac{53}{100} = \frac{1431}{5000}$.

10.5 احتمالات الأحداث المستقلة وغير المستقلة 279

أخطاء شائعة

عند حساب احتمالات الأحداث المستقلة، قد لا يحتسب الطلاب العنصر المختار أولاً وينسون دائمًا تقليل العدد في بسط ومقام نسبة الاحتمال للحدث الثاني.

استخدم **التمرين 2** لتشخيص هذا الخطأ الشائع. اطلب من الطلاب توضيح العوامل التي يقومون بضربها لإيجاد احتمال الاختيار العشوائي لجميع أوراق اللعب الـ 4 من آص. اطلب من الطلاب توضيح كيف تمكنوا من إيجاد البسط والمقام للكسور التي قاموا بضربها. انتبه للبسط والمقام حيث ينبغي أن يقلا 1 في كل مرة يتم استبعاد ورقة لعب من فئة آس من ورق اللعب.

المعايير

معايير الممارسات في الرياضيات:
1, 2, 3, 6, 7, 8

المتطلبات الأساسية

- إيجاد الاحتمالات البسيطة
- إيجاد احتمالات الأحداث المستقلة وغير المستقلة.
- استخدام البيانات من جداول التكرار ذات المدخلين

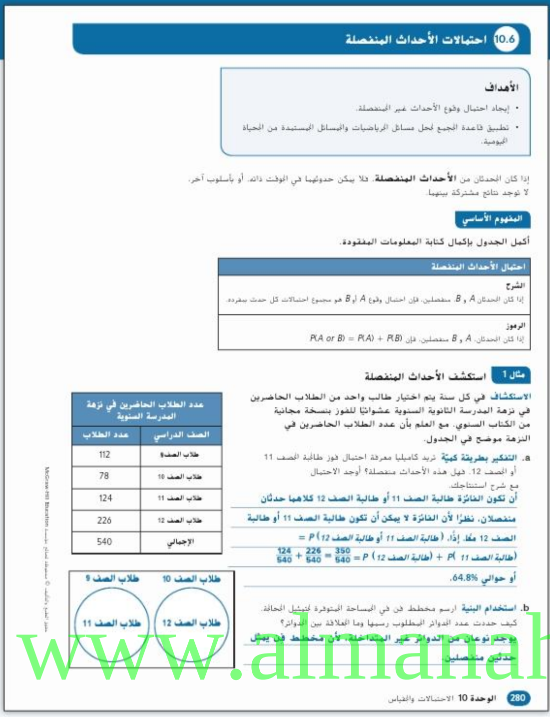
مثال 1

نصيحة للتدريس
م.م.ر 7

عندما يحاول الطلاب إيجاد $P(A \text{ or } B)$ للحدثين A و B، تعتمد القاعدة المستخدمة لحساب الاحتمال على ما إن كان الحدثان منفصلين أم لا. ويساعد الانتباه إلى البنية، سواء أكان جدول تكرارا ذي مدخلين أم مخطط فن، الطلاب على التحديد بدقة.

الأسئلة الداعمة

- ماذا إن طلب الجزء A عن احتمال أن يفوز طالب في السنة الأخيرة ويبلغ من العمر 17 عامًا؟ **حيث إنه من المحتمل أن يبلغ بعض الطلاب 17 عامًا، فللأحداث نتائج مشتركة وليست منفصلة.**



10.6 احتمالات الأحداث المنفصلة

الأهداف
- إيجاد احتمال وقوع الأحداث غير المنفصلة.
- تطبيق قاعدة الجمع لحل مسائل الرياضيات والمسائل المستمدة من الحياة اليومية.

إذا كان الحدثان من **الأحداث المنفصلة**، فلا يمكن حدوثهما في الوقت ذاته. أو بأسلوب آخر، لا توجد نتائج مشتركة بينهما.

المفهوم الأساسي

أكمل الجدول بإكمال كتابة المعلومات المفقودة.

احتمال الأحداث المنفصلة
الشرح إذا كان الحدثان A و B، منفصلين، فإن احتمال وقوع A أو B هو مجموع احتمالات كل حدث بمفرده.
الرموز إذا كان الحدثان، A و B منفصلين، فإن $P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B)$

مثال 1 استكشف الأحداث المنفصلة

الاستكشاف في كل سنة يتم اختيار طالب واحد من الطلاب الحاضرين في نزهة المدرسة الثانوية السنوية عشوائيًا للفوز بنسخة مجانية من الكتاب السنوي. مع العلم بأن عدد الطلاب الحاضرين في النزهة موضح في الجدول.

عدد الطلاب الحاضرين في نزهة المدرسة السنوية	
الصف الدراسي	عدد الطلاب
طلاب الصف 9	112
طلاب الصف 10	78
طلاب الصف 11	124
طلاب الصف 12	226
الإجمالي	540

a. **التفكير بطريقة كميّة** تريد كاميليا معرفة احتمال فوز طالبة الصف 11 أو الصف 12. فهل هذه الأحداث منفصلة؟ أوجد الاحتمال مع شرح استنتاجك.
أن تكون الفائزة طالبة الصف 11 أو طالبة الصف 12 كلاهما حدثان منفصلان، نظرًا لأن الفائزة لا يمكن أن تكون طالبة الصف 11 أو طالبة الصف 12 معًا. إذًا، P (طالبة الصف 11 أو طالبة الصف 12) =
P (طالبة الصف 11) + P (طالبة الصف 12) $= \frac{124}{540} + \frac{226}{540} = \frac{350}{540}$
أو حوالي 64.8%.

b. **استخدام البنية** ارسم مخطط فن في المساحة المتوفرة لتمثيل الحالة. كيف حددت عدد الدوائر المطلوب رسمها وما العلاقة بين الدوائر؟
يوجد نوعان من الدوائر غير المتداخلة، لأن مخطط فن يمثل حدثين منفصلين.

معلومات أساسية رياضية

بافتراض الحدثين A و B، فإن قاعدة الاحتمال المستخدمة لإيجاد $P(A \text{ or } B)$ ستعتمد على ما إذا كان الحدثان A و B منفصلين أم لا.

إذا كان الحدثان A و B منفصلين، فإنه إذا وقع A لا يمكن أن يقع B والعكس بالعكس. لتحديد ما إذا كان هذا هو الحال أم لا، يُمكنك تحليل الفضاء العيني لترى ما إن كان للحدثين A و B نتائج مشتركة أو لا. فإذا لم تكن لهما نتائج مشتركة، فإن A و B منفصلان، مما يعني أن $P(A \text{ and } B) = 0$. إذًا، $P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B)$ يصبح $P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B)$.

إذا كانت هناك نتائج مشتركة، فإن A و B غير منفصلين ويتم إيجاد $P(A \text{ or } B)$ باستخدام قاعدة الجمع: $P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B)$.

مثال 2

نصيحة للتدريس

م.م.ر 6

يمكن أن تكون مسائل الاحتمالات حساسة للحسابات. وسيوفر الطلب الوقت ويقللون أي أخطاء على المدى البعيد إذا قاموا بمراعاة الدقة والتأكد من كل عملية حساب بدقة.

الأسئلة الداعمة

- كيف يتم تحديد المقام لكل من P(أزرق)، P(مضمار) و P(مضمار وأزرق) عند إيجاد P(مضمار وأزرق)؟ **يعبر المقام عن إجمالي عدد النتائج المحتملة، وهي مجموع جميع أعداد النتائج في الخانات الفردية أو 48.**
- كيف يتم تحديد البسط؟ **يساوي بسط P(أزرق) مجموع نتائج العمود الأزرق بينما يساوي بسط P (المضمار) مجموع نتائج صف سباقات المضمار والأزرق P(والمضمار هو العدد في الخانة التي يتقاطع فيها العمود الأزرق مع صف سباقات المضمار.**
- هل ستكون الإجابات النهائية دقيقة إذا تم إجراء الحسابات للحسابات في صورة كسور أو كسور عشرية؟ **بوجه عام، إن العمل مع الكسور سيكون أكثر دقة. على سبيل المثال، إذا تم حساب الاحتمال في صورة $\frac{1}{3}$، ستكون الكمية دقيقة في صورة الكسر، بينما في صورة الكسر العشري سيتم اقتطاع الجزء المتكرر عند تقريب الجزء العشري.**

---

c. **التعليق على الاستنتاج** نادية طالبة في الصف 11 وشقيقتها رانيا طالبة في الصف 9. تزعم نادية أن احتمال فوزها هي أو شقيقتها بالكتاب السنوي يصل إلى 44٪. فهل أنت متفق مع زعم نادية هذا؟ إن لم تكن متفقًا معها، فحدد خطأ نادية ثم قم بتصحيحه.

لا؛ اكتشفت نادية احتمال فوز طالبة الصف 9 أو الصف 11. الفائز سيكون نادية أو رانيا وكلاهما حدثان منفصلان، لأن الفائز لا يمكن أن يكون كلتيهما. إذاً، P (نادية or رانيا) = P (نادية) + P (رانيا) = $\frac{1}{540}+\frac{1}{540}=\frac{2}{540}$ أو حوالي 0.3%.

إذا كنت تريد إيجاد احتمال وقوع الحدث A أو الحدث B إذا كان A و B غير منفصلين، فإنه يمكنك تطبيق قاعدة الجمع للحدثين غير المنفصلين.

المفهوم الأساسي

أكمل الجدول بإكمال كتابة المعلومات المفقودة.

احتمال وقوع الأحداث غير المنفصلة
الشرح إذا كان الحدثان، A و B حدثين غير منفصلين، فإن احتمال وقوع A أو B هو هو ناتج جمع احتمالات كل منهما مطروحا منه احتمال وقوع كل من A و B معًا.
الرموز إذا كان الحدثان A و B غير منفصلين فإن، $P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B)$

مثال 2 أوجد احتمال وقوع الأحداث غير المنفصلة

فاز سعيد بالعديد من الجوائز في مختلف الرياضات. يوضح الجدول عدد الأشرطة الزرقاء والبيضاء والحمراء التي فاز بها في أربعة أنواع مختلفة من الرياضات.

الرياضة	الأزرق	الأبيض	الأحمر
السباحة	1	7	3
سباقات المضمار والميدان	6	2	4
الفروسية	2	4	8
كرة القدم	1	5	5

a. **الحساب بدقة** إذا اختار سعيد أحد الأشرطة عشوائيًا، فما احتمال اختيار شريط أزرق لسباق المضمار والميدان؟ اشرح.

يوجد 48 شريطًا إجمالاً للاختيار من بينها. وبما أن الحدثين ليسا منفصلين، قم بتطبيق قاعدة الجمع:

P(أزرق or مضمار) = P(أزرق) + P(مضمار) − P(أزرق and مضمار)

$P = \frac{6}{48} - \frac{12}{48} + \frac{10}{48} = \frac{6}{48} - \frac{6+2+4}{48} + \frac{1+6+2+1}{48}$ أو $\frac{16}{48}$ أو $\frac{1}{3}$. إذًا، الاحتمال يساوي $\frac{1}{3}$ أو حوالي 33.3%.

b. **تفسير المسائل** ارسم مخطط فن داخل المساحة المتوفرة لتمثيل الحالة المعروضة في **الجزء a**. ثم قم بتمييز المخطط واستخدم الأعداد الموجودة في الجدول لكتابة الكميات المناسبة لكل منطقة.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

استخدم **المثال 2** كفرصة لبدء مناقشة حول كيفية تطبيق م.م.ر 8 **(البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك)** بينما يحدد الطلاب ويصنفون الأنواع المختلفة للمواقف وقواعد الاحتمال التي تنطبق عليها. وبالربط المتكرر بين استخدام قواعد احتمال معينة وتشكيلات معينة من الفضاء العيني والنتائج، سيتمكن الطلاب من تحديد الطرق الصحيحة لحساب الاحتمال بسرعة ودقة أكبر.

على سبيل المثال، بإيجاد $P(A \text{ or } B)$ بشكل متكرر للحدثين A و B، يعمم الطلاب الدلالات على أن الحدثين منفصلين (مثل الدوائر غير المتداخلة في مخطط فن) وعلى أنها غير منفصلين (مثل تقاطع الدوائر في مخطط فن).

102 / 94

مثال 3

نصيحة للتدريس

م.م.ر 1

سيكون من الأسهل في العادة حل مسائل الاحتمال بتحديد الاحتمال لمتممة الحدث. وقد يبدو من الغريب للطلاب أن يحتاجوا لإيجاد احتمال عكس الحدث محل الاهتمام. قدّم بعض الأمثلة يكون فيها إيجاد احتمال متممة الحدث والطرح من 1 أسهل من إيجاد الاحتمال مباشرة.

الأسئلة الداعمة

- إذا كان مجموع الدحرجات في **الجزء B** هو 2، فما الذي يعنيه ذلك بشأن القيمة الموضحة على دحرجة؟ **إن الطريقة الوحيدة للحصول على مجموع 2 في دحرجة 2 هو دحرجة 1 في كل مرة.**
- كيف يمكنك استخدام هذا في تحديد الاحتمال؟ **احتمال دحرجة 1 هو $\frac{1}{6}$، إذًا فإن احتمال دحرجة عددين 1s هو $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$ or $\frac{1}{36}$. اطرح من 1.**

تمرين

التمرينان 1 و 2 يطلبان من الطلاب استخدام قاعدة الجمع لإيجاد الاحتمالات.

التمرين 3 يطلب من الطلاب إيجاد احتمال متممة حدث.

في **التمرينين 4 و 5**، يجب أن يحدد الطلاب إن كان الحدثان منفصلين أم لا واستخدام قاعدة الجمع لحساب الاحتمالات.

c. **استخدام البنية** استخدم مخطط فن الذي قمت برسمه في **الجزء b** لمساعدتك على توضيح لماذا يجب طرح احتمال كلا الحدثين عندما يكونا غير منفصلين.
إذا لم يتم طرح عدد مرات وقوع كلا الحدثين مرة واحدة، فإن النتائج الواقعة في الأجزاء المتداخلة من الدوائر، فسيتم احتسابها خطأً مرتين أثناء احتساب الاحتمالات.

d. **وصف طريقة** أوجد احتمال إنه في حالة اختيار سعيد لأحد الشرائط عشوائيًا، فسيكون الاختيار بين اللون الأحمر أو الأبيض. كيف يمكن مقارنة إستراتيجيتك لحل هذه المسألة مع إستراتيجيتك الأخرى في حل المسألة الواردة في **الجزء a**؟
بينما كان الحدثان الواردان في الجزء a غير منفصلين، فإن حدثي اختيار شريط أحمر واختيار شريط أبيض كليهما حدثين منفصلين. إذًا، P (أحمر or أبيض) $= P$ (أحمر) $+ P$ (أبيض) $=$ $\frac{3+4+8+5}{48} + \frac{7+2+4+5}{48} = \frac{20}{48} + \frac{18}{48} = \frac{38}{48} = \frac{19}{24}$، أو حوالي 79.2%.

توجد حالات يلزم فيها احتمال وقوع حدث لا يحدث، حيث يُشار إلى **متمم** الحدث A، في صورة **ليس A**. وهو الحدث الذي يتضمن جميع النتائج التي لا يحدث فيها A. لأن الحدثين A و ليس A هما حدثان منفصلان ويشكلان الفضاء العيني بالكامل، $P(A) + P($ليس $A) = 1$. إجمالاً، احتمال إتمام A هو $P($ليس $A) = 1 - P(A)$.

مثال 3 إيجاد احتمال المتمم

a. **تفسير المسائل** تستخدم لعبة أوراق مجموعة أوراق لعب قياسية تمنح جوائز أكبر لسحب بطاقات ذات قيمة أكبر. في حالة سحب بطاقتين ثم إرجاعهما. أوجد احتمال سحب بطاقة بالرقم 2 كل مرة. ثم أوجد احتمال عدم سحب هذه البطاقة في كل مرة.
احتمال سحب بطاقة بالرقم 2 كل مرة هو $\frac{1}{13} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{169}$. إذًا، P (لا تُسحب بطاقة بالرقم 2 في كل مرة) $= 1 - P$ (تُسحب بطاقة بالرقم 2 في كل مرة) $= 1 - \frac{1}{169} = \frac{168}{169}$.

b. **استخدام البنية** إذا تم إلقاء حجر نرد قياسي مرتين، فأوجد احتمال أن يكون مجموع الرميتين ليس 2.
احتمال أن يكون المجموع هو 2، يساوي $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. إذًا، P (المجموع لا يساوي 2) $= 1 - P$ (المجموع يساوي 2) $= 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$.

تمرين

أجرت شركة اقتراع استبيانًا شمل عدد 1200 ناخب مسجل من 4 إمارات. استخدم الجدول أدناه للتمرينين 1 و 2.

استبيان المصوتين المسجلين	
الإمارة	**عدد المصوتين**
أبوظبي	456
دبي	320
الشارقة	207
الفجيرة	217
الإجمالي	1200

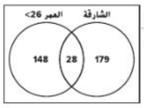
1. **التعليق على الاستنتاج** يقول أحد المحللين لدى الشركة إن احتمال انتماء المصوّت المختار عشوائيًا في الدراسة لإمارة الشارقة أو دبي هو 4.6%. فهل تتفق معه؟ إذا لم تكن متفقًا معه، فحدد خطأ المحلل ثم صححه.
لا، استخدم المحلل "قاعدة الضرب" للأحداث المستقلة بدلاً من "قاعدة الجمع" للأحداث المنفصلة. إذًا P (الشارقة or دبي) $= P$ (الشارقة) $+ P$ (دبي) $= \frac{207}{1200} + \frac{320}{1200} = \frac{527}{1200}$ أو حوالي 43.9%.

أخطاء شائعة

عند إيجاد $P(A \text{ or } B)$ للحدثين A و B، فمن الأخطاء الشائعة التحديد الخاطئ للأحداث على أنها منفصلة واستخدام القاعدة $P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B)$ بدلاً من $P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B)$. ويؤدي ذلك إلى العد المزدوج لبعض النتائج، وبالتالي يكون الاحتمال المحسوب لا يمثل الموقف الفعلي.

وعندما يوجد أي شك يتعلق بما إن كانت الأحداث منفصلة أم لا. يمكن تجنب هذا الخطأ المحتمل بتشجيع الطلاب على رسم مخطط فن لترتيب النتائج بصريًا. وإذا كان هناك أي نتائج مشتركة، فسيضطر الطلاب الدوائر متداخلة. وسيؤدي ذلك بدوره إلى انتباههم إلى أن الأحداث ليست منفصلة، وبالتالي تكون القاعدة $P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B)$ هي القاعدة المفترض استخدامها.

2. **استخدام البنية** رسم المحلل مخطط فن لتوضيح أن أعمار 176 فردًا من المصوتين الذين خضعوا للاستبيان كانت أقل من 26 عامًا وأن 28 منهم كانوا من إمارة الشارقة. إذا تم اختيار أحد مصوتي الاستبيان عشوائيًا، فما احتمال أن يكون هذا الشخص أقل من 26 عامًا أو من إمارة الشارقة؟ اشرح.



الدوائر متداخلة، إذًا الحدثان غير منفصلين، لذا، قم بتطبيق "قاعدة الجمع" للأحداث غير المنفصلة:

P(26>أو الشارقة) = P(>26) + P(الشارقة) - P(26> والشارقة)

$= \frac{176}{1200} + \frac{207}{1200} - \frac{28}{1200} = \frac{355}{1200}$

أو حوالي 29.6%

3. **التفكير بطريقة كميّة** إذا تم إلقاء حجر نرد قياسي مرتين، فأوجد احتمال أن يكون مجموع الرميتين ليس 4.

$\frac{11}{12}$؛ توجد ثلاثة طرق لدحرجة النرد والحصول على مجموع 4 وهي: الدحرجة مرتين على الرقم 2 والدحرجة على الرقمين 1 و 3 والدحرجة على الرقمين 3 و 1. توجد 36 نتيجة محتملة من الدحرجتين، لذا احتمال الدحرجة والحصول على مجموع 4 يساوي $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$. إذًا، P(المجموع لا يساوي 4) = 1 − P(المجموع يساوي 4) = $\frac{11}{12} = 1 - \frac{1}{12}$.

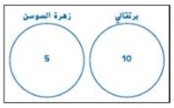
تخطط هند لحديقتها الصيفية. ويبين الجدول عدد المصابيح التي لديها وفقًا لنوع الزهرة ولونها. استخدم الجدول للتمارين 5–4.

الزهرة	برتقالية	صفراء	بيضاء
الداليا	5	4	3
الزنبق	3	1	2
سيف الغراب	2	5	6
السوسن	0	1	4

4. **استخدام البنية** في حالة اختيار هند أحد المصابيح عشوائيًا، فما احتمال اختيار المصباح المناسب لزهرة صفراء أو زهرة الداليا؟ وهل الحدثان منفصلان؟ اشرح.

حوالي 52.8%؛ يوجد 36 مصباحًا إجمالاً للاختيار من بينها. وبما أن الحدثين غير منفصلين، قم بتطبيق، قاعدة الجمع: P(صفراء or الداليا) = P(أصفر) + P(الداليا) − P(صفراء and الداليا) = $\frac{4}{36} - \frac{12}{36} + \frac{11}{36}$ أو $\frac{19}{36}$. إذًا، الاحتمال يساوي $\frac{19}{36}$ أو حوالي 52.8%.

5. **تفسير المسائل** ما احتمال أن يكون المصباح الذي تم اختياره عشوائيًا مناسبًا لزهرة السوسن أو لزهرة برتقالية؟ وهل الحدثان منفصلان؟ اشرح استنتاجك. ارسم مخطط فن داخل المساحة المتوفرة لدعم استنتاجك.



الدوائر الموجودة في مخطط فن غير متداخلة، إذًا الحدثان منفصلان. وبالتالي، P(زهرة السوسن or زهرة برتقالية) = P(زهرة السوسن) + P(زهرة برتقالية) = $\frac{15}{36} = \frac{10}{36} + \frac{5}{36}$ أو حوالي 41.7%.

6. **التعليق على الاستنتاج** تقول مروة أنه إذا تم استخدام حرف العطف أو لوصف العلاقة بين حدثين، فيجب أن يكون الحدثان منفصلين. بينما تقول ولاء إن حرف العطف أو يشير أحيانًا إلى أن الحدثين منفصلين، وليس دائمًا. فهل تتفق مع أي من الطالبتين؟ برر إجابتك.

رأي ولاء صحيح. عند إيجاد P(A or B)، فمن الضروري تحليل الفضاء العيني لتحديد ما إذا كان الحدثان منفصلين. فإذا كان الحدثان بدون نتائج مشتركة، فهما إذًا منفصلين و P(A or B) = P(A) + P(B). بينما في حالة وجود نتائج مشتركة، فإذًا الحدثان غير منفصلين و P(A or B) = P(A) + P(B) − P(A and B).

التمرين (يُتبع)

في **التمرين 6**، يجب أن يفهم الطلاب المجموعات الجزئية للنتائج المحتملة بخصوص الكلمة.

التمرين 7 يطلب من الطلاب استخدام قاعدة الجمع لإيجاد الاحتمال.

عرض المعايير

التمرين	م.م.ر
1	3
2	7
3	2
4	7
5	1
6	3
7	4

التدريس المتمايز

عند هذه المرحلة من دراستهم للاحتمال، قد يرغب المتعلمون أصحاب النمط المنطقي في وضع مخطط شامل يرتب جميع قواعد الاحتمال والشروط التي تستخدم فيها كل قاعدة، وذلك في حالة عدم قيامهم بذلك في وقت مبكر عن ذلك. وبدلاً من أن تتركهم للقيام بذلك بأنفسهم، شجع الفصل بأكمله على المشاركة، ويمكنك القيام بذلك من خلال تعليق ورقة مخطط على حائط غرفة الصف حيث يستطيع جمع الطلاب رؤيتها والمساهمة في وضعها.

إذا واجه بعض الطلاب صعوبة في ترتيب قواعد الاحتمال المتعددة وشروط استخدام كل واحدة، فقسم في مجموعات ثنائية مع المتعلمين أصحاب النمط المنطقي واطلب منهم العمل معًا على وضع مخطط.

10 مهمة تقويم الأداء

لعبة إلقاء الكرات

سيطبق الطلاب معرفتهم بالمساحة والاحتمال. سيحسب الطلاب مساحة الطاولة والأكواب الخاصين بلعبة إلقاء الكرات. ثم سيرتبون الأكواب بحيث يغيرون فرص الفوز بناء على منظورين مختلفين.

المعايير

معايير الممارسات الرياضية: ترتبط مهمة تقويم الأداء بالوحدة 10 بالممارسات الرياضية **(م. م. ر 1)**، و**(م. م. ر 3)**، و**(م. م. ر 4)**، و**(م.م.ر 6)**.

بداية سريعة

قبل أن يحسب الطلاب الاحتمال في **الجزء B**، اطلب منهم مراجعة الاحتمال الهندسي.

- كيف يمكنك أن تحدد الاحتمال للفوز بجائزة في لعبة إلقاء الكرات؟ اقسم المساحة الممثلة بفتحات الأكواب على مساحة الطاولة.

ثم اطلب من الطلاب إكمال **الجزء B**، **وللجزء D**. شجع الطلاب على التفكير في ما إن كان ترتيب الأكواب يؤثر على المساحة التي تشغلها من الطاولة أم لا وكيف يرتبط ذلك باحتمال سقوط الكرة في إحداها.

مهمة تقويم الأداء

لعبة إلقاء الكرات

قدّم حلاً واضحًا للمسألة. تأكد من توضيح كل خطواتك، وضمّن كل الرسومات ذات الصلة، وعلّل إجاباتك.

تتم ممارسة لعبة قذف الكرة في المهرجانات. حيث تقوم بقذف الكرة وتحصل على الجائزة التي تسقط الكرة عليها. فإذا سقطت الكرة في الكوب الأزرق، فستفوز بالجائزة الكبرى. أما إذا سقطت الكرة في الكوب الأخضر، فستفوز بالجائزة الصغرى. بينما إذا سقطت الكرة في الكوب الأبيض، فستكسب ملصقات. مع العلم بأنه يوجد 5 أكواب زرقاء و20 كوبًا أخضر و 75 كوبًا أبيض. ويبلغ قطر كل كوب أسطواني 8.75 cm. كما يبلغ طول ضلع الطاولة التي تحمل الأكواب 87.5 cm. افترض أن الكرة تهبط دائمًا على الطاولة (أو داخل أحد الأكواب).

الجزء A

أوجد مساحة الطاولة ومساحة فتحة الكوب.

الجزء B

من الممكن أن تهبط الكرة على الطاولة بين الأكواب. في هذه الحالة، لن تفوز بالجائزة. فما هو احتمال عدم الفوز بجائزة؟

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

توفر مهمة تقويم الأداء هذه ارتباطًا طبيعيًا مع الممارسة م.م.ر 3 (**بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين**). ويصف المعيار كيف يتمكن الطلاب المتفوقون في الرياضيات من تحليل المواقف واعتبار وجهات النظر المختلفة. يحتاج الطلاب إلى أن يتمكنوا من استخدام مفردات الرياضيات الصحيحة لتبرير إجاباتهم. في لعبة إلقاء الكرات، يطلب من الطلاب وضع تصميم بناء على منظور كل من مالك الكرنفال واللاعب. وتمنح مهمة تقويم الأداء الطلاب الفرصة لحل المسألة بطرق مختلفة والشرح للزملاء كيفية التوصل للتصميم.

الجزء C

ما احتمال فوزك بالجائزة الكبرى؟ وما احتمال فوزك بالجائزة الصغرى؟ وما احتمال فوزك بملصقات؟

الجزء D

قررت سماح، صاحبة المهرجان، إعداد الطاولة بطريقة لا تتيح للاعبين رؤية ألوان الأكواب وبالتالي سيكون رمي الكرة على الطاولة عشوائيًا. وقد علمت بأن سعاد، عاملة في المهرجان والتي تتولى إعداد الطاولة، قامت بترتيب الأكواب في وضع يجعل كل الأكواب الزرقاء والخضراء موضوعة معًا في المنتصف. لذا طلبت سماح من سعاد إعادة ترتيب الأكواب بحيث تكون كل الأكواب الزرقاء والخضراء مُحاطة بأكواب بيضاء، لأن هذا سيؤدي إلى تناقص احتمال فوز اللاعب بجائزة صغيرة أو كبيرة. بينما تقول عاملة المهرجان إن هذا الترتيب ليس مهمًا. فأيهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

الوحدة 10 مهمة تقويم الأداء 285

نصيحة للتدريس

م.م.ر 6

اقترح على الطلاب جمع الاحتمالات التي قاموا بحسابها لعدم الفوز والفوز بالجوائز. وحيث إن هذه هي النتائج المحتملة الوحيدة، فينبغي أن يكون مجموع الاحتمالات 1.

أخطاء شائعة

في **الجزء B**، قد يرغب الطلاب في استخدام عدد النتائج بدلاً من المساحة لحساب الاحتمال. ومن المهم أن يدرك الطلاب أن احتمال الفوز يكون على أساس نسبة مساحة الأكواب الزرقاء إلى نسبة المساحة الكلية للطاولة.

في **الجزء D**، قد يخطئ الطلاب في احتمال وقوع كرة في الكوب الأخضر أو الأزرق عندما يرميها اللاعبون عشوائيًا باحتمال أن تقع في الكوب الأزرق أو الأخضر عندما يهدف اللاعبون لمنطقة معينة والرمي بمعدل دقة شديد. وفي ظل القيود المذكورة، لا يتغير الاحتمال النظري حيث إن المنطقة التي تشغلها الأكواب الخضراء والزرقاء لا تعتمد على هذا الترتيب.

معايير رصد الدرجات

الجزء	الحد الأقصى للنقاط	إجابة تستحق الدرجة الكاملة
A	1	مساحة الطاولة تساوي $7,656.25\ cm^2$. ومساحة كل كوب تساوي $60.125\ cm^2$.
B	2	مساحة 100 كوب تساوي $6,012.5\ cm^2$، و $1,643.75 = 7,656.25 - 6,012.5$. يساوي احتمال عدم الفوز $1,643.75 \div 7656.25$ أو 5.21%.
C	2	مساحة 5 أكواب زرقاء تساوي $300.625\ cm^2$. ويساوي احتمال الفوز بجائزة كبيرة $300.625 \div 7,656.25$ أو 9.3% مساحة 20 كوبًا أخضر تساوي $1,202.5\ cm^2$. ويساوي احتمال الفوز بجائزة صغيرة $1,202.5 \div 7,656.25$ أو 7.15% مساحة 75 كوبًا أبيض تساوي $4,208.75\ cm^2$. ويساوي احتمال الفوز بملصق $4,208.75 \div 7,656.25$ أو 9.58%
D	2	الإجابة النموذجية: سعاد على صواب؛ حيث إن الطلاب يلقون الكرات على الطاولة عشوائيًا ولا تتغير مساحة الطاولة التي تشغلها الأكواب الزرقاء والخضراء لا تتغير بغض النظر عن مكانها. ولا يتأثر احتمال الفوز بالجائزة بالمكان المحدد للأكواب على الطاولة.
الإجمالي	7	

10 مهمة تقويم الأداء

تقدم وفز بسيارة

سيطبق الطلاب قواعد الاحتمال وتعريفات قيمة التوقع والإنصاف والاعتماد على سيناريو اللعبة /اليانصيب.

المعايير

معايير الممارسات الرياضية:
تدعم مهمة تقويم الأداء بالوحدة 10 الممارسات الرياضية **(م. م. ر 1)**، و**(م. م. ر 2)**، و**(م. م. ر 4)**، و**(م. م. ر 8)**.

بداية سريعة

قبل أن يبدأ الطلاب **الجزء A**، قد ترغب في مراجعة بعض الإستراتيجيات للتعرف على أنواع الأحداث المركبة:

- ما الكلمات الدليلية التي يمكنك البحث عنها لتحدد ما إن كان يتعين الجمع أم الضرب عند حساب الاحتمالات المركبة؟ **تعتبر "و" و "أو" من الكلمات الدليلية. عندما ترغب في إيجاد احتمال حدث واحد أو حدث آخر، تجمع الاحتمالات الفردية. عندما ترغب في إيجاد احتمال حدث واحد وحدث آخر، تضرب الاحتمالات الفردية.**
- هل هناك كلمات دليلية واضحة تنبهك؟ **لا. قد تكون الكلمتان "و" و "أو" ضمنيتين. وتكون "أو" ضمنية عندما يوجد أكثر من حدث مميز يعتبر ناجحًا. وتكون "و" ضمنية تقع أحداث متكررة أو متعددة، في نفس الوقت أو واحد بعد الآخر.**

مهمة تقويم الأداء

تقدم وفز بسيارة

قدم حلاً واضحًا للمسألة. تأكد من توضيح كل خطواتك، وضمّن كل الرسومات ذات الصلة. وعلّل إجاباتك.

ستدفع AED 50 مقابل تذكرة يانصيب واحدة من أصل 100 تذكرة تُباع لحملة جمع تبرعات. ولا يمكن لأي شخص سوى شراء تذكرة واحدة فحسب. والشخص الذي يتم اختيار تذكرته في السحب العشوائي سينضم للمشاركة في لعبة للفوز بسيارة. وفي هذه اللعبة، يختار المتسابق صندوقًا من بين ثلاثة صناديق متطابقة مغلقة ويربح الجائزة الموجودة في الصندوق. ويحتوي أحد الصناديق على مفاتيح سيارة جديدة. في حين يحتوي الصندوقان الآخران على سيارة لعبة. وتبلغ قيمة السيارة الجديدة AED 18,000، بينما تبلغ قيمة كل سيارة لعبة AED 1.29.

الجزء A

هل قرار اختيار الشخص الذي سينضم إلى اللعبة يعتبر قرارًا عادلاً؟ اشرح.

الجزء B

هل حدث الفوز بالسيارة الجديدة مستقل عن نتائج الاقتراع؟ اشرح إجابتك بناءً على احتمالات هذه الأحداث.

التأكيد على معايير الممارسة في الرياضيات

تتطابق مهمة تقويم الأداء هذه في عدة نقاط مع **م.م.ر 4 (استخدام نماذج الرياضيات)**. ويكون الطلاب على دراية جيدة بالأحداث المركبة عند هذه النقطة. ولكن قد ينطوي الكثير منها على حساب الاحتمالات للأحداث المتكررة أو المتعددة، الأحداث وثيقة الترابط، مثل أحداث الطقس. في هذه المهمة، يجب أن يحلل الطلاب العلاقة بين سحب اليانصيب واختيار صندوق أثناء اللعبة التالية وتفسير النتائج الرياضية من حيث إنصاف القرار واستقلال الأحداث وإنصاف اللعبة ككل. علاوة على ذلك، يُسأل الطلاب ما إن كان "الإنصاف" منطقيًا في سياق سيناريو جمع التبرعات.

التدريس المتمايز

قد يجد الطلاب صعوبة في رؤية احتمال الفوز في اليانصيب كجزء من الاحتمال المركب المتضمن في الحدث "الفوز بالسيارة الجديدة". قم حينها بمحاكاة الموقف بالرسم حيث تضع اسم كل طالب على "تذكرة" يانصيب. اسحب اسم أحد الطلاب عشوائيًا ثم اسمح لهذا الطالب باختيار أحد الأظرف المغلقة والتي يحتوى أحدها على درهم. ثم اطلب من الطالب ذكر الأحدث التي يجب أن تقع حتى يتمكن الطالب من "الفوز بالدرهم". ارسم مقارنة بين هذا الحدث والحدث الخاص "بالفوز بسيارة جديدة".

الجزء C

تبرع معرض محلي لبيع السيارات بسيارة جديدة وسيارات لعبة لحدث جمع تبرعات في مقابل الدعاية المجانية. نفترض أنه بدلاً من ذلك، كان ينبغي أن يشتري منظمو حدث جمع التبرعات جميع السيارات الثلاث. احسب تكلفة التذكرة الواحدة لتكون عملية الاقتراع في المسابقة عادلة في إطار هذا السيناريو. ثم اشرح ما إذا كان الاقتراع، بصفته جزءًا من حدث جمع التبرعات، ينبغي أن يكون تنافسًا عادلاً.

الجزء D

يتم اختيار تذاكر اليانصيب ويربح المتسابق الذي وقع عليه الاختيار سيارة لعبة. قرر المضيف اختيار تذكرة أخرى عشوائيًا على أن يختار المتسابق بين الصندوقين الآخرين. مع العلم أنه لم يتم اختيارك كمتسابق أول، أوجد احتمال الفوز بالسيارة الجديدة.

معايير رصد الدرجات

الجزء	الحد الأقصى للنقاط	إجابة تستحق الدرجة الكاملة
A	2	القرار منصف. اليانصيب سحب عشوائي، لذا تكون لكل تذكرة فرصة متساوية في أن يتم اختيارها. توجد 100 تذكرة لذا فإن احتمال أن يتم اختيار أحد التذاكر سيكون $\frac{1}{100}$.
B	2	احتمال الفوز في اليانصيب هو $\frac{1}{100}$. احتمال الفوز في اليانصيب والفوز بالسيارة هو $\frac{1}{100}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{300}$. احتمال الفوز بالسيارة بفرض أن الشخص فاز في اليانصيب هو $\frac{\frac{1}{300}}{\frac{1}{100}}=\frac{1}{3}$. إذا كان الحدثان مستقلين، فإن ناتج القسمة هذا من المفترض أن يساوي احتمال الفوز بسيارة ولكن هذا غير صحيح. للفوز بالسيارة، يجب على الشخص أولاً الفوز في اليانصيب ثم اختيار الصندوق الذي يحتوي على المفاتيح: $\frac{1}{100}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{300}$.
C	2	لتكون المسابقة منصفة، يجب أن تساوي قيمة التوقع 0. افترض أن r تساوي ثمن تذكرة اليانصيب. إذًا $E(x)=-r(1)+\frac{1}{100}\left(\frac{1}{3}\right)(18{,}000)+\frac{1}{100}\left(\frac{2}{3}\right)(1.29)=0\rightarrow r=\$60.01$. لا تحتاج المسابقة لأن تكون منصفة حيث إن الهدف منها هو جمع التبرعات مما يعني أنها يجب أن تكون في صالح جامع التبرعات.
D	2	احتمال الاختيار والفوز في اليانصيب المرة الثانية هو $\frac{1}{99}$. احتمال الاختيار والفوز بالسيارة مع وجود صندوقين متبقيين فقط هو $\frac{1}{2}$. إذًا فإن احتمال الاختيار والفوز في اليانصيب والسيارة هو $\frac{1}{99}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{198}$.
الإجمالي	8	

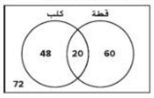
تدريب على الاختبارات المعيارية

تدريب على الاختبارات المعيارية

1. يعمل خالد ورشيد وسالم وجمال ومازن في دوام متأخر. وسيختار رئيسهم عشوائيًا اثنين منهم لتفريغ شاحنة. فما احتمال اختيار سالم ومازن؟

$\frac{1}{10}$

2. يوضح مخطط فن نتائج استطلاع 200 طالب حول ملكية الحيوانات الأليفة.



أكمل جدول التكرار ذي مدخلي البيانات بهذه المعلومات.

	لديه كلب	ليس لديه كلب	الإجمالي
لديه قطة	20	60	80
ليس لديه قطة	48	72	120
الإجمالي	68	132	200

إذا تم اختيار الشخص الذي لديه كلب عشوائيًا، فما احتمال ألا يكون لدى هذا الشخص قطة؟

$\frac{12}{17}$

إذا تم اختيار الشخص الذي ليس لديه قطة عشوائيًا، فما احتمال تربية هذا الشخص لكلب؟

$\frac{2}{5}$

3. تمت دحرجة حجري نرد، وكان مجموعهما 8. فما احتمال أن يكون العدد على أحد الحجرين هو 5؟

$\frac{2}{5}$

تمت دحرجة الحجرين مجددًا، وكان مجموعهما 8. فما احتمال أن يكون العدد على أحد الحجرين هو 1؟

0

4. لدى سامح وأحمد وعلي وزياد وفالح تذاكر لمشاهدة مسرحية. وكانت المقاعد بجانب بعضها البعض في الصف ذاته. فإذا كانوا جلوسًا في المقاعد الخمسة بترتيب عشوائي، فما احتمال جلوسهم بالترتيب الأبجدي، من اليمين إلى اليسار، حسب أسمائهم؟

$\frac{1}{120}$

5. يوجد كيس يحتوي على كرات زجاجية من ألوان متعددة. يوضح الجدول عدد الكرات الزجاجية الموجودة من كل لون في الكيس.

الأحمر	الأخضر	الأزرق	الأصفر	الأسود
12	8	11	13	6

تم اختيار ثلاث كرات زجاجية بدون إرجاعها. فما احتمال أن تكون الكرة الأولى خضراء والثانية صفراء والثالثة خضراء أيضًا؟

$\frac{13}{2100}$

تم اختيار كرتين زجاجيتين مع إرجاعهما. فما احتمال أن يكون لونهما أسود؟

$\frac{9}{625}$

6. حدد ما إذا كانت الأحداث المدرجة في الجدول مستقلة أم غير مستقلة. ثم تحقق من الأحداث المستقلة وغير المستقلة في كل صف.

الأحداث	مستقل	غير مستقل
تمت دحرجة مكعبي أرقام، واستقرا على رقمي 3 و 4.	✓	
تحتوي حقيبة على 26 مربع أحرف متناظرة مع الحروف الأبجدية. تم اختيار ثلاثة مربعات بصورة عشوائية ثم وضعها على لوحة اللعبة. وكانت تهجئة المربعين هي كلمة "فوق".		✓
استقر قرص دوار على اللون الأحمر في المرة الأولى من التدوير، ثم استقر على اللون الأصفر في المرة الثانية.	✓	
اختارت الأستاذة سناء طالبين عشوائيًا لتمرير الأوراق، وهي اختارت أكبر طالبين سنًا.		✓

تشخيص الأخطاء

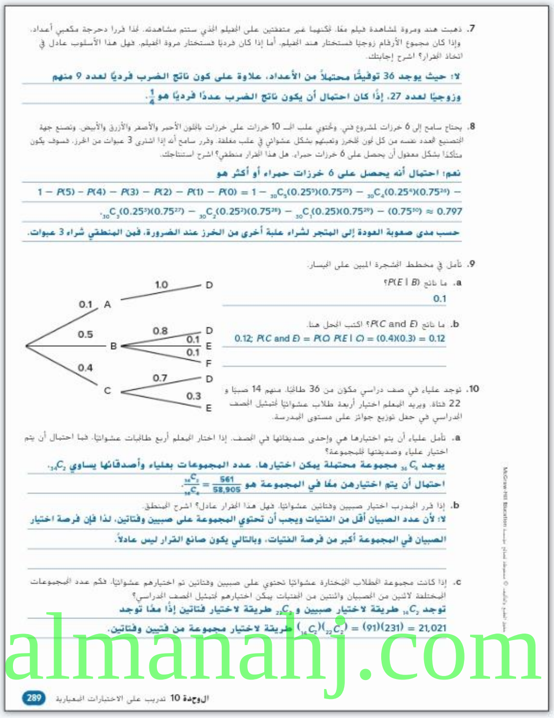
الطلاب الذين يقدمون الإجابة $\frac{1}{20}$ عن **العنصر 1** ربما لا يفهمون أن ترتيب الاختيار ليس مهمًا. اشرح أنه بما أن الترتيب ليست له أهمية، فينبغي عليهم تحديد عدد التوافيق وليس التباديل.

الطلاب الذين يقدمون الإجابة $\frac{26}{3675}$ عن السؤال الأول في **العنصر 5** ربما لا يأخذون في الاعتبار أنه إذا كانت البلية الأولى خضراء، فسيكون هناك 7 من البلي الأخضر متبقين. تابع الأحداث المحددة خطوة بخطوة مع تحديد عدد البلي الإجمالي وعدد البلي باللون المحدد في الحقيبة.

الطلاب الذين يقدمون إجابات خاطئة **للعنصر 7** قد لا يدركون أن ناتج ضرب العددين يحتمل بشكل أكبر أن يكون فرديًا. اطلب منهم وضع جدول يوضح التوافيق المحتملة للأعداد ونواتج ضربهم. ثم اطلب منهم تحديد الاحتمال لناتج الضرب الفردي والزوجي.

إستراتيجية خوض الاختبار

عند العمل على جداول التكرار ذات المدخلين في **العنصر 2**، اطلب من الطلاب إخفاء الصفوف أو الأعمدة غير اللازمة للإجابة على السؤال. على سبيل المثال، عند إيجاد احتمال أن مالك الكلب لا يمتلك قطة، يمكن إخفاء العمودان "لا يوجد كلب" و"الإجمالي". سيساعدهم ذلك على عزل المعطيات ذات الصلة.



7. ذهبت هند ومروة لمشاهدة فيلم معًا، لكنهما غير متفقتين على الفيلم الذي ستتم مشاهدته. لذا قررا دحرجة مكعبي أعداد. وإذا كان مجموع الأرقام زوجيا فستختار هند الفيلم. أما إذا كان فرديا فستختار مروة الفيلم. فهل هذا الأسلوب عادل في اتخاذ القرار؟ اشرح إجابتك.

لا؛ حيث يوجد 36 توفيقًا محتملاً من الأعداد، علاوة على كون ناتج الضرب فرديًا لعدد 9 منهم وزوجيًا لعدد 27. إذًا كان احتمال أن يكون ناتج الضرب عددًا فرديًا هو $\frac{1}{4}$.

8. يحتاج سامح إلى 6 خرزات لمشروع فني. وتحتوي علب الـ 10 خرزات على خرزات باللون الأحمر والأصفر والأزرق والأبيض. وتصنع جهة التصنيع العدد نفسه من كل لون للخرز وتعبئهم بشكل عشوائي في علب مغلقة. وقرر سامح أنه إذا اشترى 3 عبوات من الخرز، فسوف يكون متأكدًا بشكل معقول أن يحصل على 6 خرزات حمراء. هل هذا القرار منطقي؟ اشرح استنتاجك.

نعم؛ احتمال أنه يحصل على 6 خرزات حمراء أو أكثر هو

$1 - P(5) - P(4) - P(3) - P(2) - P(1) - P(0) = 1 - {}_{30}C_5(0.25^5)(0.75^{25}) - {}_{30}C_4(0.25^4)(0.75^{26}) -$

${}_{30}C_3(0.25^3)(0.75^{27}) - {}_{30}C_2(0.25^2)(0.75^{28}) - {}_{30}C_1(0.25)(0.75^{29}) - (0.75^{30}) \approx 0.797$.

حسب مدى صعوبة العودة إلى المتجر لشراء علبة أخرى من الخرز عند الضرورة، فمن المنطقي شراء 3 عبوات.

9. تأمل في مخطط الشجرة المبين على اليسار.

a. ما ناتج $P(E \mid B)$؟

0.1

b. ما ناتج $P(C \text{ and } E)$؟ اكتب الحل هنا.

0.12; $P(C \text{ and } E) = P(C) \cdot P(E \mid C) = (0.4)(0.3) = 0.12$

10. توجد علياء في صف دراسي مكوّن من 36 طالبًا. منهم 14 صبيًا و 22 فتاة. ويريد المعلم اختيار أربعة طلاب عشوائيًا لتمثيل الصف الدراسي في حفل توزيع جوائز على مستوى المدرسة.

a. تأمل علياء أن يتم اختيارها هي وإحدى صديقاتها في الصف. إذا اختار المعلم أربع طالبات عشوائيًا، فما احتمال أن يتم اختيار علياء وصديقتها للمجموعة؟

يوجد ${}_{36}C_4$ مجموعة محتملة يمكن اختيارها. عدد المجموعات بعلياء وأصدقائها يساوي ${}_{34}C_2$. احتمال أن يتم اختيارهن معًا في المجموعة هو $\frac{{}_{34}C_2}{{}_{36}C_4} = \frac{561}{58,905}$.

b. إذا قرر المدرب اختيار صبيين وفتاتين عشوائيًا، فهل هذا القرار عادل؟ اشرح المنطق.

لا؛ لأن عدد الصبيان أقل من الفتيات ويجب أن تحتوي المجموعة على صبيين وفتاتين، لذا فإن فرصة اختيار الصبيان في المجموعة أكبر من فرصة الفتيات، وبالتالي يكون صانع القرار ليس عادلاً.

c. إذا كانت مجموعة الطلاب المختارة عشوائيًا تحتوي على صبيين وفتاتين تم اختيارهم عشوائيًا، فكم عدد المجموعات المختلفة لاثنين من الصبيان واثنتين من الفتيات يمكن اختيارهم لتمثيل الصف الدراسي؟

توجد ${}_{14}C_2$ طريقة لاختيار صبيين و ${}_{22}C_2$ طريقة لاختيار فتاتين إذًا معًا توجد $({}_{14}C_2)({}_{22}C_2) = (91)(231) = 21,021$ طريقة لاختيار مجموعة من فتيين وفتاتين.

إستراتيجية خوض الاختبار

ذكر الطلاب أنه في بعض المسائل، مثل **العنصر 8**، قد يكون من الأسهل إيجاد احتمال متممة الحدث والطرح من 1. وما لم تنص المسألة بشكل خاص على الطريقة التي يتعين استخدامها، لا بد أن يفكروا دائمًا ما إن كان من الأسه إيجاد احتمال الحدث أم متممته.

تشخيص الأخطاء

الطلاب الذين يقدمون إجابات خاطئة **للعنصر 9b** قد لا يفهمون أنهم يحتاجون إلى ضرب الاحتمالات. اشرح لهم أنه إذا ضربت الاحتمالات لكل توافيق أحداث، ستبلغ الاحتمالات 1.

المعايير

العنصر 7

[2] إجابة صحيحة بتعليل كامل

[1] إجابة صحيحة، ولكن التعليل لا يفسر الاحتمال

[0] لا توجد إجابة أو أن الإجابة والاستنتاج خطأ

العنصر 8

[2] قد تكون الإجابة نعم أو لا، لكن يتم تفسير الاحتمال بشكل صحيح مبررة

[1] التعليل أو التبرير كامل جزئيًا

[0] لا توجد إجابة أو أن الإجابة والاستنتاج خطأ

العنصر 9

[2] الإجاباتان صحيحتان والحل موضح في **الجزء b**

[1] الإجاباتان صحيحتان ولكن الحل غير موضح أو الإجابة في **الجزء b** غير صحيحة نتيجة لخطأ طفيف

[0] لا توجد إجابة أو أن الإجابة والاستنتاج خطأ

العنصر 10

[3] جميع الإجابات صحيحة والاستنتاج صحيح

[2] جميع الإجابات صحيحة ولكن الاستنتاج غير صحيح أو هناك جزء غير صحيح

[1] يوجد جزء صحيح على الأقل

[0] لا توجد إجابة أو أن الإجابة والاستنتاج خطأ