الفترات الزمنية	تقديم الدروس	المراجعة والتقويم	الإجمالي
45 دقيقة	7 أيام	يومان	9 أيام
90 دقيقة	4 أيام	يوم	5 أيام

الدرس 5-5 45 دقيقة: يوم 90 دقيقة: 0.75 يوم	التوسع 5-5 45 دقيقة: نصف يوم 90 دقيقة: 0.25 يوم	الدرس 5-6 45 دقيقة: يوم 90 دقيقة: نصف يوم	التوسع 5-6 45 دقيقة: نصف يوم 90 دقيقة: 0.25 يوم
احتمالات الأحداث المستقلة والتابعة	**مختبر ورقة بيانات: جداول التكرار بمدخلين**	**احتمالات الأحداث المنفصلة**	**مختبر الهندسة: نظرية التمثيل البياني**
■ إيجاد احتمالات الأحداث المستقلة وغير المستقلة. ■ إيجاد احتمالات الأحداث علمًا بوقوع أحداث أخرى.	■ استخدام جداول التكرار ذات المدخلين لإيجاد التكرارات الهامشية والنسبية والمشتركة.	■ إيجاد احتمالات الأحداث المنفصلة والأحداث غير المنفصلة. ■ إيجاد احتمالات المتممات.	■ تطبيق النماذج الفيزيائية والتمثيلات البيانية والشبكات لوضع الحلول في السياقات التطبيقية.
حدث مركب compound event أحداث مستقلة independent events أحداث غير مستقلة dependent events احتمال مشروط conditional probability شجرة الاحتمال probability tree	جداول التكرار بمدخلين two-way frequency table التكرارات الهامشية marginal frequencies التكرارات المشتركة joint frequencies التكرار النسبيّ relative frequency	أحداث منفصلة mutually exclusive events متمم complement	شبكة network عقدة node حافة edge شبكة يمكن تعقبها traceable network
التقويم الختامي دليل الدراسة والمراجعة تمرين على الاختبار			

www.almanahj.com

مراجعة سريعة

حوّل لأبسط صورة. 6-1. انظر الهامش.

1. $\frac{1}{2}+\frac{3}{8}$
2. $\frac{7}{9}+\frac{2}{6}$
3. $\frac{2}{5}+\frac{7}{8}$
4. $\frac{2}{9}\cdot\frac{4}{8}$
5. $\frac{3}{7}\cdot\frac{21}{24}$
6. $\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}$

7. **كرة القدم** يحضر أحد فرق كرة القدم مبرد ماء سعة 4.5 جالونات في مبارياته. فكم عدد الأكواب بحجم 4 أونصات التي يمكن للفريق تناولها في كل مباراة؟ 144

في تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة، أوجد: 8. 10. انظر الهامش.

8. P(أكبر من 1)
9. P(فردي) $\frac{1}{2}$ أو 50%
10. P(أصغر من 2)
11. P(1 أو 6) $\frac{1}{3}$ أو 33%

12. **الألعاب** يلعب صديقان مباراة بحجر نرد له 20 وجهًا وعليه كل الحروف الهجائية الإنجليزية ما عدا الحروف O و U و V و X و Y و Z. فما احتمال أن يظهر على وجه النرد حرف علة(vowel)؟ $\frac{1}{5}$ أو 20%

يُظهر الجدول نتائج تجربة يدار فيها القرص الدوار المعدد 1-9.

النتيجة	علامة الإحصاء	التكرار
1					3
2	|| ⫽	7
3		⫽	6
4						4

13. ما الاحتمال التجريبي لأن يتوقف القرص على 4؟ $\frac{1}{5}$ أو 20%

14. ما الاحتمال التجريبي لأن يتوقف القرص على عدد فردي؟ $\frac{9}{20}$ أو 45%

15. ما الاحتمال التجريبي لأن يتوقف القرص على عدد زوجي؟ $\frac{11}{20}$ أو 55%

تدريب سريع

مثال 1 (مُستخدم في الدرسين 5-5 و 5-6)

حوّل لأبسط صورة $\frac{6}{9}\cdot\frac{1}{2}$

$\frac{6}{9}\cdot\frac{1}{2}=\frac{6\cdot1}{9\cdot2}$ اضرب البسط والمقام.

$\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$ حوّل لأبسط صورة.

مثال 2 (مُستخدم في الدرسين 5-1 و 5-3)

يرمي حجر نرد مرة (1). ما احتمالية أن يكون الناتج أقل من خمسة؟

$P(\text{أقل من 5}) = \frac{\text{عدد النتائج المفضلة}}{\text{عدد النتائج المحتملة}}$

$= \frac{4}{6}$ أو $\frac{2}{3}$

احتمال أن يكون الناتج أقل من خمسة هي $\frac{2}{3}$ أو 67%.

مثال 3 (مستخدم في الدرس 5-1)

تمت إدارة القرص الدوار المعدد 6-1. أوجد الاحتمال التجريبي لتوقف القرص على 5.

النتيجة	علامة الإحصاء	التكرار
1						4
2	|| ⫽	7
3	||| ⫽	8
4						4
5				2
6	⫽	5

$P(5) = \frac{\text{عدد مرات دوران العدد 5}}{\text{إجمالي عدد النتائج}} = \frac{2}{30}$

الاحتمال التجريبي لتوقف القرص على 5 هو $\frac{2}{30}$ أو 7%

www.almanahj.com

© McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة

والنتائج والأحداث.

الدرس 1-5 تمثيل الفضاء العيني استخدام مبدأ العد الأساسي لحساب النتائج.

بعد الدرس 1-5 استخدام التباديل والتوافيق مع الاحتمال.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اسأل:

- ما الذي يجعل إلقاء قطعة نقود سليمًا ومتوازنًا؟
  أن تكون فرصة ظهور أي من الوجهين متساوية.
- ما الطرق السليمة والمتوازنة الأخرى لتحديد الأول في لعبة؟ الإجابات النموذجية: دحرجة حجر نرد، اختيار بطاقة مجهولة، حجر – ورق – مقص
- ما العامل الذي يحدد نتيجة سليمة ومتوازنة؟ وجود فرصة متساوية لجميع النتائج المحتملة

العيني.

2 استخدام مبدأ العد الأساسي لعد النتائج.

الفريق الذي يملك الكرة أولاً. وقد يظهر على الوجه العلوي للقطعة كتابة أو صورة.

المفردات الجديدة

الفضاء العيني
sample space
المخطط الشجري
tree diagram
تجربة ثنائية المراحل
two-stage experiment
تجربة متعددة المراحل
multi-stage experiment
مبدأ العد الأساسي
Principle Fundamental Counting

ممارسات في الرياضيات

1 فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
2 التفكير بطريقة تجريدية وكمية.

1 تمثيل الفضاء العيني

لقد تعلمت ما يلي عن التجارب والنتائج والأحداث.

التعريف	مثال
التجربة: موقف ينطوي على فرصة تؤدي إلى استنتاجات تسمى نتائج.	في الموقف المذكور أعلاه، التجربة هي إلقاء قطعة النقد.
النتيجة: استنتاج لأداء معين أو تجريب لتجربة ما.	والنتائج المحتملة هي ظهور الكتابة أو الصورة على الوجه العلوي لقطعة النقد.
الحدث: نتيجة واحدة أو أكثر لتجربة معينة.	ومن بين أحداث تلك التجربة ظهور الصورة على الوجه العلوي.

الفضاء العيني لأي تجربة هو مجموعة النتائج المحتملة بالكامل. يمكنك تمثيل فضاء عيني باستخدام قائمة منظمة أو جدول أو **مخطط شجري**.

مثال 1 مثّل الفضاء العيني

تم رمي عملة معدنية مرتين. مثّل الفضاء العيني لهذه التجربة بإعداد قائمة منظمة وجدول ومخطط شجري.

مع كل رمية لقطعة النقد، توجد نتيجتان محتملتان: كتابة H أو صورة T.

الجدول

أدرج نتائج الرمية الأولى في العمود الأيسر ونتائج الرمية الثانية في الصف العلوي.

النتائج	كتابة	صورة
كتابة	H, H	H, T
صورة	T, H	T, T

القائمة المنظمة

اقرن كل نتيجة محتملة من الرمية الأولى مع كل النتائج المحتملة من الرمية الثانية.

H, H T, T
H, T T, H

المخطط الشجري

تمرين موجّه 1. انظر ملحق إجابات الوحدة 5.

1. تم رمي عملة معدنية ودحرجة مكعب الأعداد. مثّل الفضاء العيني لهذه التجربة بإعداد قائمة منظمة وجدول ومخطط شجري.

www.almanahj.com

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

المثالان 1 و 2 يوضحان كيفية إيجاد النتائج باستخدام قائمة منظمة أو جدول أو مخطط شجري.

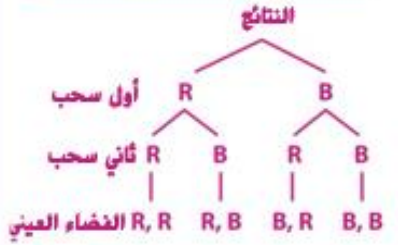
التقويم التكويني

استخدم التمرينات الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 وضعت قطعة نقود رمزية حمراء (R) وقطعة أخرى سوداء (B) في حقيبة. وسحبت إحدى القطع وتم تسجيل لونها، ثم أعيدت إلى الحقيبة وتم السحب مرة ثانية. مثّل الفضاء العيني لهذه التجربة بإعداد قائمة منظمة وجدول ومخطط شجري. القائمة المنظمة: R,R; B,B; R,B; B,R

النتائج	الحمراء	السوداء
الحمراء	R,R	R,B
السوداء	B,R	B,B



2 **سلطة الطاهي** تُقدم سلطة الطاهي في أحد المطاعم المحلية بخيار التتبيلة الفرنسية

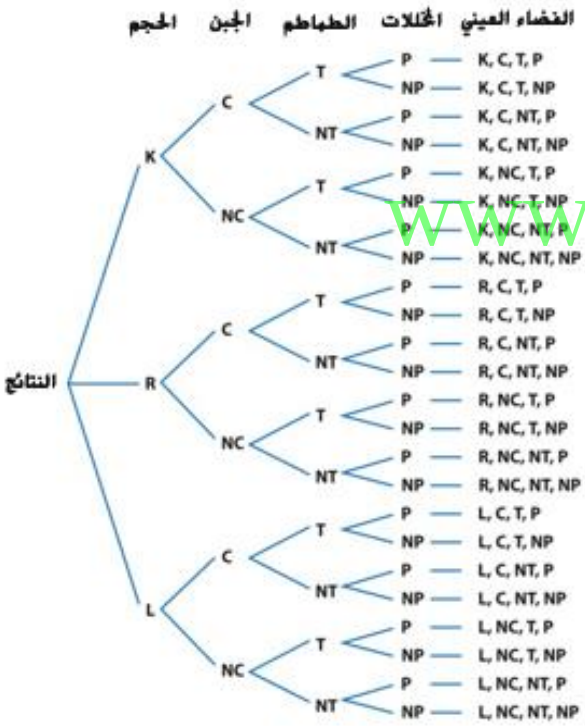
مثال 2 من الحياة اليومية المخططات الشجرية متعددة المراحل

البرجر **لكي يحصل مازن على طلب برجر اللحم البقري، يسأل كل زبون الأسئلة المذكورة في النص الموضح. ارسم مخططًا شجريًّا لتمثيل الفضاء العيني لطلبات البرجر.**

الفضاء العيني نتاج أربع مراحل.

- حجم سندوتش البرجر (K أو R أو L)
- الجبن (C أو NC)
- الطماطم (T أو NT)
- المخللات (P أو NP)

ارسم مخططًا شجريًّا بالمراحل الأربع.



2. انظر ملحق إجابات الوحدة 5.

اكتب!

الاستنتاج المنطقي كلما و/أو في السؤال الثالث للمثال 2 تعديلان مرحلة إضافية في عملية الترتيب. باتخاذ مراحل منفصلة لاختيار بدون طماطم أو بدون مخللات، فأنت ضمن بإمكانية اختيار كل من الطماطم والمخللات.

قراءة في الرياضيات

ترميز المخطط الشجري

اختر ترميز النتائج في مخططاتك الشجرية التي تنهي الالتباس. في مثال 2، C تمثل إضافة الجبن، بينما NC تمثل عدم إضافة الجبن. وكذلك، NT و NP تمثلان عدم إضافة الطماطم و عدم إضافة المخللات.

www.almanahj.com

© محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

قاعدة الضرب أحيانًا يسمى مبدأ العد الأساسي قاعدة *الضرب للعد* أو *مبدأ العد*.

الشرح يمكن إيجاد عدد النتائج المحتملة في فضاء عيني معين عن طريق ضرب عدد النتائج المحتملة من كل مرحلة أو حدث.

الرموز في إحدى تجارب ذات k من المراحل افترض أن

n_1 = عدد النتائج المحتملة للمرحلة الأولى.

n_2 = عدد النتائج المحتملة للمرحلة الثانية بعد حدوث المرحلة الأولى.

⋮

n_k = عدد النتائج المحتملة للمرحلة k^{th} بعد حدوث $k-1$ من المراحل الأولى.

وبالتالي تكون النتائج الكلية المحتملة لـ k من المراحل للتجربة هي

$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$.

مثال 3 من الحياة اليومية **استخدم نظام العد الأساسي**

الخواتم الذهبية اختارت ياسمين شكلاً عامًا وحجمًا مناسبًا لخاتمها الفخم. والآن عليها أن تختار من بين عروض الخواتم المتاحة. فكم عدد الخواتم المختلفة التي يمكن لياسمين أن تبتكرها في شكل الخاتم الذي اختارته وفي حجمه؟

خيارات الخاتم	عدد الاختيارات
المعادن	10
اللمسات النهائية	2
ألوان الحجر	12
ألوان القطع	5
جانب 1 شعارات النشاط	20
جانب 2 شعارات النشاط	20
أشكال الشريط	2

استخدم نظام العد الأساسي.

المعادن		اللمسات النهائية		ألوان الحجر		ألوان القطع		جانب 1 شعارات		جانب 2 شعارات		أشكال الشريط		النتيجة المحتملة
10	×	2	×	12	×	5	×	20	×	20	×	2	=	960,000

إذن، بإمكان ياسمين أن تشكل 960,000 خاتم مختلف.

تمرين موجّه

3. أوجد عدد النتائج المحتملة في كل موقف.

A. ورقة الإجابة الموضحة كاملة. 65,536

B. رمي حجر النرد أربع مرات. 1296

C. **حذاء** يتوفر زوج من الأحذية الرسمية بكل المقاسات من 5 إلى 11 بألوان الأحمر والأزرق الفاتح والبني والأسود. وقد يكون مصنوعًا من الجلد الطبيعي أو الصناعي وهو متوفر بثلاثة عروض مختلفة. 168

ورقة الإجابة

1. (A) (B) (C) (D)
2. (A) (B) (C) (D)
3. (A) (B) (C) (D)
4. (A) (B) (C) (D)
5. (A) (B) (C) (D)
6. (A) (B) (C) (D)
7. (T) (F)
8. (T) (F)
9. (T) (F)
10. (T) (F)

الربط بالحياة اليومية

أكثر من 95% من طلاب المدارس الثانوية يطلبون شكلاً تقليديًا من الخواتم عبارة عن اسم المدرسة وحجر وسنة التخرج.

المصدر Fort Worth Star-Telegram

www.almanahj.com

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

أنه كما يخلق اختيار أحد الخيارات نتيجة فريدة، فإن عدم الاختيار يخلق كذلك نتيجة فريدة يجب إدخالها في الفضاء العيني.

2 مبدأ العد الأساسي

المثال 3 يوضح كيفية إيجاد عدد النتائج المحتملة دون مراعاة توافيق محددة.

مثال إضافي

3 **السيارات** تتوفر السيارات الجديدة بتشكيلة واسعة من الخيارات للمستهلكين. وقد تم اختيار خيار واحد من كل فئة موضحة. كم عدد السيارات المختلفة التي يمكن للمستهلك صنعها بطريقة التصنيع والطراز المختار؟

خيارات السيارات	عدد الاختيارات
اللون الخارجي	11
اللون الداخلي	7
مادة تصنيع المقاعد	5
المحرك	3
نظام ملاحة السيارة الحاسوبي	6
الإطارات	4
الأبواب	3

83,160

التركيز على محتوى الرياضيات

التباديل تعتبر التباديل امتدادًا لمبدأ العد الأساسي حيث يعتبر كل ترتيب

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 5 للتحقق من الاستيعاب.

ثم استخدم المخطط الموجود في الجزء السفلي من هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج يستوعب الطلاب المتفوقون في الرياضيات الكميات وعلاقاتها في المواقف المذكورة في المسائل. في التمارين من 6 إلى 10، شجع الطلاب على ذكر جميع النتائج المحتملة أولاً.

إجابة إضافية

21. الإجابة النموذجية: 6 طرق مختلفة:

$4(x + 6) + 2(3) + 2(x + 4)$;

$2(x + 11) + 2(x + 8) + 2(x)$;

$2(x + 4) + 2(x + 9) + 2(x + 6)$;

$2(x) + 2(3) + 4(x + 8)$;

$2(x) + 2(x + 8) + 2(3) + 2(x + 8)$;

$2(x) + 2(3) + 2(4) + 2(x + 6) + 2(x + 6)$

التحقق من فهمك

مثال 1 **مثّل الفضاء العيني لكل تجربة بإعداد قائمة منظمة وجدول ومخطط شجري.**

1. مع كل ضربة بالمضرب، بإمكان اللاعب إما أن يصل بالكرة إلى القاعدة أو إخراجها عن الملعب. افترض أن لاعبًا يضرب مرتين. **انظر ملحق إجابات الوحدة 5.**

2. باع يوسف كل تذاكر مهرجان الخريف السنوي في مدرسته. وكمكافأة له، كان بإمكانه الاختيار مرتين من حقيبة بها بطاقات مكتوب فيها "عصير مجاني" أو "دفتر ملاحظات مجاني".
انظر ملحق إجابات الوحدة 5.

المثال 2

3. **البدلات** يستأجر ناصر بدلة زفاف من الكتالوج الموضح. ارسم مخططًا شجريًّا لتمثيل الفضاء العيني لهذا الموقف.
انظر ملحق إجابات الوحدة 5

مثال 3 **أوجد عدد النتائج المحتملة في كل موقف.**

4. يشتري منصور هاتف خلوي، وعليه أن يختار خطة أسعار. افترض أنه اختار واحد من كل خطة. **1800**

خيارات الهاتف النقال	عدد الاختيارات
شكل الهاتف	15
حزمة الدقائق	5
إمكانية الوصول إلى الإنترنت	3
إرسال رسائل	4
ضمان	2

5. تبتكر وفاء قائمة طعام جديدة لمطعمها. افترض أنه تم طلب عنصر من كل بند. **20,736**

محتويات القائمة	عدد الاختيارات
المقبلات	8
الشوربة	4
السلطة	6
الطبق الرئيسي	12
الحلوى	9

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **التبرير مثّل الفضاء العيني لكل تجربة بإعداد قائمة منظمة وجدول ومخطط شجري.**
6–10. انظر ملحق إجابات الوحدة 5.

6. هيام طالبة في السنة قبل الأخيرة وأمامها خيار للعامين القادمين إما أن تمارس لعبة كرة اليد وإما أن تمارس السلة خلال فصل الشتاء.

7. صفان مختلفان من صفوف التاريخ في مدينة نيويورك يأخذان جولة إما إلى سميثسونيان وإما إلى متحف لتاريخ الطبيعة.

8. أمام محمود فرصة للسفر للخارج باعتباره طالب تبادل خارجي أثناء العامين الأخيرين من كليته. يمكنه الاختيار بين الإكوادور وإيطاليا.

9. أُنشئ ناد جديد، ويجب اختيار موعد للاجتماع. المواعيد المحتملة لانعقاد الاجتماع هي الاثنين أو الخميس

www.almanahj.com

McGraw-Hill Education حقوق الطبع © محفوظة لصالح مؤسسة

تدريس الممارسات في الرياضيات

المثابرة يتحقق الطلاب المتفوقون رياضيًا من صحة إجابات المسائل باستخدام طريقة مختلفة، ويسألون أنفسهم باستمرار، "هل الجواب منطقي؟" في التمارين 15 إلى 18، شجع الطلاب على التحقق من مدى صحة إجاباتهم.

11. **الرسم** في حصة الرسم، يعمل الطلاب على إنجاز مشروعين يمكنهم فيهما استخدام نوعين مختلفين من الألوان في كل مشروع. مثل الفضاء العيني لهذه التجربة بإعداد قائمة منظمة وجدول ومخطط شجري. **انظر ملحق إجابات الوحدة 5.**

المثال 2 **ارسم مخططًا شجريًّا لتمثيل الفضاء العيني لكل موقف.**

12. **السندويتش** على منضدة السندويتش، يتاح للزبائن خيار وضع الحبوب أو التونة أو الدجاج مع الأرز أو بدون أرز وجبن و/أو صلصة. **انظر ملحق إجابات الوحدة 5.**

13. **النقل** ينوي محمد شراء مركبة وأمامه خيارات سيارة أو شاحنة أو شاحنة صغيرة بها جلد أو قماش من الداخل ومشغل CD و/أو فتحة سقف. **انظر ملحق إجابات الوحدة 5.**

14. **قطع الحلوى** تذهب هيام ومعها أصدقاؤها إلى مطعم لبيع الزبادي المثلج ويوجد به لافتة مثل اللافتة الموضحة على اليسار. ارسم مخططًا شجريًّا لكل التوافيق المحتملة من المخاريط التي تحتوي على فول سوداني و/أو زينة المكسرات. **انظر ملحق إجابات الوحدة 5.**

مثال 3 **المثابرة في تمرين 15–18، أوجد عدد النتائج المحتملة لكل موقف.**

15. في انتخابات مجلس الطلاب بالسنة قبل الأخيرة، ترشح 3 أشخاص لمنصب السكرتارية و 4 للشؤون المالية و 5 لنائب رئيس و 2 لرئيس الصف. **120**

16. عدد التقدم للصفوف أثناء الفصل الدراسي الأول من السنة بالكلية، كان أمام ماجد 4 خيارات يملؤها باختيار 4 صفوف للأدب وصفين للرياضيات و 6 للتاريخ و 3 للتصوير. **144**

17. تختار هنا واحدة من بين 6 كليات و 5 تخصصات أساسية وتخصصين فرعيين و 4 أندية. **240**

18. تمتلك هدى مطعمًا يتيقي لها فيه أن ترتدي بلوزة بيضاء وبنطلون أسود أو تنورة سوداء وحذاءً أسود. ولديها 5 بلوزات و 4 بنطلونات و 3 تنورات و 6 أزواج من الأحذية السوداء. **210**

B

19. **الرسم** في واجب حصة الرسم، يعطي السيد فهد الطلاب اختيارًا لشكلين رباعيي الأضلاع لكي يستخدموهما كقاعدة. ويجب أن يكون في أحد الشكلين ضلعان متساويا الطول، بينما يجب أن يكون في الثاني مجموعة واحدة على الأقل من الأضلاع المتوازية. مثل الفضاء العيني لهذه التجربة بإعداد قائمة منظمة وجدول ومخطط شجري. **انظر ملحق إجابات الوحدة 5.**

20. **الإفطار** يقدم مطعم في أحد الفنادق بيض الأومليت مع اختيار الخضراوات أو اللحم البقري أو التونة التي تقدم مع البطاطس المهروسة المطلية أو الخريك أو العيش المحمص.

a. كم عدد النتائج المختلفة المتوفرة من الأومليت وجانب واحد إذا قدم مطبق الأومليت مع الخضراوات وحدها؟ **18**

b. أوجد عدد النتائج المحتملة للأومليت بالخضراوات إذا كان بإمكانك الحصول على أي من الخضراوات أو كلها على أي طبق أومليت. **45**

21. **الأشكال المركبة** فالح يحسب مساحة الشكل المركب الموضح على اليسار. اذكر ست طرق يمكنه تحقيق ذلك من خلالها. **انظر الهامش.**

www.almanahj.com

22. **النقل** اشترت هدى قفل دراجة جديدًا له أربعة تواقيع عددية. وكل عدد في التواقيع من 0 إلى 9.
a. كم عدد التواقيع الممكنة إن لم يكن هناك قيود على عدد المرات التي يمكن لهدى استخدام كل عدد فيها؟ **10000**
b. كم عدد التواقيع الممكنة إذا كان بإمكان هدى استخدام كل عدد مرة واحدة؟ اشرح إجابتك. **انظر الهامش.**

23. **الألعاب** هداية وهالة طفلان لعبة لوحية فيها يرمي حجري نرد في كل مرة.
a. في الرمية الواحدة، كم عدد النتائج التي يكون فيها المجموع عدد 8؟ **5**
b. كم عدد النتائج التي يكون فيها المجموع فرديًا؟ **18**

24. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف كيفية التحقق من سلسلة أحداث متتالية. في المرحلة الأولى من أي تجربة تتم على مرحلتين، تدوير القرص 1 أدناه. إذا كانت النتيجة باللون الأحمر، تلغى خطوة نقد. إذا كانت النتيجة باللون الأصفر، يلقى حجر نرد. إذا كانت النتيجة باللون الأخضر، يتم رمي مكعب الأعداد. إذا كانت النتيجة باللون الأزرق، يدار القرص 2.

القرص 1 | القرص 2

a. **هندسيًا** ارسم مخططًا شجريًا لتمثيل الفضاء العيني للتجربة. **انظر ملحق إجابات الوحدة 5.**
b. **منطقيًا** ارسم مخطط فن لتمثيل النتائج المحتملة من التجربة. **انظر ملحق إجابات الوحدة 5.**
c. **تحليليًا** كم عدد النتائج المحتملة المتوفرة؟ **20**
d. **لفظيًا** هل يمكنك استخدام مبدأ العد الأساسي في تحديد عدد النتائج؟ اشرح.
الإجابة النموذجية: لا، ما دامت المرحلة الثانية من التجربة تعتمد على ما يحدث في المرحلة الأولى تمامًا، فلا يمكنك ضرب عدد النتائج في كل مرحلة. يجب عليك إيجاد عدد النتائج المحتملة في كل مرحلة وتضيفها.

مسائل مهارات التفكير العليا. استخدم مهارات التفكير العليا

25. **التحدي** صندوق يحتوي على عدد n من الأشياء المختلفة. إذا سحبت ثلاثة أشياء من الصندوق، كل واحد على حدة، دون أن تعيد الشيء السابق ثانية، فكم عدد النتائج المحتملة؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

26. **مسألة غير محددة الإجابة** أحيانًا لا يكون المخطط الشجري لتجربة ما متناظرًا. صف تجربة من مرحلتين يكون فيها المخطط الشجري غير متناظر. أرفق رسمًا لهذا المخطط الشجري. اشرح إجابتك. **انظر الهامش.**

27. **الكتابة في الرياضيات** اشرح لماذا لا يمكن تمثيل الفضاء العيني لتجربة تتم على عدة مراحل باستخدام جدول. **انظر الهامش.**

مثال 3

28. **الفرضيات** حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة أحيانًا أم صحيحة دائمًا أم غير صحيحة دائمًا. اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**
عندما تخرج النتيجة عن الفضاء العيني فهذا خطأ.

29. **الاستنتاج** للتجربة متعددة المراحل n نتائج محتملة في كل مرحلة. إذا أجريت التجربة بمراحل k، فاكتب معادلة لإجمالي عدد النتائج المحتملة P. اشرح. **انظر الهامش.**

30. **الكتابة في الرياضيات** اشرح متى يكون من الضروري عرض جميع النتائج المحتملة لتجربة ما باستخدام مخطط شجري ومتى يمكن الاكتفاء باستخدام مبدأ العد الأساسي. **انظر الهامش.**

© محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التمثيلات المتعددة

في التمرين 24، يستخدم الطلاب مخططًا شجريًا ومخطط فن لتمثيل الفضاء العيني لتجربة.

تدريس الممارسات في الرياضيات

الفرضيات يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات فهم واستخدام الفرضيات والتعريفات في إنشاء الفرضيات. ويضعون فرضيات ويبنون تقدمًا منطقيًا للمسائل لاستكشاف حقيقة تقديراتهم. في التمرين 28، شجع الطلاب على العمل معًا.

إجابات إضافية

22b. 5040؛ الإجابة النموذجية: يوجد 10 احتمالات للعدد الأول في التواقيع. حيث إنه تستطيع هدى استخدام كل عدد مرة واحدة فقط، فلا يوجد سوى 9 احتمالات للعدد الثاني في التواقيع، و 8 احتمالات للعدد الثالث في التواقيع، و 7 احتمالات للعدد الرابع في التواقيع. وبذلك يساوي عدد التواقيع المحتملة $7 \times 8 \times 9 \times 10$ أو 5040.

25. $n^3 - 3n^2 + 2n$؛ الإجابة النموذجية: يوجد n من العناصر في صندوق عند إزالتك للعنصر الأول، إذًا بعد إزالتك للعنصر الأول، سيكون هناك $n - 1$ نتائج محتملة. بعد إزالتك للعنصر الثاني، سيوجد $n - 2$ نتائج محتملة. ويعتبر عدد النتائج المحتملة هو ناتج ضرب عدد نتائج كل تجربة أو $n(n - 1)(n - 2)$.

26. الإجابة النموذجية: في إحدى التجارب، تختار بين صندوق أزرق أو صندوق أحمر. ثم تُخرج كرة من الصندوق الذي اخترته دون

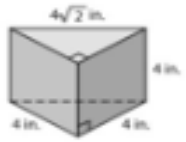
www.almanahj.com

Activate W
Go to Setting

31. **الاحتمالات** يمكن نورا أن تدعو اثنتين من صديقاتها للعشاء معها بمناسبة زفافها. إذا كانت تختار من بين أربعة من صديقاتها، فكم عدد النتائج المحتملة للدعوة؟ **B**

A 4
B 6
C 8
D 9

32. **إجابة قصيرة** ما حجم المنشور الثلاثي الموضح أدناه؟ **32 in³**



33. يجب أن تكون كلمة المرور الخاصة بعالج مكونة من خمسة أرقام. استخدم الأعداد من 0 إلى 9 ويجب ألا يتكرر أي عدد. ما أقصى عدد من كلمات المرور يمكن لعالج أن يكونه؟ **G**

F 15,120
G 30,240
H 59,049
J 100,000

34. **SAT/ACT** يقدم مطعم للبيتزا 3 أنواع من الحواف، 5 أنواع من إضافات الخضراوات و 4 أنواع من إضافات اللحم. كم عدد قطع البيتزا المختلفة التي يمكن طلبها باختيار 1 قشرة و 1 إضافة خضراوات و 1 إضافة لحم؟ **D**

A 12
B 23
C 35
D 60
E ١٢ نهائي

مراجعة شاملة

35. **الهندسة المعمارية** لتشجيع إعادة التدوير، بنى الطلاب نموذج مسجد جميرا من علب المشروبات الغازية. وقد بنى النموذج بمقياس 1:5 وكان متشورًا مستطيل الشكل ارتفاعه 26 مترًا وعرضه 49 مترًا وطوله 93 مترًا. أوجد أبعاد المسجد الحقيقية. **ارتفاع 130 m وعرض 245 m وطول 465 m**

استخدام الهندسة الفراغية. حدد اسمًا لكل مما يلي في الشكل الكروي W.

36. خطان يحتويان على نقطة F $\overleftrightarrow{BG}$, $\overleftrightarrow{AM}$
37. نقطة تحتوي على قطعة $\overline{FG}$ G
38. مثلث $\triangle FGM$

أوجد المساحة الجانبية ومساحة السطح لكل أسطوانة. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

39. 14 ft, 32.5 ft — **1429.4 ft²**, **1737.3 ft²**

40. 4 in., 1.5 in. — **37.7 in²**, **51.8 in²**

41. 16.5 m, 16.5 m — **1710.6 m²**, **3421.2 m²**

42. **الاتصالات عن بعد** الإشارة الخادمة من برج بث شماعًا له نقطة بداية على البرج ويمس الأرض. افترض أن البرج موضوع في مستوى البحر كما هو موضح. حدد مقياس القوس المقطوع عند الماسين. **93.5**

الهندسة الإحداثية حدد ما إذا كان الشكل المعلوم الرؤوس يوجد به تناظر محوري و/أو تناظر دوراني.

43. Q(2, 2), R(7, 2), S(6, 6), T(3, 6) **محور**
44. J(-2, 2), K(-5, -1), L(-2, -4), M(1, -1) **محوري ودوراني**

مراجعة المهارات

أوجد ناتج قسمة كل مما يلي.

45. $\frac{5^2}{2}$ **12.5**
46. $\frac{3^3}{3 \cdot 2}$ **4.5**
47. $\frac{2^4 \cdot 6}{8}$ **12**
48. $\frac{2^3 \cdot 12}{6}$ **16**
49. $\frac{4^4 \cdot 3}{24}$ **32**

www.almanahj.com

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4 التقويم

الكرة البلورية اطلب من الطلاب الكتابة عن مدى ارتباط تعلم تمثيل الفضاء العيني واستخدام مبدأ العد الأساسي بالتباديل والتوافيق.

إجابات إضافية

27. الإجابة النموذجية: يمكنك وضع جميع النتائج المحتملة لإحدى مراحل التجربة في أعمدة والنتائج المحتملة للمرحلة الأخرى من التجربة في صفوف. وحيث إن الجدول يكون ثنائي الأبعاد، سيكون من المستحيل وضع النتائج المحتملة لثلاث مراحل أو أكثر لتجربة. وبالتالي، لا يمكن استخدام الجداول إلا لتمثيل الفضاء العيني لتجربة من مرحلتين.

28. الإجابة النموذجية: كلا على الإطلاق، الفضاء العيني لأي تجربة هو مجموعة النتائج المحتملة بالكامل. ولا يمكن أن تقع إحدى النتائج خارج نطاق الفضاء العيني. ويحدث الخطأ عندما تقع النتيجة في الفضاء العيني بيد أنها نتيجة غير مرغوبة.

29. $P = n^k$؛ الإجابة النموذجية: ويعتبر إجمالي عدد النتائج المحتملة هو ناتج ضرب عدد النتائج لكل مرحلة من 1 إلى k. حيث إنه يوجد k من المراحل، فتقوم بضرب n في نفسه بعدد k مرات أي n^k.

30. الإجابة النموذجية: يعتبر تصميم مخطط شجري ضروريًا إذا كنت تود توضيح الفضاء العيني لتجربة أو إذا كنت تود معرفة عدد المرات التي تحدث فيه نتيجة معينة. ويخبرك استخدام مبدأ العد الأساسي وحده بعدد النتائج المحتملة الموجودة، ولهذا لا يكون مفيدًا إلا في حالة رغبتك في

5-2 استخدام التباديل والتوافيق مع الاحتمالات

السابق:
- لقد استخدمت نظام العد الأساسي.

الحالي:
1. استخدام التباديل مع الاحتمالات.
2. استخدام التوافيق مع الاحتمالات.

لماذا؟
- تجلس نورا وفاطمة وأماني وهبة في وضعية لالتقاط صورة. وهناك 4 اختيارات لمن يمكنه الوقوف عند أقصى اليسار، بما يترك 3 اختيارات لمن يمكنه الوقوف في الموقع الثاني. أما الموقع الثالث، فلم يزل سوى خيارين فقط. وبالنسبة إلى الموقع الأخير فلا يوجد سوى خيار واحد محتمل.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 2-5 استخدام مبدأ العد الأساسي.

الدرس 2-5 استخدام التباديل مع الاحتمالات. استخدم التوافيق مع الاحتمالات.

بعد الدرس 2-5 إيجاد الاحتمالات باستخدام الطول والمساحة.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اسأل:
- لماذا قد يكون الترتيب مهمًا في الصورة؟ الإجابة النموذجية: ارتفاع الأشخاص ولون الأزياء ومن يرتبط بمن
- ما المواقف الأخرى التي قد يكون فيها الترتيب مهمًا؟ الإجابة النموذجية: مزج المقادير في الخبز
- ما الموقف الذي قد لا يكون فيه الترتيب مهمًا؟ الإجابة النموذجية: عند وضع البهارات على برجر اللحم

المفردات الجديدة

التباديل
permutation
المضروب
factorial
التباديل الدائرية
circular permutation
التوافيق
combination

ممارسات في الرياضيات
1 فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
4 استخدام نماذج الرياضيات.

1 استخدام التباديل في الاحتمالات

التبديل هو ترتيب العناصر التي يكون الترتيب فيها مهمًّا. ومن بين التباديل للأصدقاء الأربعة السالف ذكرهم هو فاطمة ثم أماني ثم هبة ثم نورا. باستخدام مبدأ العد الأساسي، يوجد 1 · 2 · 3 · 4 أو 24 ترتيبًا محتملاً للأصدقاء.

يمكن كتابة التعبير 1 · 2 · 3 · 4 المستخدمة في حساب عدد تباديل الأصدقاء الأربعة على طريقة 4!، التي تُقرأ مضروب 4.

المفهوم الأساسي المضروب

المضروب العدد الصحيح الموجب n، الذي يُكتب n!، هو ناتج ضرب الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر من أو تساوي n.

الرموز $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$، حيث $0! = 1$

مثال 1 احتمالات وتباديل عدد n من العناصر

الرياضة نسرين ونجلاء عضوتان في فريق لعبة كرة. إذا أُعطيت الفتيات العشرون أعضاء الفريق أرقامًا لتمييز اللعبة من 1 إلى 20 بشكل عشوائي، فما ما احتمال أن يكون عدد قميص نسرين 1 ونجلاء 2؟

الخطوة 1 أوجد عدد النتائج المحتملة في الحصاء العيني. هذا هو عدد تباديل أسماء الفتيات العشرين، أو 20!.

الخطوة 2 أوجد احتمال وقوع النتائج المفضلة. هذا هو عدد تباديل أسماء الفتيات الأخريات بفرض أن عدد قميص نسرين هو 1 ونجلاء 2، 18! أو (20 − 2)!.

الخطوة 3 احسب الاحتمالات.

$$P(\text{نجلاء 2، نسرين 2}) = \frac{18!}{20!} \quad \leftarrow \text{عدد النتائج المفضلة} \quad \leftarrow \text{عدد النتائج المحتملة}$$

$$= \frac{18!}{20 \cdot 19 \cdot 18!} \quad \text{اكتب لفاصيل 20! واقسم العوامل المشتركة.}$$

$$= \frac{1}{380} \quad \text{حوّل لأبسط صورة.}$$

تمرين موجّه

1. **التصوير** في الفترة الافتتاحية، ما احتمال اختيار عيسى للوقوف على أقصى اليسار وفارس للوقوف على أقصى يمين الصورة؟ $\frac{1}{12}$

www.almanahj.com

حقوق الطبع والتأليف © محفوظ لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

في الفقرة الافتتاحية، افترض أن 6 أصدقاء كانوا مختبئين، لكن المصور لم يكن يريد سوى 4 أشخاص في الصورة. باستخدام مبدأ العد الأساسي، يكون عدد التباديل لـ 4 أصدقاء من بين 6 أصدقاء هو 6 · 5 · 4 · 3 أو 360.

وهناك طريقة أخرى لوصف هذا الموقف وهي عدد تباديل 6 اصدقاء أخذ من بينهم 4 في كل مرة، يُرمز إليه بـ ${}_6P_4$. ويمكن حساب هذا العدد أيضًا باستخدام المضروبات.

$${}_6P_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{6!}{2!} = \frac{6!}{(6-4)!}$$

وهذا يقترح القانون التالي:

المفهوم الأساسي التباديل

الرموز	عدد تباديل n كائنات متمايزة مأخوذة r في كل مرة يُرمز إليه بـ ${}_nP_r$ ويمكن إيجاده باستخدام $${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$
مثال	عدد تباديل 5 كائنات مأخوذة 2 في كل مرة هو $${}_5P_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!}$$ أو 20.

قراءة في الرياضيات

الدقة عبارة كائنات متمايزة تعني أن الكائنات يمكن تمييزها لكونها محتفظة بطريقة ما.

مثال 2 الاحتمالات و ${}_nP_r$

صف دراسي متسع إلى فرق، كل فرقة بها ما يصل إلى 15 طالبًا. وكل فريق مطلوب منه اختيار أعضاء من الفريق ليكونوا مسؤولين. إذا كان كل من عمر وعلي وعدنان أعضاء في فريق، ويتم تقرير المناصب بشكل عشوائي، فما احتمال اختيارهم ليتقلدوا مناصب الرئيس وناشب الرئيس والسكرتير، على الترتيب؟

الخطوة 1 بما أن اختيار المسؤولين هو إحدى طرق تقييم أعضاء الفريق، فالترتيب مهم في هذا الموقف. عدد النتائج المحتملة في الفضاء العيني هو عدد تباديل 15 شخصًا مأخوذين بمجموعة 3 أشخاص في كل مرة، أو ${}_{15}P_3$.

$${}_{15}P_3 = \frac{15!}{(15-3)!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12!}{12!} = 2730$$

الخطوة 2 عدد النتائج المفضلة هو عدد تباديل 3 طلاب في مناصب معينة. وهو 1 أو 1.

الخطوة 3 إذًا، فاحتمال اختيار عمر وعلي وعدنان ليكونوا هم المسؤولين الثلاثة هو $\frac{1}{2730}$.

نصيحة دراسية

العشوائية عند تحديد النتائج بشكل عشوائي، تصبح احتمال حدوثها متساوية ويمكن حساب الاحتمالات باستخدام التباديل والتوافيق.

تمرين موجّه

2. تتكون بطاقة تعريف أحد الطلاب من 4 أرقام مختارة من بين 10 أرقام محتملة من 0 إلى 9. ولا يمكن تكرار العدد الواحد.

A. كم عدد أرقام التعريف هذا؟ 5040

B. أوجد احتمال أن يكون للبطاقة المختارة عشوائيًا عدد 4213 بالضبط. $\frac{1}{5040}$

www.almanahj.com

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

1 الاحتمال باستخدام التباديل

الأمثلة 1-4 توضح كيفية استخدام التباديل لإيجاد العدد المحتمل لطرق ترتيب الأشياء

التقويم التكويني

استخدم التمرينات الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1. **مسابقة المواهب** شارك مازن وأيوب، مع 30 شخصًا آخر، للاختيار بمسابقة مواهب. وينادى على المتسابقين بشكل عشوائي لتقديم أدائهم أمام الحكّام. فما احتمال أن يتم مناداة مازن للأداء أولاً ثم مناداة أيوب ثانيًا؟ $\frac{1}{870}$

2. يوجد 12 قطعة صغيرة معروضة للرعاية في الملجأ المحلي. أربع منها بنيات اللون، وأربع أخرى سَوّداوات وثلاث منقطات وواحدة بيضاء. فما احتمال أن يتم بيع جميع الهريرات بنيات اللون أولاً؟ $\frac{1}{495}$

التدريس باستخدام التكنولوجيا

مُشغّل الوسائط المحمول اطلب من الطلاب إيجاد العدد الإجمالي للأغاني الموجودة على مُشغّل الوسائط المحمول الخاص بهم وعدد الأغاني لكل نوع من أنواع الموسيقى. اطلب من الطلاب إيجاد احتمال أن تكون الأغنية المختارة بشكل عشوائي من نوع مختار.

أمثلة إضافية

3 **قطع المكعبات** يحتوي أحد صناديق قطع المكعبات على خمس قطع زرقاوات (bl) وقطعتين ذهبيتين (gd) وقطعتين خضراوين (gr) بترتيب عشوائي. ويمثل النمط المرغوب في bl, gd, bl, gr, bl, gd, bl, gr, bl. فإذا اخترت تباديل لقطع المكعبات بشكل عشوائي، فما احتمال أن يتم اختيارهم بالترتيب الصحيح؟ $\frac{1}{756}$

نصيحة للمعلمين الجدد

التفكير المنطقي ذكر الطلاب بإعادة قراءة السؤال المطلوب منهم إجابته والتحقق من مدى صحة إجاباتهم. فعلى سبيل المثال، قد يحسب الطلاب في المثال 3 عدد التباديل وكتابة الإجابة 34,650. فإذا أعادوا قراءة المسألة، فسيجدون أنها تطلب حساب احتمال تباديل معينة. أو $\frac{1}{34,650}$.

في هذه اللعبة، يجب أن تحاول ابتكار كلمة باستخدام مربعات الحروف المختارة بشكل عشوائي. افترض أنك اخترت المربعات الموضحة. إذا اعتبرت أن الحرفين O و O هما حرفان متمايزان، فهناك 5! أو 120 تبديلاً لهذين الحرفين.

فيما يلي قائمة بالترتيبات الأربعة المحتملة.

POOLS POOLS SPOOL SPOOL

لاحظ أنه إن لم تُلون حروف O، فسوف تظهر عدة ترتيبات بشكل واحد. بما إن هناك حرفين O يمكن ترتيبهما على نحو 2! أو بطريقتين، فإن عدد تباديل الحروف O و P و O و L و S يمكن كتابته بطريقة $\frac{5!}{2!}$

المفهوم الأساسي التباديل بالتكرار

عدد التباديل التي يمكن تمييزها من عدد n من الكائنات يتكرر فيها كائن واحد r_1 من المرات، بينما يتكرر الآخر r_2 من المرات، وهكذا، هو

$$\frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \ldots \cdot r_k!}$$

مثال 3 الاحتمالات والتباديل مع التكرار

برنامج ألعاب في برنامج ألعاب، تُعطى الحروف التالية ويُطلب منك أن تعيد ترتيبها لينتج اسم نهر أمريكي. إذا اخترت تباديل هذه الحروف بشكل عشوائي، فما احتمال أن يكون هجاؤها الصحيح هو MISSISSIPPI؟

I P S S P I S I M I S

الخطوة 1 هناك إجمالي 11 حرفًا، من بين هذه الحروف تكرر حرف I 4 مرات، وتكرر حرف S 4 مرات، وحرف P مرتين. إذًا، عدد التباديل المميزة لهذه الحروف هو $\frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} = \frac{39,916,800}{1152}$ أو 34,650.

استخدم الآلة الحاسبة.

الخطوة 2 يوجد ترتيب واحد مفضل وهو MISSISSIPPI.

الخطوة 3 احتمال نطق تباديل هذه الحروف المختارة عشوائيًا لكلمة Mississippi هي $\frac{1}{34,650}$

تمرين موجّه

3. أرقام الهاتف ما احتمال أن يكون عدد هاتف مكون من 7 أرقام هي 5 و1 و6 و5 و2 و1 و5 مرتبًا بالشكل 5215551؟ $\frac{1}{420}$

حتى الآن، أنت تدرس العناصر المرتبة في ترتيب خطي. لاحظ أنه عند ترتيب البهارات في خط مستقيم، فإن تغيير موضع كل بهار إلى جهة اليمين ينتج عنه تبديل مختلف—الآن أصبح بهار الكاري هو الأول بدلاً من الملح. هناك 5! تباديل متمايزة لهذه البهارات.

الربط بالحياة اليومية

اختار برنامج لعبة *Price is Right* عام 1956 وهو البرنامج الذي استمر لأطول فترة في الولايات المتحدة الأمريكية.

المصدر: IMDb

www.almanahj.com

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

نصيحة دراسية

قلب الدائرة إذا بدا الشكل الدائري على نفس هيئته عند قلبه، كما لو حملة مخارج مفرغة، فيجب قسمة عدد التباديل على 2.

في **التباديل الدائرية**، ترتب الأجسام في دائرة أو حلقة. تأمل ترتيب تلك البهارات عند وضعها على قرص دوار. لاحظ أن إدارة القرص الدوار بترتيب عقارب الساعة باتجاه واحد لا ينتج تباديل مختلفة، حيث إن ترتيب البهارات المرتبطة ببعضها البعض يظل كما هو دون تغيير.

بما أن 5 لفات للقرص الدوار ينتج عنها التباديل نفسها، فإن عدد التباديل المميزة على القرص الدوار هو $\frac{1}{5}$ من العدد الكلي للترتيبات عند وضع البهارات في خط مستقيم.

$\frac{1}{5} \cdot 5! = \frac{5 \cdot 4!}{5}$ أو $4!$ يساوي $(5 - 1)!$

مهن في حياتنا

علماء الإحصاء يجمع علماء الإحصاء البيانات الإحصائية لمدة مجالات، بما فيها الرياضة والألعاب. وهم يستخدمون برمجة الحاسب في تحليل البيانات وتفسيرها وتلخيصها. معظم علماء الإحصاء حاصلون على درجة الماجستير.

المفهوم الأساسي التباديل الدائرية

عدد التباديل المتمايزة لعدد n من الأجسام مرتبة في شكل دائرة بلا نقطة مرجعية ثابتة هو $(n - 1)!$ أو $\frac{n!}{n}$

إذا كانت الأجسام n مرتبة بالنسبة إلى نقطة مرجعية ثابتة، فإن الترتيبات تعامل كترتيبات خطية، وهذا يعني تحديد عدد تباديل $n!$.

مثال 4 الاحتمالات والتباديل الدائرية

أوجد الاحتمال المشار إليه. اشرح استنتاجك.

a. المجوهرات إذا كانت الفصوص الستة الموضحة على الصور مرتبة ترتيبًا عشوائيًّا، فما احتمال أن ينتج الترتيب الموضح

بما أنه لا توجد نقطة مرجعية ثابتة، فذلك تباديل دائرية. إذًا، يوجد $5!$ أو $(6 - 1)!$ تباديل مميزة من الفصوص. وبالتالي، فاحتمال إنتاج الترتيب الموضح هي $\frac{1}{120}$ أو $\frac{1}{5!}$.

b. مأدبة الطعام أنت تجلس مع مجموعة من 4 أشخاص حول طاولة. وأحد الكراسي الملتفة حول الطاولة يقع بجوار النافذة. فإذا كان الحضور جالسين بشكل عشوائي، فما مدى احتمال أن يجلس الشخص الذي يدفع الفاتورة بجوار النافذة؟

بما أن الأشخاص جالسون حول طاولة لها نقطة مرجعية ثابتة، فذلك تباديل خطية. إذًا هناك $4!$ أو 24 طريقة يمكن للأشخاص أن يلتفوا بها حول الطاولة. عدد النتائج المفضلة هو عدد تباديل 3 من الحضور بفرض أن الشخص الذي سيدفع الفاتورة جالس بجوار النافذة. $3!$ أو 6.

إذًا، احتمال جلوس الشخص الذي يدفع الفاتورة بجوار النافذة هي $\frac{6}{24}$ أو $\frac{1}{4}$.

أمثلة إضافية

4 أوجد الاحتمال المشار إليه. اشرح استنتاجك.

a. المقاعد إذا جلس 8 طلاب بشكل عشوائي في دائرة بالمقاعد الموضحة، فما احتمال أن يجلس الطلاب في الترتيب الموضح؟

$\frac{1}{5\,040}$؛ حيث إنه لا يوجد نقطة مرجعية ثابتة، لذا فهي تباديل دائرية.

b. اشتريت علبة من 8 أقلام تلوين. فإذا تم تعليب أقلام التلوين بشكل عشوائي، فما احتمال أن يكون قلم التلوين الموجود أقصى اليسار أحمر؟

$\frac{1}{8}$؛ حيث إن أقلام التلوين مرتبة في صف، لذا فهي تباديل خطية.

www.almanahj.com

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 الاحتمال باستخدام التوافيق

المثال 5 يوضح كيفية إيجاد عدد الطرق التي يمكن ترتيب مجموعة من الأشياء بها عندما يكون الترتيب غير ذي أهمية.

أمثلة إضافية

5 توضع حروف الأبجدية المزودة بمغناطيس في حقيبة. فإذا تم سحب 5 منها بشكل عشوائي، فما احتمال أن تكون هذه الحروف a, e, i, o, u؟

$\frac{1}{65,780}$

إجابات إضافية (تمرين موجه)

4A. $\frac{1}{10}$؛ حيث إنه لا يوجد نقطة مرجعية ثابتة، لذا فهي تبادل دائري. يوجد $(1 - 11)!$ أو $10!$ تبادل مميزة من اللاعبين. يعتبر عدد النتائج المنشودة هو تبادل موقع 9 لاعبين آخرين في التجمع. إذًا، فإن احتمال أن يقف المدافع إلى يمين اللاعب خلف الوسط هي $\frac{9!}{10!}$ أو $\frac{1}{10}$.

تمرين موجه

4. كرة القدم يلتقي أعضاء فريق كرة القدم الأحد عشر معًا قبل المباراة.

A. ما احتمال وقوف حارس المرمى على يمين المركز إذا كان الفريق مجتمعًا بشكل عشوائي؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

B. إذا كان الحكم واقفًا خلف التجمع المباشر، فما احتمال وقوفه خلف لاعب خط الوسط الأيمن مباشرة؟ اشرح استنتاجك.

2 الاحتمال واستخدام التوافيق

التوافيق هي ترتيب الأجسام التي لا يكون الترتيب فيها مهمًا. افترض أنك بحاجة إلى حزم 3 أزواج من بين 8 أزواج من الجوارب لرحلة ما. لا يهم الترتيب الذي تم اختيار الجوارب به. إذًا 3 أو 6 مجموعات من الجوارب الموضحة أدناه لا تعتبر مختلفة. إذًا، ستستخدم التوافيق لتحديد عدد الاختيارات المحتملة للجوارب المختلفة.

توافيق n للأجسام المأخوذة r في كل مرة، أو ${}_nC_r$، يُحسب بقسمة عدد التباديل ${}_nP_r$ على عدد الترتيبات التي تحتوي على العناصر نفسها، $r!$.

نصيحة دراسية

التباديل والتوافيق استخدم التباديل عندما يكون ترتيب الأجسام مهمًا والتوافيق عندما لا يكون الترتيب مهمًا.

المفهوم الرئيسي التوافيق

الرموز عدد توافيق n للأجسام المتمايزة المأخوذة r في كل مرة يرمز إليه بـ ${}_nC_r$ ويمكن إيجاده باستخدام $\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$.

مثال عدد توافيق 8 أجسام مأخوذة 3 في كل مرة هو ${}_8C_3 = \frac{8!}{(8-3)!\,3!} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 6}$ أو 56.

مثال 5 الاحتمالات و ${}_nC_r$

الدعوات بإمكان ميسون أن تدعو في حفل زفافها 6 من 20 صديقة لها لرفقتها في مدينة الملاهي. فإذا اختارت أن تدعو الأصدقاء بشكل عشوائي، فما احتمال وقوع الاختيار على مايسة وموزة ومها ومنى ومنال وليلى؟

الخطوة 1 بما أن ترتيب اختيار الأصدقاء لا يهم، فإن عدد النتائج المحتملة في الفضاء العيني هو نفسه عدد التوافيق لـ 20 شخصًا مأخوذ منهم 6 أشخاص في كل مرة، ${}_{20}C_6$.

${}_{20}C_6 = \frac{20!}{(20-6)!\,6!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14!}{14! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$ أو 38,760

الخطوة 2 توجد نتيجة مفضلة واحدة وهي اختيار الطلاب الستة السالف ذكرهم. لا يهم ترتيب اختيارهم.

الخطوة 3 إذًا فاحتمال وقوع الاختيار على الأصدقاء الستة هي $\frac{1}{38,760}$.

تمرين موجه

5. الهندسة إذا كانت النقاط الثلاث المختارة بشكل عشوائي من هذه الأسماء في المستطيل الموضح، فما احتمال وقوعها جميعًا على القطعة المستقيمة نفسها؟ $\frac{1}{14}$

48. بما أن اللاعبين مجتمعون بجوار نقطة مرجعية ثابتة، فتلك تباديل خطية. هناك 11! طريقة يمكن ترتيب اللاعبين بها في البناء. عدد النتائج المفضلة هو عدد تباديل اللاعبين العشرة الآخرين بفرض أن الحكم واقف خلف لاعب خط الوسط، 10! إذًا، فاحتمال وقوف الحكم خلف لاعب خط الوسط هي $\frac{10!}{11!}$ أو $\frac{1}{11}$.

www.almanahj.com

McGraw-Hill Education هي جزء من شركة McGraw-Hill Education. جميع الحقوق محفوظة.

التحقق من فهمك

مثال 1

1. **الهندسة** طُلب من خمسة طلاب أن يختاروا مضلعًا بشكل عشوائي من المجموعة الموضحة أدناه ويسموه. ما احتمال اختيار الطالبين الأولين المثلث ورباعي الأضلاع بهذا الترتيب؟ $\frac{1}{20}$

مثال 2

2. **مسرحيات** تقوم إحدى المدارس الثانوية بتمثيل مسرحية "زهيبة في الشمس" في صف السنة الأولى الذي يتكون من 18 طالبًا بحصة اللغة الإنجليزية. إذا تم اختيار ثلاثة أعضاء من طاقم العاملين بشكل عشوائي، فما احتمال اختيار عبد الله للإضاءة وعبد الكريم للأصفاد وعبد العزيز للإضاءة المساعدة؟ $\frac{1}{4896}$

مثال 3

3. **القيادة** ما احتمال أن تكون لوحة الرخصة CFF3133 إذا كان فيها حروف C و F و F وأرقام 3 و 3 و 3 و 1؟ $\frac{1}{420}$

مثال 4

4. **الكيمياء** في معمل الكيمياء، أنت بحاجة إلى اختبار ست عينات مرتبة عشوائيًا في حلقة دائرية.

a. ما احتمال إنتاج الترتيب الموضح على اليمين؟ $\frac{1}{120}$

b. ما احتمال أن يكون أنبوب الاختبار في وضع علوي متوسط؟ $\frac{1}{6}$

مثال 5

5. دخل خمسة صبي، من بينهم عبد الرحيم وعبد الرحمن، في سحب على تذكرتين لحضور مباراة كرة القدم. ما احتمال فوز عبد الرحيم أو عبد الرحمن بالتذكرتين؟ $\frac{1}{124,750}$

التمرين وحل المسائل

مثال 1

6. **الحفلات** ليس وليد تذكرتين للذهاب إلى حفل مع الحاوي المفضل لديه سيها الظهير. إذا اختارا مقعدًا في الصف الأول بشكل عشوائي، فما احتمال جلوس ليلى في مقعد C11 وجلوس ليس في مقعد C12؟ $\frac{1}{132}$

7. **المعارض** اشترى كل من عامر وطارق تذكرة سباق واحدة من المعرض المحلي. فإذا بيعت 50 تذكرة بشكل عشوائي، فما احتمال حصول عامر على التذكرة عدد 14 وحصول طارق على التذكرة عدد 123؟ $\frac{1}{2450}$

مثال 2

8. **التمثيل** يوضح الجدول اللاعبين المؤهلين للتصفيات في منافسة تمارين أرضية. وسوف يتم اختيار الترتيب الذي يؤدون به بشكل عشوائي.

المؤهلات للتصفيات النهائية في تمارين الأرض
لياء
فوزية
فتحية
فاطمة
عبدالله
عاليا
عبير

a. ما احتمال أن تكون فتحية وفاطمة وفوزية أول لاعبات جمباز يؤدين العرض، بأي ترتيب؟ $\frac{1}{35}$

b. ما احتمال أن تكون فتحية هي الأولى وفاطمة الثانية وفوزية الثالثة؟ $\frac{1}{210}$

9. **الوظائف** يحدد أحد البنائين أرقام هوية عمال موظفيه بشكل عشوائي لتتبع الإنتاجية. كل عدد يتكون من 5 أرقام من 1 إلى 9. فإذا كان لا يُسمح بتكرار الأعداد، أوجد احتمال أن يكون العدد المولد عشوائيًا هو 25938. $\frac{1}{15,120}$

10. **المجموعات** يتم اختيار شخصين بشكل عشوائي من بين مجموعة بها 10 أشخاص. ما احتمال اختيار صالح أولاً وسلطان ثانيًا؟ $\frac{1}{90}$

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 5 للتحقق من الاستيعاب.

ثم استخدم المخطط الموجود في الجزء السفلي من هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس الممارسات في الرياضيات

التمثيل بالنماذج يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات تطبيق الرياضيات التي تعلموها في حل المسائل التي تظهر في حياتهم اليومية. في التمرين 8، سيحتاج الطلاب إلى تحديد عدد النتائج المرغوبة.

www.almanahj.com

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

تدريس الممارسات في الرياضيات

التفكير المنطقي يبدأ الطلاب المتفوقون في الرياضيات بشرح معنى المسألة لأنفسهم والبحث عن نقاط بدء الحل. في التمرين 17، شجع الطلاب على تحديد إن كان الترتيب مهمًا أم لا.

مثال 3

11. **الأقراص المغناطيسية** أحضر سعيد بعض الأقراص المغناطيسية عليها حروف ويمكنه ترتيبها لتكوين كلمة ولصقها على الثلاجة. فإذا اختار تبديل الحروف الموضحة أدناه عشوائيًا، فما احتمال تكوين كلمة BASKETBALL؟ $\frac{1}{453,600}$

12. **الرموز البريدية** ما احتمال أن يكون الرمز البريدي المولد عشوائيًا من أرقام 3 و 7 و 3 و 9 و 5 و 7 و 2 و 3 هو 39372؟ $\frac{1}{3360}$

مثال 4

13. **المجموعات** ترتب عائشة المكاتب بشكل عشوائي في دوائر من أجل أنشطة المجموعة. فإذا كان هناك 7 مكاتب داخل الدائرة، فما احتمال جلوس عائشة على المكتب الأقرب للباب؟ $\frac{1}{7}$

14. **حدائق الترفيه** شيماء في إحدى حدائق الترفيه مع أصدقائها. وقد ذهبوا في نزهة فيها مقاعد فردية موضوعة في دائرة. إذا كان عدد المقاعد هو 8، فما احتمال جلوس شيماء على المقعد الأبعد عن مدخل النزهة؟ $\frac{1}{8}$

مثال 5

15. **التصوير** إذا كنت تضع 24 صورة بشكل عشوائي داخل ألبوم الصور وكان بإمكانك أن تضع أربع صور في الصفحة الأولى، فما احتمال اختيارك الصور على جهة اليسار؟ $\frac{1}{10,626}$

16. **جولات على الطريق** تخرج شيخة في جولة على الطريق عبر دولة الإمارات العربية المتحدة. وهي بحاجة إلى اختيار المدينة التي تقضي فيها ليلة واحدة من بين 15 مدينة. إذا سحبت 3 كتيبات عشوائية عن المدينة من بين كومة بها 15 كتيبًا، فما احتمال اختيارها دبي والشارقة وأبوظبي؟ $\frac{1}{455}$

17. **الاستنتاج المنطقي** استخدم الشكل الموضح أدناه. افترض أن الكور متماثلة بشكل عشوائي.

a. ما الاحتمال في صف من 8 كرات بلياردو أن تكون الكرة عدد 2 الملونة بالكامل والكرة عدد 11 المخططة في المكانين الأول والثاني من جهة اليسار؟ $\frac{1}{56}$

b. ما الاحتمال عند خلط كرات البلياردو الثمانية بشكل عشوائي، أن ينتج في النهاية الترتيب الموضح؟ $\frac{1}{40,320}$

c. ما الاحتمال في صف من 7 كرات يتكون من ثلاث كرات تحمل العدد 8 وثلاث كرات تحمل العدد 9 وكرة تحمل العدد 6، أن تكون الثلاث كرات التي تحمل العدد 8 على اليسار وكل من الكرة التي تحمل العدد 6 والثلاث كرات التي تحمل العدد 9 على اليمين؟ $\frac{1}{140}$

d. إذا أعيد ترتيب الكرات بشكل عشوائي وكونت دائرة، فما احتمال أن تكون الكرة التي تحمل العدد 6 مجاورة للكرة التي تحمل العدد 7؟ $\frac{2}{7}$

18. كم عدد الخطوط المحددة بالنقاط العشر المختارة عشوائيًا والتي منها عدد 3 على خط واحد؟ اشرح حسابك. **45؛ الإجابة النموذجية: عدد المستقيمات هو التوافيق من بين 10 كائنات بحيث يتم أخذ 2 في كل مرة، وهو ما يساوي $\frac{10!}{8!2!}$ أو 45.**

19. افترض اختيار 7 نقاط على دائرة بشكل عشوائي، كما هو موضح على اليسار.

a. باستخدام الحروف الإنجليزية من A إلى E، كم عدد الطرق التي يمكن تسمية النقاط على الدائرة بها؟ **720**

b. إذا تم تثبيت نقطة واحدة على الدائرة، فكم عدد الترتيبات المحتملة؟ **5040**

www.almanahj.com

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

20. **الجولات** هناك لعبة أحصنة دوارة بها 7 أحصنة ومقعد خشبي يتسع لشخصين. وأحد الأحصنة لا يتحرك لأعلى ولا لأسفل.

a. كم عدد الطرق التي يمكن بها ملء مقاعد العرض عشوائيًا بستة أشخاص؟ 362,880

b. إذا تم ملء العرض عشوائيًا، فما احتمال جلوسك أنت وصديقك على المقعد الخشبي في النهاية؟ $\frac{1}{36}$

c. إذا ملأ العرض 6 من 9 أشخاص بشكل عشوائي وأمامهم دون 8، فما احتمال انتهاء الحال بالشخص الأصفر من 8 ستوات على الحصان الذي لا يتحرك لأعلى أو أسفل؟ $\frac{2}{3}$

21. **الرخص** تصور كاميرا موضوعة أعلى إشارات المرور السيارات التي لا تتوقف عند إشارة الإشارة الحمراء. وفي إحدى الصور غير الواضحة، كان بإمكان الضابط أن يرى أن الحرف الأول من لوحة الرخصة هو حرف Q، والحرف الثاني M أو N والثالث B أو P أو D. والعدد الأول 0. لكن الحرفين الأخيرين لم يكونا واضحين. كم عدد لوحات الرخصة المحتملة التي تناسب هذا الوصف؟ 600

22. **تمثيلات متعددة** في هذه المسألة، سوف تستكشف التبادل.

a. **عدديًا** اختر ثلاثة أرقام عشوائيًا من 0 إلى 9. أوجد التبادل المحتملة للأعداد الصحيحة الثلاثة.

b. **الجدول** كرر الجزء a لأربع مجموعات إضافية من بين ثلاثة أعداد صحيحة. وسوف تستخدم بعض الأعداد أكثر من مرة. انسخ وأكمل الجدول أدناه. **الإجابة النموذجية:**

أعداد صحيحة	التبادل	متوسط التبادل	متوسط التبادل ÷ 37
1, 4, 7	147, 174, 417, 471, 714, 741	444	12
2, 3, 5	235, 253, 325, 352, 523, 532	370	10
6, 8, 9	689, 698, 869, 896, 968, 986	851	23
1, 3, 5	135, 153, 315, 351, 513, 531	333	9
0, 4, 6	046, 064, 406, 460, 604, 640	370	10

22a. الإجابة النموذجية: 1, 4, 7؛ تبادل 147, 174, 417, 471, 714, 741.

22c. الإجابة النموذجية: متوسط التبادل من ثلاثة أرقام بين 0 و 9 هو مجموع الأعداد مضروب في 37.

c. **لفظيًا** عين القيمة ومتوسط القيمة لتبادل الأعداد الثلاثة بين 0 و 9.

d. **رمزيًا** إذا كانت الأعداد الثلاثة هي x، y، z فهل يمكن كتابة معادلة لمتوسط A لتبادل الأعداد؟ إذا كان الجواب بنعم، فاكتب المعادلة. وإذا كان غير ذلك، فاشرح السبب. **نعم، $A = 37(x + y + z)$**

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

23. **التحدي** دخل خمسة صبية وخمس فتيات في سحب على أربع تذاكر للسينما. ما احتمال فوز الفتيات بالتذاكر الأربع كلها؟ $\frac{13}{261}$

24. **التحدي** ادعى طالب أن التبادل والتوافيق مرتبطة بـ $_nP_r = {}_nC_r \cdot r!$. استخدم الجبر في بيان صحة ذلك. ثم اشرح لماذا $_nC_r$ و $_nP_r$ يختلفان بالعامل $r!$. **انظر الهامش.**

25. **مسألة غير محددة الإجابة** صف موقفًا تحصل فيه على الاحتمال من خلال $\frac{1}{{}_7C_3}$. **انظر الهامش.**

26. **الفرضيات** هل العبارة التالية أحيانًا صحيحة أم دائمًا صحيحة أم ليست صحيحة إطلاقًا؟ اشرح.

$$_nP_r = {}_nC_r$$

أحيانًا صحيحة، الإجابة النموذجية: العبارة صحيحة عندما تكون $r = 1$.

27. **الإثبات** برهن أن $_nC_r = {}_nC_{n-r}$. **انظر الهامش.**

28. **الكتابة في الرياضيات** قارن وبيّن الفرق بين التبادل والتوافيق. **انظر الهامش.**

التمثيلات المتعددة في التمرين 22، يستخدم الطلاب التوافيق والجداول والوصف اللفظي والتمثيل الرمزي لاستكشاف التباديل.

تدريس الممارسات في الرياضيات

الفرضيات يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات فهم واستخدام الفرضيات والتعريفات في إنشاء الفرضيات. ويضعون فرضيات ويبنون نقدًا منطقيًا للمسائل لاستكشاف حقيقة تقديراتهم. في التمرين 26، شجع الطلاب على تحليل المعادلة لعدة قيم لـ r.

إجابات إضافية

24. الإجابة النموذجية:

$$r! \times {}_nC_r = r! \times \frac{n!}{(n-r)!r!}$$
$$= \frac{n!r!}{(n-r)!r!}$$
$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$
$$= {}_nP_r$$

$_nC_r$ و $_nP_r$ يختلفان في العامل $r!$ حيث إنه يوجد دائمًا $r!$ طرق لترتيب المجموعات المختارة. وبالتالي، فهناك $r!$ تباديل لكل توفيق.

25. الإجابة النموذجية: تحتوي حقيبة على سبع بلايات باللون الأحمر والبرتقالي والأصفر والأخضر والأزرق والأرجواني والأسود. ويمكن حساب احتمال اختيار البلية البرتقالية والزرقاء والسوداء في حالة سحب ثلاث بلي بشكل عشوائي باستخدام توفيق ما.

www.almanahj.com

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4 التقويم

تعيين مصطلح الرياضيات قدم للطلاب سيناريو احتمال. ثم اطلب منهم كتابة قانون يمكنهم استخدامه لإيجاد الاحتمال وذكر السبب في أن القانون الذي اختاروه يعتبر الأكثر ملاءمة للسيناريو المقدم. اطلب من الطلاب تسليم أوراقهم قبل مغادرتهم لغرفة الصف الدراسي.

تمرين على الاختبار المعياري

29. **الاحتمالات** أربعة أفراد من فريق كرة قدم، اثنان يلعبان في خط الدفاع واثنان يلعبان في خط الوسط. فإذا اصطف هؤلاء الأفراد الأربعة، فما احتمال أن يكون المدافع عند كل نهاية من الصف إذا تراسوا بترتيب عشوائي؟ C

A $\frac{1}{24}$ C $\frac{1}{6}$

B $\frac{1}{12}$ D $\frac{1}{2}$

30. **إجابة قصيرة** إذا اخترت تبادل الحروف الموضحة أدناه عشوائيًا، فما احتمال تكوين كلمة GEOMETRY؟ $\frac{1}{20,160}$

O G Y R E M T E

31. **الجبر** يبيع اتحاد الطلبة المشروبات الغازية في مباريات كرة السلة ويكسب 150 دولار من كل مشروب. إذا دفعوا 75 دولارًا لاستئجار كشك لبيع الوجبات الخفيفة، فكم عدد المشروبات الغازية التي يمكنهم بيعها لكي يكسبوا 250 دولارًا؟ J

F 116 H 167

G 117 J 217

32. **SAT/ACT** نسبة 12:9 تساوي نسبة $\frac{1}{3}$ إلى A

A $\frac{1}{4}$ D 2

B 1 E 4

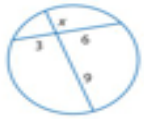
C $\frac{5}{4}$

مراجعة شاملة

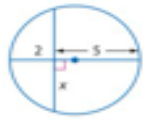
33. **التسوق** يوجد معطف شتائي بأحجام 4 أو 6 أو 8 أو 10 بألوان الأسود والبني والعاجي ولون الفرقة. كم عدد المعاطف المختلفة التي يمكن اختيارها؟ لدرس 4-5

34. مجسمان متشابهان مساحة سطحيهما 256 بوصة مربعة و 324 بوصة مربعة. ما نسبة ارتفاع المجسم الصغير إلى ارتفاع المجسم الكبير؟ 8:9

أوجد x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

35. 

2

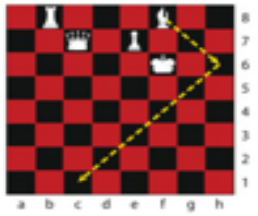
36. 

3.2

37.

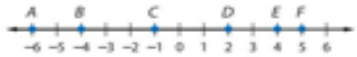
4.5

38. **الشطرنج** الحصان الموضح في مربع f7 بإمكانه أن يتحرك قطريًا في المربعات السوداء فقط. إذا كان الحصان في c1 بعد حركتين، فصف الإزاحة. 3 مربعات يساراً و 7 للأسفل



مراجعة المهارات

استخدم خط الأعداد في إيجاد كل قياس.



39. DF 3

40. AE 10

41. BF 1

42. BD 6

43. AC 5

44. CF 6

www.almananj.com

McGraw-Hill Education حقوق الطبع محفوظة لصالح مؤسسة

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 3-5 إيجاد احتمالات الحدث البسيط.

الدرس 3-5 إيجاد الاحتمالات باستخدام الطول. إيجاد الاحتمالات باستخدام المساحة.

بعد الدرس 3-5 تصميم نماذج المحاكاة لتقدير الاحتمالات وتلخيص البيانات.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اسأل:

- أي منطقة دائرية مستهدفة سيكون من الأسهل هبوط الكرة بها؟ الدائرة الأقصى بعدًا
- أي المناطق سيكون من الأصعب للكرة الهبوط فيها؟ إحدى الدوائر الموجودة في المنتصف
- ما العوامل الأخرى التي تؤثر على نتيجة اللعبة؟ الإجابة النموذجية: الوزن والسرعة وتكوين الكرة

www.almanahj.com

3-5 الاحتمالات الهندسية

السابق: لقد أوجدت احتمالات الأحداث البسيطة.

الحالي:
1. إيجاد الاحتمالات باستخدام الطول.
2. إيجاد الاحتمالات باستخدام المساحة.

لماذا؟ الهدف من لعبة الكرنفالات الموضحة هو جمع النقاط بدحرجة الكرة على المنحدر وبداخل عدة مساحات مستهدفة دائرية. تُحدد قيمة النقطة بناءً على احتمال إسقاط شخص ما الكرة في هذه المساحة.

المفردات الجديدة
الاحتمالات الهندسية
geometric probability

ممارسات في الرياضيات
1. فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
2. التفكير بطريقة تجريدية وكمية.

1 الاحتمالات مع الطول

احتمال الفوز بلعبة الكرنفال تعتمد على مساحة الهدف. تسمى الاحتمالات التي تتطلب قياسًا هندسيًا مثل الطول أو المساحة **الاحتمالات الهندسية**.

المفهوم الأساسي نسبة احتمال الطول

الشرح إذا كانت القطعة المستقيمة (1) تحتوي على قطعة أخرى (2) ونقطة على قطعة (1) يتم اختيارها بشكل عشوائي، فإن احتمال وجود النقطة على القطعة (2) هي

$$\frac{\text{طول القطعة (2)}}{\text{طول القطعة (1)}}$$

مثال إذا تم اختيار نقطة E على $\overline{AD}$ بشكل عشوائي،

فإن $P(E \text{ is on } \overline{BC}) = \frac{BC}{AD}$.

مثال 1 استخدام الأطوال في إيجاد الاحتمالات الهندسية

تم اختيار النقطة X بشكل عشوائي على $\overline{JM}$. أوجد احتمال أن يكون X على $\overline{KL}$.

$P(X \text{ على } \overline{KL}) = \frac{KL}{JM}$ نسبة احتمال الطول

$= \frac{7}{14}$ $JM = 3 + 7 + 4$ و $KL = 7$ أو 14

$= \frac{1}{2}$ أو 0.5، أو 50% بسّط الكسور

تمرين موجّه

1A. $\frac{2}{7}$، نحو 0.29، أو حوالي 29% **1B.** $\frac{11}{14}$، حوالي 0.79، أو حوالي 79%

تم اختيار النقطة X بشكل عشوائي على $\overline{JM}$. أوجد احتمال وقوع كل حدث.

1A. $P(\overline{LM} \text{ على } X)$ **1B.** $P(\overline{KM} \text{ على } X)$

يمكن استخدام الاحتمالات الهندسية في عدة مواقف واقعية تنطوي على عدد لا نهائي من النتائج.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

1 الاحتمال مع الطول

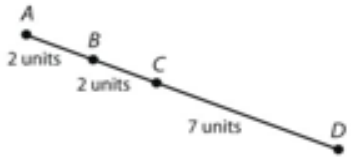
المثالان 1 و 2 يوضحان كيفية إيجاد احتمال الأحداث التي تتضمن الطول.

التقويم التكويني

استخدم التمرينات الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 تم اختيار النقطة Z بشكل عشوائي على $\overline{AD}$. أوجد احتمال وقوع Z على $\overline{AB}$.



$\frac{2}{11}$، حوالي 0.18، أو حوالي 18%

2 **المدارات** يدور مذنب هالي حول الأرض كل 76 عامًا. فما احتمال إكمال مذنب هالي لدورة حول الأرض في العقد التالي؟

$\frac{5}{38}$، حوالي 0.13، أو حوال 13%

انتبه!

الفترات ذكّر الطلاب بأن فترة الاحتمال التي يتم دراستها لا تساوي بالضرورة الفترة الكاملة للحدث. نبّه الطلاب لاستخدام فقط الوحدات المساوية للفترة التي تتم دراستها.

الربط بالحياة اليومية

يصل قطار هيئة النقل إلى شيكاغو أو يغادر المحطة كل 15 دقيقة. فأيّ قطار أيسرون على الخط الأحمر.

المصدر: هيئة النقل بشيكاغو

مثال 2 من الحياة اليومية تمثيل الاحتمالات الواقعية

النقل استخدم المعلومات الموضحة على اليمين. افترض أنك وصلت إلى أيسرون على الخط الأحمر في وقت عشوائي، فما احتمال اضطرارك لانتظار القطار لمدة 5 دقائق أو أكثر؟

يمكننا استخدام خط الأعداد لتمثيل هذا الموقف. بما أن القطارات تصل كل 15 دقيقة، فسوف يصل القطار القادم في غضون 15 دقيقة أو أقل. على خط الأعداد الموضح أدناه، يمثل حدث الانتظار لمدة 5 دقائق أو أكثر بـ $\overline{BD}$.

أوجد احتمال هذا الحدث.

$P(\text{الانتظار لمدة 5 دقائق أو أكثر}) = \frac{BD}{AD}$ نسبة احتمال الطول

$= \frac{10}{15}$ أو $\frac{2}{3}$ $BD = 10$ و $AD = 15$

إذن، فإن احتمال انتظار القطار القادم لمدة 5 دقائق أو أكثر هي $\frac{2}{3}$ أو حوالي 67%.

تمرين موجّه

2. الشاي يصنع الشاي المثلج في أحد المطاعم التي تشبه الكافتيريا في حاوية سعتها 8 جالونات. ما إن ينخفض المستوى من جالونين، تضعف نكهة الشاي.

A. ما احتمال أن يكون مستوى الحاوية أقل من جالونين عندما يطلب شخص كوبًا من الشاي؟ $\frac{1}{4}$ أو 25%

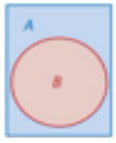
B. ما احتمال أن يتراوح مقدار الشاي في الحاوية في أي وقت ما بين 2 إلى 3 جالونات؟ $\frac{1}{8}$ أو 12.5%

2 الاحتمالات مع المساحة

قد تتضمن الاحتمالات الهندسية المساحة أيضًا. نسبة حساب الاحتمالات الهندسية التي تتضمن المساحة موضحة أدناه.

المفهوم الأساسي نسبة احتمالات المساحة

الشرح إذا كانت المنطقة A تحتوي على المنطقة B والنقطة E في المنطقة A مختارة بشكل عشوائي، فإن احتمال أن تكون النقطة E في المنطقة B هي $\frac{\text{مساحة المنطقة B}}{\text{مساحة المنطقة A}}$



مثال إذا تم اختيار النقطة E بشكل عشوائي في المستطيل A، فإن $P(\text{نقطة } E \text{ في الدائرة } B) = \frac{\text{مساحة المنطقة B}}{\text{مساحة المنطقة A}}$

عند تحديد الاحتمالات الهندسية بالأهداف، نفترض

- أن الجسم يسقط داخل المساحة الهدف.
- و أن احتمالات سقوط الجسم في أي مكان من المنطقة متساوية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

www.almanahj.com

الربط بالحياة اليومية

في العادة يهبط أبطال لعبة القفز الحر على بعد أقل من نصفين من مركز الهدف.

المصدر: لعبة القفز الحر

القفز الحر افترض أن لاعب القفز الحر يهبط على هدف من ثلاث دوائر متحدة المركز. إذا كان قطر الدائرة المركزية 2 ياردة والدوائر تبعد عن بعضها البعض بمقدار 1 ياردة، فما احتمال هبوط لاعب القفز الحر في الدائرة الحمراء؟

أنت بحاجة إلى إيجاد نسبة مساحة الدائرة الحمراء إلى مساحة الهدف كاملاً. نصف قطر الدائرة الحمراء 1 ياردة، بينما نصف قطر الهدف كاملاً 1 + 1 + 1 أو 3 ياردات.

نسبة احتمال المساحة

P (لاعب القفز الحر يهبط داخل الدائرة الحمراء) $= \frac{\text{مساحة الدائرة الحمراء}}{\text{مساحة الهدف}}$

$A = \pi r^2$

$= \frac{\pi(1)^2}{\pi(3)^2}$

حول لأبسط صورة.

$= \frac{\pi}{9\pi}$ أو $\frac{1}{9}$

احتمال هبوط لاعب القفز الحر داخل الدائرة الحمراء هي $\frac{1}{9}$ أو نحو 11%.

تمرين موجّه

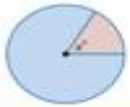
3. **القفز الحر** أوجد الاحتمالات باستخدام المثال السابق.

A. P (يهبط لاعب القفز الحر داخل البقعة الزرقاء) $\frac{5}{9}$ أو نحو 56%

B. P (يهبط لاعب القفز الحر داخل البقعة البيضاء) $\frac{1}{3}$ أو نحو 33%

www.almanahj.com

يمكنك أيضًا استخدام قياس الزوايا لإيجاد الاحتمالات الهندسية. نسبة مساحة القطاع في دائرة ما إلى مساحة الدائرة بالكامل هي نفسها نسبة زاوية مركز القطاع إلى 360. سنثبت هذا في التمرين 27.



مثال 4 استخدام قياسات الزوايا في إيجاد الاحتمالات الهندسية

استخدم القرص الدوار في إيجاد الاحتمالات في كل مما يلي.

a. P(يتجه المؤشر إلى اللون الأصفر)

قياس الزاوية في البقعة الصفراء هو 45.

P(يتجه المؤشر إلى اللون الأصفر) $= \frac{45}{360}$ أو 12.5%

b. P(يتجه المؤشر إلى اللون البنفسجي)

قياس الزاوية في البقعة البنفسجية هو 105.

P(يتجه المؤشر إلى اللون البنفسجي) $= \frac{105}{360}$ أو نحو 29%

c. P(يتجه المؤشر إلى اللون الأحمر أو الأزرق)

مجموع قياسات الزوايا في البقعتين الحمراء والزرقاء هو 70 + 50 أو 120.

P(يتجه المؤشر إلى اللون الأحمر أو الأزرق) $= \frac{360 - 120}{360}$ أو نحو 67%

تمرين موجّه

4A. P (يتجه المؤشر إلى اللون الأزرق)

4B. P (يتجه المؤشر إلى اللون الأخضر)

نصيحة دراسية

استخدم التقدير في المثال 4b، مساحة القطاع البنفسجي أقل قليلًا من $\frac{1}{3}$ أو 33% مساحة القرص الدوار. إذن، الإجابة 29% معقولة.

4A. $\frac{7}{36}$ أو نحو 19%

4B. $\frac{3}{4}$ أو 75%

2 الاحتمال مع المساحة

المثالان 3 و 4 يوضحان كيفية إيجاد احتمال الأحداث التي تتضمن مساحة.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

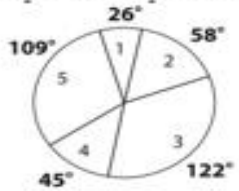
كاميرات المستندات استخدام الأشياء الملونة المختلفة لتمثيل المساحات لعدة مناطق بأحد الأشكال. اطلب من الطلاب تمثيل عدة مسائل تتضمن المساحة والاحتمال الهندسي.

أمثلة إضافية

3 **رمي السهام** تتشكل أهداف لوحة رمي سهام من 3 دوائر مركزية. إذا كان قطر الدائرة المركزية 4 بوصات وتبعد الدوائر عن بعضها البعض بمقدار 3 بوصات، فما احتمال رمي لاعب لسهم في الدائرة المركزية؟

$\frac{1}{16}$ أو حوالي 6%

4 استخدم القرص الدوار في إيجاد الاحتمالات في كل مما يلي.



a. P(اتجاه مؤشر إلى القسم 3)

$\frac{122}{360}$ أو حوالي 34%

b. P(اتجاه مؤشر إلى القسم 1)

$\frac{26}{360}$ أو حوالي 7%

التركيز على محتوى الرياضيات

المساحة تذكر أنه عند مقارنة مساحة الأشكال المتماثلة، تكون نسبة المساحات

التحقق من فهمك

مثال 1 تم اختيار النقطة X بشكل عشوائي على $\overline{AD}$. أوجد احتمال وقوع كل حدث.

1. $P(\overline{BD}$ على $X)$ 0.5 أو $\frac{1}{2}$ أو 50%
2. $P(\overline{BC}$ على $X)$ 0.3 أو $\frac{3}{10}$ أو 30%

مثال 2

3. **البطاقات** في لعبة الأوراق، تستخدم 43 ورقة، بما فيها الجوكر. يتعامل أربعة من اللاعبين مع 10 أوراق وبقية الأوراق توضع في كومة. إن لم يكن بحوزة رشيد ورقة الجوكر، فما احتمال حيازة زميله عليها أو وجودها ضمن الكومة؟ 0.39 أو $\frac{13}{33}$ أو نحو 39%

الأمثلة 3-4

5. **الملاحة** ضل أحد المخيمين طريقه في الغابات فوجه بوصلته في اتجاه عشوائي. أوجد احتمال توجه المخيّم في الشمال إلى الشمال الشرقي. $\frac{1}{8}$، أو 0.125، أو 12.5%

4. **الرماية** يستهدف الرامي هدفًا قطره 122 سم في 10 دوائر متحدة المركز تقل أقطارها بمقدار 12.2 سم كلما اقتربت من المركز. أوجد احتمال وصول الرامي إلى المركز. $\frac{1}{100}$، 0.01 أو 1%

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **الاستنتاج** تم اختيار النقطة X بشكل عشوائي على $\overline{FK}$. أوجد احتمال وقوع كل حدث.

6. $P(X$ على $\overline{FH})$ 0.44 أو $\frac{4}{9}$ أو 44%
7. $P(X$ على $\overline{GJ})$ 0.72 أو $\frac{13}{18}$ أو 72%
8. $P(X$ على $\overline{HK})$ 0.56 أو $\frac{5}{9}$ أو 56%
9. $P(X$ على $\overline{FG})$ 0.11 أو $\frac{1}{9}$ أو 11%

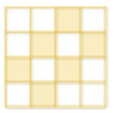
10. **الطيور** أربعة طيور تقف على سلك كهربي. ما احتمال هبوط طائر خالص على نقطة مختارة عشوائيًا بين الطائرين 1 و 4 واستقراره عند نقطة ما بين الطائرين 3 و 4؟ 0.33 أو $\frac{1}{3}$ أو 33%

مثال 2

11. **التليفزيون** يشاهد راشد التليفزيون ويرى إعلانًا لـ CD يعلم أن صديقه يريده لحفل زفافه. إذا كان الإعلان يذاع في توقيت عشوائي في كل فاصل من 3 ساعات، فما احتمال رؤيته الإعلان مرة أخرى أثناء فترة مشاهدة مسلسله المفضل الذي يستمر 30 دقيقة في اليوم التالي؟ 0.17 أو $\frac{1}{6}$ أو نحو 17%

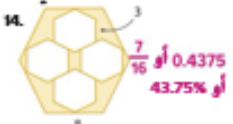
مثال 3 أوجد احتمال وقوع نقطة مختارة بشكل عشوائي داخل المنطقة المظللة. افترض أن الأشكال التي تبدو منتظمة ومتطابقة هي بالفعل أشكال منتظمة ومتطابقة.

12. $\frac{3}{8}$ 0.375 أو 37.5%



13. $\frac{1}{2}$ أو 0.5 أو 50%

14. $\frac{7}{16}$ أو 0.4375 أو 43.75%



McGraw-Hill Education حقوق الطبع والنشر © محفوظة لصالح مؤسسة

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 5 للتحقق من الاستيعاب.

ثم استخدم المخطط الموجود في الجزء السفلي من هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج يستوعب الطلاب المتفوقون في الرياضيات الكميات وعلاقاتها في المواقف المذكورة في المسائل. في التمارين 6 إلى 9، شجع الطلاب على تصميم رسم تخطيطي لكل تمرين.

إجابة إضافية

27. الإجابة النموذجية: إن احتمال وقوع نقطة مختارة عشوائيًا في المنطقة المظللة هي نسبة مساحة المقطع إلى مساحة الدائرة.

P(النقطة الواقعة في مقطع) $= \frac{\text{مساحة المقطع}}{\text{مساحة الدائرة}}$

$\frac{x}{360} \stackrel{?}{=} \frac{\frac{x}{360} \times \pi r^2}{\pi r^2}$

$\frac{x}{360} = \frac{x}{360}$ ✓

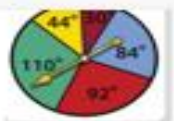
www.almanahj.com

تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج المنطقي يبدأ الطلاب المتحوقون في الرياضيات بشرح معنى المسألة لأنفسهم والبحث عن نقاط بدء الحل. فيخططون لمسار الحل بدلاً من القفز لمحاولة الحل ببساطة. في التمارين 29-31، شجع الطلاب على وضع خطة لحل كل مسألة أولاً.

مثال 4

استخدم القرص الدوار في إيجاد الاحتمالات في كل مما يلي. إذا استقر القرص على احد الخطوط، فإنه يُدار مرة أخرى.



15. P(يتجه المؤشر إلى اللون الأصفر) 12.2%

16. P(يتجه المؤشر إلى اللون الأزرق) 23.3%

17. P(يتجه المؤشر إلى اللون الأخضر) 69.4%

18. P(يتجه المؤشر إلى اللون الأحمر) 25.6%

19. P(يتجه المؤشر إلى اللونين الأحمر أو الأصفر) 62.2%

صف حدثاً به احتمال 33% لكل نموذج.

20.
الإجابة النموذجية: الهبوط على اللون الأخضر

21.

الإجابة النموذجية: نقطة بين 10 و 20

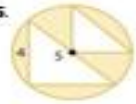
22.
الإجابة النموذجية: الحصول على الضوء الأحمر

أوجد احتمال وقوع نقطة مختارة بشكل عشوائي داخل المنطقة المظللة.

23.
$\frac{1}{2}$ أو 0.5 أو 50%

24.

0.755 أو 75.5%

25. 

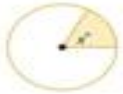
53.5%

26. **الزراعة** يظهر التصميم العام للمزرعة وكل مربع يمثل حقل. قدّر مساحة كل حقل للإجابة عن كل سؤال.

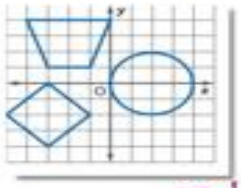
a. ما المساحة المجمعة التقريبية لحقول السبانخ والذرة؟ 67 وحدة مربعة

b. أوجد احتمال استخدام مخطط مختار بشكل عشوائي لنمو فول الصويا. 0.16 أو 16%

27. **الجبر** أثبت أن احتمال وقوع النقطة المختارة بشكل عشوائي داخل الدائرة في المنطقة المظللة تساوي $\frac{x}{360}$. انظر الهامش.



28. **الهندسة الإحداثية** إذا تم اختيار نقطة بشكل عشوائي في شبكة الإحداثيات الموضحة على اليسار، فأوجد كل احتمال. قرّب إلى أقرب جزء من مائة.



a. P(نقطة داخل الدائرة) 0.13 أو $\frac{\pi}{25}$ أو 13%

b. P(نقطة داخل شبه المنحرف) 0.09 أو $\frac{9}{100}$ أو 9%

c. P(نقطة داخل شبه المنحرف أو المربع أو الدائرة) 0.30 أو $\frac{3}{10}$ أو 30%

الاستنتاج المنطقي أوجد احتمال وقوع نقطة مختارة عشوائيًا داخل المنطقة المظللة.

29.

0.24 أو 24%

30.

0.21 أو 21%

31.

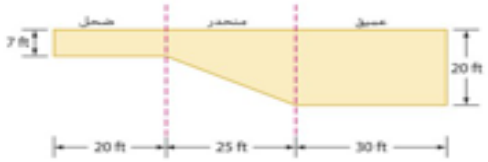
0.33 أو 33%

www.almanahj.com

Holt, Rinehart and Winston, a division of Holt, Rinehart and Winston, Inc. All rights reserved.

32. **الهندسة الإحداثية** مثل نظام المتباينات $1 \le Y \le X$ و $Y \le X$ و $6 \ge X \ge 1$.
إذا تم اختيار نقطة (X, Y) في نظام يشكل عشوائي، فما احتمال أن يكون $(x-1)^2 + (y-1)^2 \ge 16$؟
0.50 أو 50%

33. **الحجم** في معرض الدب القطبي بإحدى حدائق الحيوان المحلية يوجد حوض سباحة على جانب الصورة الموضحة. إذا كان عرض الحوض 20 قدمًا، فما احتمال تواجد الدب في المنطقة المحرفة علمًا بأن احتمالات سباحته في أي مكان من الحوض متساوية؟ **0.31 أو 31%**



34. **اتخاذ القرار** أجلت رحلة طيران عائشة وهي تسارع للحاق بمسابقة علمية قومية. إنها تخطط لاستئجار سيارة في المطار وتفضل شركة تأجير السيارات A على شركة تأجير السيارات B. تصل السيارة الصغيرة التابعة لشركة تأجير السيارات A كل 7 دقائق، بينما تصل السيارة الصغيرة التابعة لشركة B كل 12 دقيقة.

a. ما احتمال أن تضطر عائشة للانتظار لمدة 5 دقائق أو أقل لكي ترى إحدى السيارتين ؟ اشرح استنتاجك.
(إرشاد: استخدم نموذج مساحة).

b. ما احتمال أن تضطر عائشة للانتظار لمدة 5 دقائق أو أقل لترى كل سيارة؟ اشرح استنتاجك.

c. بإمكان عائشة ألا تنتظر أكثر من 5 دقائق دون المخاطرة بالتأخير على المسابقة. إذا كان من المتوقع وصول السيارة التابعة للشركة B أولاً، فهل ينبغي لها أن تنتظر السيارة التابعة للشركة B أم تركب سيارة الشركة B؟ اشرح استنتاجك.

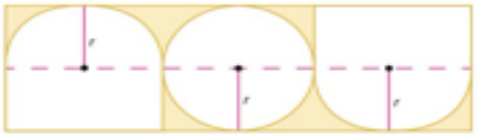
34a–c. انظر ملحق إجابات الوحدة 5.

36. الإجابة النموذجية: باستخدام نظرية متباينة المثلث، يوجد 7 مثلثات متساوية الساقين وأطوال أضلاعه أعداد صحيحة ومحيطه 32 سم. من بين هذه المثلثات، يوجد مثلث واحد فقط أطوال أضلاعه 10 و 10 و 12 ومساحته 48 سم مربع. إذن، الاحتمال $\frac{1}{7}$ من 7.

www.almanahj.com

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

35. **التحدي** أوجد احتمالات وقوع نقطة مختارة عشوائيًا داخل المساحة المظللة من الشكل. قرّب إلى أقرب جزء من العشرة في المئة. **14.3%**



36. **الاستنتاج** مثلث متساوي الساقين محيطه 32 سنتيمتر. وأطوال أضلاع المثلث أعداد صحيحة. فما احتمالات أن تكون مساحة المثلث 48 سنتيمتر مربع بالضبط؟ اشرح.

37. **الكتابة في الرياضيات** هل يمكن اعتبار الأحداث الرياضية أحداثًا عشوائية؟ اشرح. **انظر الهامش.**

38. **مسألة غير محددة الإجابة** مثّل احتمالات 20% لاستخدام ثلاثة أشكال هندسية مختلفة. **انظر الهامش.**

39. **الكتابة في الرياضيات** اشرح السبب في كون احتمالات سقوط نقطة مختارة عشوائيًا في المنطقة المظللة من المربعات الموضحة هي نفسها لا تتغير. **انظر الهامش.**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريس الممارسات في الرياضيات

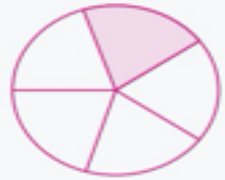
الاستنتاج يستوعب الطلاب المتفوقون في الرياضيات الكميات وعلاقاتها في المواقف المذكورة في المسائل. في التمرين 36. شجع الطلاب على تصميم رسم تخطيطي وتعيينه.

إجابات إضافية

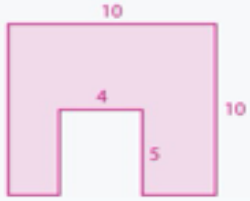
37. لا؛ الإجابة النموذجية: ينبغي عدم اعتبار الأحداث الرياضية عشوائية حيث إنه يوجد عوامل أخرى متضمنة، مثل الضغط والقدرة اللذين يكون لهما تأثير على نجاح الحدث.

38. الإجابة النموذجية: إن احتمال وقوع نقطة مختارة على $\overline{AC}$ بين A و B هي 20%.

إن احتمال وقوع نقطة مختارة عشوائيًا في الدائرة في المنطقة المظللة هي 20%.



إن احتمال وقوع نقطة مختارة عشوائيًا في المربع في المنطقة غير المظللة هي 20%.



40. **الاحتمالات** دائرة نصف قطرها 3 موضوعة داخل مربع طول ضلعه 9. ما احتمال وقوع نقطة مختارة عشوائيًا في المربع بداخل الدائرة؟ **C**

A $\frac{1}{9}$
B $\frac{1}{3}$
C $\frac{\pi}{9}$
D $\frac{9}{\pi}$

41. **الجبر** مساحة غرفة شيماء $x^2 + 8x + 12$ قدمًا مربعة. يغطي جالون الطلاء مساحة $x^2 + 6x + 8$ أقدام مربعة. أي تعبير يعطي عدد جالونات الطلاء التي ستحتاج إليها شيماء لطلاء غرفتها؟ **F**

F $\frac{x+6}{x+4}$
G $\frac{x-4}{x-6}$
H $\frac{x+4}{x+6}$
J $\frac{x-4}{x+6}$

42. **إجابة موسعة** يُقسم القرص الدوار إلى 8 أقسام متساوية.

a. إذا توقف السهم عند عدد معين، فما احتمال توقفه عند عدد 3؟ $\frac{1}{8}$

b. إذا توقف السهم عند عدد معين، فما احتمال توقفه عند عدد فردي؟

43. **SAT/ACT** صندوق يحتوي على 7 كرات زجاجية زرقاء و 6 كرات زجاجية حمراء وكرتين زجاجيتين بيضاوين و 3 كرات زجاجية سوداء. إذا تم اختيار كرة زجاجية واحدة بشكل عشوائي، فما احتمال أن تكون حمراء؟ **C**

A 0.11
B 0.17
C 0.33
D 0.39
E 0.67

مراجعة شاملة

44. **العشاء** أربعة أصدقاء يجلسون معًا على طاولة. ما احتمال أن يجلس أحدهم على الكرسي الأقرب إلى المطبخ؟ $\frac{1}{4}$ (الدرس 2-5)

مثّل الفضاء العيني لكل تجربة بإعداد قائمة منظمة وجدول ومخطط شجري. (الدرس 2-1)

45. أعلم خميس عمار بأن يلقي دروس رياضية على مدار العامين الثانيين وأن يتعلم الدرس أو المساعدة. **انظر ملحق إجابات الوحدة 5.**

46. يمكن شيخة أن تشتري زوجًا من الأحذية إما مسطحًا وإما بكعب أسود اللون أو أزرق سماوي. **انظر ملحق إجابات الوحدة 5.**

الزجاج الملون في النافذة ذات تصميم الزجاج الملون، تكون جميع الأقواس الصغيرة حول الدائرة متطابقة. افترض أن مركز الدائرة هو النقطة O.

47. ما قياس كل من الأقواس الصغيرة؟ 45

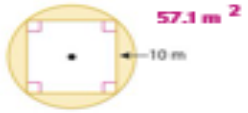
48. ما نوع الصورة $\triangle AOC$؟ اشرح. **انظر الهامش.**

49. ما نوع الصورة التي فيها رباعيات الأضلاع $BDFH$؟ اشرح. **انظر الهامش.**

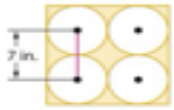
50. ما نوع الصورة التي فيها رباعيات الأضلاع $ACEG$؟ اشرح. **انظر الهامش.**

مراجعة المهارات

أوجد مساحة كل منطقة مظللة. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

51. 

57.1 m²

52. 

42.1 in²

53.

66.3 cm²

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

www.almanahj.com

4 التقويم

الكرة البلورية اطلب من الطلاب كتابة فقرة توضح كيف قد يساعدها الدرس الخاص بالاحتمالات في إيجاد قيمة نماذج المحاكاة.

إجابات إضافية

39. الإجابة النموذجية: يمكن إيجاد احتمال وقوع نقطة مختارة عشوائيًا في المنطقة المظللة من المربع على اليسار من خلال طرح مساحة المربع غير المظلل من مساحة المربع الأكبر وإيجاد نسبة الفرق بين المساحات إلى مساحة المربع الأكبر. إن الاحتمال هو $\frac{1^2 - 0.75^2}{1^2}$ أو 43.75%. إن احتمال وقوع نقطة مختارة عشوائيًا في المنطقة المظللة من المربع على اليمين هي نسبة مساحة المربع المظلل إلى مساحة المربع الأكبر، أي $\frac{0.4375}{1}$ أو 43.75%. وبالتالي، يكون احتمال وقوع نقطة مختارة عشوائيًا في المنطقة المظللة لأي من المربعين متساوية.

48. مثلث قائم الزاوية متساوي الساقين؛ ضلعاه متطابقتا نصف القطر مما يجعله متساوي الساقين وزاويته $\angle AOC$ هي زاوية مركزية لقوس وقياسها 90°، مما يجعل المثلث قائم الزاوية.

49. مربع؛ وتقطع كل زاوية شبه دائرة، مما يجعل زواياه 90°. ويعتبر كل ضلع من أضلاعه وترًا لقوس متطابق، ومن ثَمّ تكون الأوتار متطابقة.

50. مربع؛ وتقطع كل زاوية شبه دائرة، مما يجعل زواياه 90°. ويعتبر

التقويم التكويني

استخدام الاختبار القصير بنصف الوحدة لتقويم تقدم الطلاب في النصف الأول من الوحدة.

اطلب من الطلاب مراجعة الدرس الموضح لكل مسألة تمت إجابتها بشكل غير صحيح.

محطويات منظّم الدراسة

محطويات دينا زايك ®

قبل أن ينتهي الطلاب من اختبار منتصف الوحدة القصير، شجعهم على مراجعة المعلومات التي تم تسجيلها للدروس من 1-5 إلى 3-5 المكتوبة في محطوياتهم.

اختبار منتصف الوحدة: الدروس من 1-5 إلى 3-5

1. **الغداء** يبيع أحد المتاجر غداء فاخرًا يتكون من شطيرة وحساء وحلوى ومشروب مقابل 4.99 دراهم. تظهر الاختيارات في الجدول التالي. (الدرس 1-5)

شطيرة	حساء	حلوى	مشروب
سلطة الدجاج	طماطم	كعك	شاي
لحم بقري	مكرونة الدجاج	فطيرة	قهوة
تونة	محمرات		كولا
شرائح اللحم			كولا خالية من السكر
			حليب

a. كم عدد وجبات الغداء المختلفة التي يمكن تكوينها من المكونات الموضحة في الجدول؟ 120

b. إذا أضيف طبق شوربة وقطعتان من الحلوى، فكم عدد وجبات الغداء المختلفة التي يمكن تكوينها؟ 320

2. **الأعلام** كم عدد الإشارات المختلفة التي يمكن استخدامها مع 5 أعلام من أصل 8 أعلام مختلفة الألوان؟ (الدرس 1-5) 6720

3. **الملابس** تمتلك سها قميصان بستة ألوان مختلفة: أحمر، أزرق، أصفر، أخضر، وردي وبرتقالي. ولديها من كل لون قميصان بأكمام قصيرة وأكمام طويلة. لكل قميص، 2 اختيارات سهما بإعداد ثلاثة خطط وجدول يمثل خطط سهما. (الدرس 1-5)

انظر ملحق إجابات الوحدة 5

4. **الهجاء** لعبة تحتوي على مربع واحد لكل حرف من حروف كلمة قطارات. إذا اخترت تبادل هذه الحروف بشكل عشوائي، فما احتمال أن يكون هجاؤها بحروف قطارات؟ (الدرس 2-5) $\frac{1}{720}$

5. **التبديل** غليحة معه 3 محفظات و 4 قطع نقدية مختلفة. بكم طريقة يمكنه وضع قطعة واحدة في كل محفظة؟ (الدرس 2-5) 24

6. **العملات** ألقيت عشر قطع نقدية معدنية في آن واحد. ما عدد النتائج الظاهرة لأعلى إذا كانت القطعة الثالثة صورة؟ (الدرس 2-5) 2^9

7. أوجد احتمال وقوع نقطة مختارة بشكل عشوائي داخل المنطقة المظللة. (الدرس 3-5) نحو 51%

8. **إجابة موسعة** حبل طويل مشدود طوله 320 مترًا معلق بين قطبين. افترض أن احتمال انقطاع الحبل عند أي نقطة على طوله متساوية. (الدرس 3-5)

a. حدد احتمال حدوث القطع في الـ 50 مترًا الأولى من الحبل. نحو 16%

b. حدد احتمال حدوث القطع على بعد 20 مترًا من أحد القطبين. نحو 13%

النقطة A مختارة بشكل عشوائي على $\overline{BE}$ أوجد احتمال وقوع كل حدث. (الدرس 3-5)

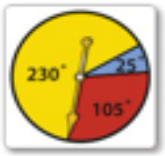
9. P(A على $\overline{CD}$) $\frac{6}{13}$

10. P(A على $\overline{BD}$) $\frac{17}{26}$

11. P(A على $\overline{CE}$) $\frac{21}{26}$

12. P(A على $\overline{DE}$) $\frac{9}{26}$

استخدم القرص الدوار في إيجاد كل احتمال. إذا استقر القرص على أحد الخطوط، أدره مرة أخرى. (الدرس 3-5)

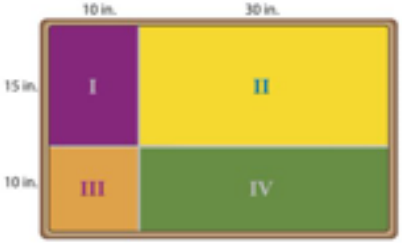


13. P(يتجه المؤشر نحو اللون الأصفر) نحو 64%

14. P(يتجه المؤشر نحو اللون الأزرق) نحو 7%

15. P(يتجه المؤشر نحو اللون الأحمر) نحو 29%

16. **الألعاب** في الاحتمال، الهدف من اللعبة هو رمي سهم صوب لوحة وإصابة المنطقة III. (الدرس 3-5)



a. ما احتمال إصابة السهم المنطقة I؟ 15%

b. ما احتمال إصابة السهم المنطقة II؟ 45%

c. ما احتمال إصابة السهم المنطقة III؟ 10%

d. ما احتمال إصابة السهم المنطقة IV؟ 30%

www.almanahj.com

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4-5 المحاكاة

السابق:
- لقد أوجدت الاحتمالات باستخدام الهندسة.

الحالي:
1 تصميم نموذج المحاكاة لتقدير الاحتمالات.
2 تلخيص البيانات من خلال نماذج المحاكاة.

لماذا؟
- على أساس التمرين، يعرف خلف أنه يحقق 70% من رمياته الحرة. ويريد أن يستخدم هذه المعلومة للتدرب بعدد الرميات الحرة التي من المحتمل أن يحرزها في المباريات.

المفردات الجديدة

نموذج الاحتمالات
probability model
المحاكاة
simulation
متغير عشوائي
random variable
قيمة التوقع
expected value
قانون الأعداد الكبيرة
Law of Large Numbers

ممارسات في الرياضيات
1 فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
4 استخدام نماذج الرياضيات.

1 صمم نموذج محاكاة نموذج الاحتمالات هو نموذج رياضي يستخدم لتطابق ظاهرة عشوائية.

المحاكاة هي استخدام نموذج الاحتمالات في إعادة ابتكار موقف مرة بعد مرة حتى يمكن تقدير احتمالات النتائج المختلفة.

لتصميم نموذج المحاكاة، استخدم الخطوات التالية.

المفهوم الأساسي تصميم نموذج محاكاة

الخطوة 1 حدد كل نتيجة محتملة واحتمالاتها النظرية.

الخطوة 2 اذكر أي افتراضات.

الخطوة 3 صف نموذج الاحتمالات المناسب للموقف.

الخطوة 4 حوّل المحاكاة بالنسبة إلى الموقف، واذكر عدد المحاولات المحتمل إجراؤها.

نموذج الاحتمالات البلاتم له الاحتمالات نفسها في نموذج المحاكاة الذي تحاول التنبؤ به. النماذج الهندسية هي نماذج الاحتمالات مشتركة.

مثال 1 تصميم نموذج محاكاة باستخدام نموذج هندسي

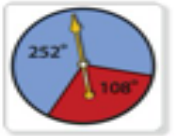
كرة السلة حقق خلف 70% من رمياته الحرة الموسم الماضي. صمم نموذج المحاكاة الذي يمكن استخدامه لتقدير احتمالات تسديده الرمية الحرة التالية هذا الموسم.

الخطوة 1 النتائج المحتملة — الاحتمال النظري
- يسدد خلف رمية حرة. ← 70%
- يخطئ خلف رمية حرة. ← (100 − 70)% أو 30%

الخطوة 2 يشتمل نموذج المحاكاة الذي نقدمه على 40 محاولة.

الخطوة 3 من الأجهزة التي يمكن استخدامها القرص الدوار المقسم إلى قطاعين، أحدهما يحتوي على 70% من مساحة القرص والآخر يحتوي على 30%. لابتكار مثل هذا القرص، أوجد قياس الزاوية المركزية لكل قطاع.

تسديد الرمية الحرة	إخفاق الرمية الحرة
70% من 360° = 252°	30% من 360° = 108°



الخطوة 4 المحاولة، دورة واحدة للقرص الدوار، سوف تمثل إصابة رمية حرة. تمثل المحاولة الناجحة في تسديد رمية حرة والمحاولة الفاشلة في إخفاق رمية حرة. وسوف تشتمل المحاكاة على 40 محاولة.

حقوق الطبع والتأليف محفوظة © لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

www.almanahj.com

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 4-5 استخدام القياسات الهندسية لإيجاد الاحتمالات.

الدرس 4-5 تصميم نماذج المحاكاة لتقدير الاحتمالات. تلخيص البيانات من خلال نماذج المحاكاة.

بعد الدرس 4-5 إيجاد احتمالات الأحداث المستقلة وغير المستقلة.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اسأل:
- إذا حصل خلف على 50 رمية حرة في الموسم السابق، فكم عدد الرميات التي حققها؟ 35
- إذا كان من المتوقع أن يحصل خلف على 60 رمية حرة هذا الموسم، فكم عدد الرميات الحرة التي يتوقع منه تحقيقها؟ 42
- ما نوع الاستنتاج الذي يستخدمه خلف لتوقع عدد الرميات الحرة التي سيحققها هذا الموسم؟ استدلال استقرائي

1 تصميم نموذج محاكاة

المثالان 1 و 2 يوضحان كيفية ابتكار واستخدام نموذج احتمال لتوقع نتائج موقف ملموس.

التقويم التكويني

استخدم التمرينات الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 **بيسيول** حصلت ياسمين على ضربات في 40% من الوقت الذي كانت فيه في موضع الضارب الموسم الماضي. صمم نموذج المحاكاة يمكن استخدامه لتقدير احتمال أن تحصل على تسديدة في المرة التالية التي تكون فيها في موضع الضارب هذا الموسم. **الإجابة النموذجية:** استخدم قرصًا دوارًا مقسمًا إلى قسمين أحدهما يغطي 40% من مساحة القرص أو °144 بينما يغطي الآخر 60% من مساحة القرص أو °216. ستمثل المحاولة، الدوران الواحد، واحدًا في موقع الضارب. وسيشتمل نموذج المحاكاة 50 محاولة.

2 **البيتزا** في استبيان بمدرسة عجمان الثانوية، وجد الطلاب أن 30% فضلوا البيتزا بالجبن و 30% فضلوا البيتزا باللحم و 20% فضلوا البيتزا بالفلفل والبصل و 20% فضلوا الدجاج. صمّم نموذج المحاكاة الذي يمكن استخدامه لتقدير احتمال أن يفضل أحد طالب مدرسة عجمان الثانوية كل من هذه الخيارات. **الإجابة النموذجية:**

تمرين موجّه

1. **المطاعم** يقوم أحد المطاعم بإرفاق قطع ألعاب مع أكواب الشراب الكبيرة التي يقدمها مقدمًا هدية لكل من يجمع قطع اللعبة الست كلها. صمم نموذج محاكاة باستخدام نموذج هندسي يمكن استخدامه في تقدير عدد أكواب الشراب التي يحتاج شخص ما إلى شرائها لكي يجمع 6 قطع ألعاب.
انظر ملحق إجابات الوحدة 5.

نصيحة حل المسائل

استخدم نموذج المحاكاة

في الغالب توفر نماذج المحاكاة إستراتيجية آمنة وكفاءة لحل المسائل في المواقف التي قد تكون مكلفة أو عطيرة أو مبكرة الحل باستخدام أساليب نظرية. يجب أن تتضمن نماذج المحاكاة البيانات الأميل في الحصول عليها من البيانات الصحيحة التي تمثلها.

بالإضافة إلى النماذج الهندسية، فإن نموذج المحاكاة يمكن إجراؤه أيضًا باستخدام النرد أو قطع النقد أو جداول الأعداد العشوائية، ومولدات الأعداد العشوائية، مثل المولدات المتوفرة على حاسبات التمثيل البياني.

مثال 2 تصميم نموذج محاكاة باستخدام الأعداد العشوائية

لون العين توصل استقصاء أجري على طلاب المدرسة الثانوية الشرقية أن 40% أعينهم بنية، و 30% أعينهم عسلية و 20% أعينهم زرقاء و 10% أعينهم خضراء. صمم نموذج محاكاة يمكن استخدامه لتقدير احتمال وجود طالب في المدرسة الثانوية الشرقية مختار عشوائيًا وعيناه ملونة بأحد من هذه الألوان.

الخطوة 1 النتائج المحتملة والاحتمال النظري

العين البنية	←	40%
العين العسلية	←	30%
العين الزرقاء	←	20%
العين الخضراء	←	10%

الخطوة 2 افترض أن أي عين الطالب يقع ضمن إحدى هذه الفئات الأربع.

الخطوة 3 استخدم مولد الأعداد العشوائية على الحاسبة الخاصة بك. حدد الأعداد العشرة الصحيحة 0-9 لتمثيل بيانات الاحتمالات بدقة. لا يهم الأعداد المحددة المختارة لتمثيل النتائج.

النتائج	الممثلة عن طريق
العين البنية	0, 1, 2, 3
العين العسلية	4, 5, 6
العين الزرقاء	7, 8
العين الخضراء	9

الخطوة 4 تمثل المحاولة اختيار طالب بشكل عشوائي وتسجيل لون عينه. وسوف تشتمل المحاكاة على 20 محاولة.

نصيحة دراسية

مولد الأعداد العشوائية

لتوليد مجموعة من الأعداد الصحيحة العشوائية على حاسبة التمثيل البياني، اضغط MATH وادخر randInt (انت ثابة PRB). بعدها أدخل قيم الأعداد الصحيحة البدائية والنهائية بالنسبة إلى مدلك وعدد الأعداد الصحيحة التي تريدها في كل محاولة.

تمرين موجّه

2. **كرة القدم** في الموسم الماضي، أحرز خالد 18% من ضرباته الحرة. صمّم نموذج محاكاة باستخدام برنامج مولد أعداد عشوائية يمكن استخدامه لتقدير احتمالات تسديده الضربة الحرة التالية. **انظر الهامش.**

2 لخّص البيانات من خلال نموذج المحاكاة بعد تصميم نموذج محاكاة، سوف تكون بحاجة إلى إجراء نموذج المحاكاة وتقديم النواتج. أدرج الملخصات العددية والبيانية لبيانات نموذج المحاكاة، بالإضافة إلى تقدير احتمالات الناتج المطلوب.

www.almanahj.com

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الربط بالحياة اليومية

حقق مارك برايس الرقم القياسي لأعلى نسبة في الرمية الحرة للحياة المهنية في NBA قدرها 90.4%.

البحث: الرابط البيدية لأول اللاعبين

كرة السلة راجع نموذج المحاكاة في المثال 1. أنشئ نموذج المحاكاة وقدم النواتج باستخدام الملخصات البيانية والعددية المناسبة.

أنشئ جدول تكرار وسجل النواتج بعد دوران القرص الدوار 40 مرة.

النتيجة	علامة الإحصاء	التكرار
تصديد رمية حرة	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |	26
خطأ رمية حرة	𝍸 𝍸 ||	14
الإجمالي		40

بناءً على بيانات المحاكاة، احسب احتمالات تصديد خلف الرمية الحرة المقبلة.

$$\frac{\text{عدد الرميات الحرة التي تم تصديدها}}{\text{عدد الرميات الحرة التي أجريت فيها محاولة}} = \frac{26}{40} = 0.65$$ هذا هو الاحتمال التجريبي.

احتمال تصديد خلف الرمية الحرة التالية هي 0.65 أو 65%. لاحظ أن هذه النسبة قريبة من الاحتمالات الرياضية 70%. إذًا، فالاحتمال التجريبي لإخفاق الرمية الحرة التالية هي 0.35 = 1 − 0.65 أو 35%.

اصنع تمثيلاً بيانيًا بالأعمدة لهذه النواتج.

تمرين موجّه

3. **لون العين** استخدم حاسبة التمثيل البياني في إجراء نموذج المحاكاة في مثال 2. ثم قدم النواتج باستخدام الملخصات البيانية والعددية المناسبة. **انظر الهامش.**

المتغير العشوائي هو متغير يمكن أن يفترض مجموعة من القيم كل منها له احتمالات ثابتة. على سبيل المثال، في تجربة رمي قطعة نقد معدنية، المتغير العشوائي X قد يمثل مجموع النواتج المحتملة على النرد. يظهر الجدول بعض قيم X المحددة لنتائج تلك التجربة.

مجموع نتائج حجرة النرد	
النتيجة	قيمة x
(1, 1)	2
(1, 2)	3
(2, 1)	3
(4, 5)	9
(6, 6)	12

قيمة التوقع، وتعرف أيضًا بالتوقع الرياضي، هي متوسط قيمة المتغير العشوائي الذي يتوقعه الفرد بعد تكرار تجربة أو محاكاة عدد لانهائي من المرات نظريًا. لإيجاد قيمة التوقع $E(X)$ لمتغير عشوائي معين X، اتبع الخطوات التالية.

المفهوم الأساسي حساب قيمة التوقع

الخطوة 1 اضرب قيمة X في احتمالات حدوثها.

الخطوة 2 كرر الخطوة 1 لجميع القيم المحتملة من X.

الخطوة 3 أوجد مجموع النواتج.

بما أنه متوسط، فليس بالضرورة أن تكون قيمة التوقع مساوية للقيمة المحتملة للمتغير العشوائي.

2 تلخيص البيانات من نموذج محاكاة

المثال 3 يوضح كيفية تقديم نتائج نموذج محاكاة عدديًا وبيانيًا. **المثال 4** يوضح كيفية حساب قيمة التوقع ومقارنتها بنتائج نموذج المحاكاة.

مثال إضافي

3 كرة البيسبول راجع نموذج المحاكاة في المثال الإضافي 1. صمم نموذج المحاكاة وقدم النواتج باستخدام الملخصات البيانية والعددية المناسبة. ستكون الإجابات متنوعة. ولكن ينبغي أن تتضمن جدول تكرار من نموذج المحاكاة والتمثيل البياني بالأعمدة المقابل.

التركيز على محتوى الرياضيات

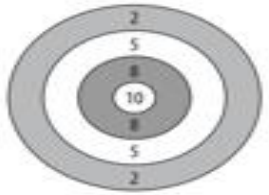
قيمة التوقع قيمة التوقع هي متوسط القيمة النظرية للمتغير العشوائي المتوقع بعد محاولات متكررة. قد لا تكون القيمة الحقيقية في نموذج محاكاة مختلفة.

www.almanahj.com

حقوق الطبع والتأليف محفوظة © لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال إضافي

4 الرماية افترض أنه تم رمي سهم على هدف. وكان نصف قطر الدائرة المركزية 3 بوصات ويزيد نصف قطر كل دائرة تالية له بمقدار 5 بوصات عن الدائرة السابقة. قيمة النقطة في كل منطقة موضحة.



a. افترض أن المتغير العشوائي Y يمثل قيمة النقطة المحددة لمنطقة ما على الهدف. احسب قيمة التوقع $E(Y)$ لكل رمية للسهم. $\frac{455}{108}$ أو حوالي 4.21

b. صمّم نموذج محاكاة لتقدير متوسط القيمة، أو متوسط نتائج نموذج المحاكاة للرمي في هذه اللعبة. كيف تقارن تلك القيمة بقيمة التوقع التي أوجدتها في الجزء a؟ ستختلف الإجابات.

اقتبه!

قيمة التوقع ذكّر الطلاب أنه يجب عليهم ضرب قيمة المتغير العشوائي في احتمال وقوعه قبل جمع القيم لإيجاد قيمة التوقع.

السهام افترض أن سهمًا رمي على لوحة السهام. نصف قطر الدائرة المركزية 1 سنتيمتر وكل دائرة لاحقة لها نصف قطر طوله أكبر بمقدار 4 سنتيمتر من الدائرة السابقة.
قيمة النقطة في كل منطقة موضحة.

a. افترض أن المتغير العشوائي Y يمثل قيمة النقطة المحددة لمنطقة ما على لوحة السهام. احسب قيمة التوقع $E(Y)$ من كل رمية.

أولاً احسب الاحتمالات الهندسية للهبوط في كل منطقة.

المنطقة 5 $= \frac{\pi(1)^2}{\pi(1+4+4+4+4)^2} = \frac{1}{289}$

المنطقة 4 $= \frac{\pi(4+1)^2 - \pi(1)^2}{\pi(17)^2} = \frac{24}{289}$

المنطقة 3 $= \frac{\pi(4+5)^2 - \pi(5)^2}{\pi(17)^2} = \frac{56}{289}$

المنطقة 2 $= \frac{\pi(4+9)^2 - \pi(9)^2}{\pi(17)^2} = \frac{88}{289}$

المنطقة 1 $= \frac{\pi(4+13)^2 - \pi(13)^2}{\pi(17)^2} = \frac{120}{289}$

$E(Y) = 1 \cdot \frac{120}{289} + 2 \cdot \frac{88}{289} + 3 \cdot \frac{56}{289} + 4 \cdot \frac{24}{289} + 5 \cdot \frac{1}{289}$ أو حوالي 1.96

قيمة التوقع لكل رمية حوالي 1.96.

b. صمّم نموذج محاكاة لتقدير متوسط القيمة أو متوسط نواتج محاكاتك من اللعبة. كيف تقارن تلك القيمة بقيمة التوقع التي أوجدتها في الجزء a؟

استخدم الأعداد العشوائية 0-789 لتمثيل احتمالات الهبوط بدقة.

المنطقة 1 = الأعداد الصحيحة 1-120
المنطقة 2 = الأعداد الصحيحة 121-208
المنطقة 3 = الأعداد الصحيحة 209-264
المنطقة 4 = الأعداد الصحيحة 265-288
المنطقة 5 = العدد الصحيح 289

استخدم حاسبة التمثيل البياني في توليد 50 محاولة من الأعداد الصحيحة العشوائية من 1 إلى 289.
سجّل النواتج على جدول التكرار. ثم احسب متوسط قيمة النتائج.

النتيجة	التكرار
المنطقة 1	16
المنطقة 2	13
المنطقة 3	13
المنطقة 4	8
المنطقة 5	0

متوسط القيمة $= 1 \times \frac{16}{50} + 2 \times \frac{13}{50} + 3 \times \frac{13}{50} + 4 \times \frac{8}{50} + 5 \times \frac{0}{50} = 2.26$

متوسط القيمة 2.26 أكبر من قيمة التوقع 1.96.

نصيحة دراسية

الاحتمالات الهندسية
تذكر أنه عند تحديد الاحتمالات الهندسية مع الأهداف، فنحن نفترض هبوط السهم داخل المنطقة المستهدفة ومن المحتمل بالقدر نفسه أيضًا هبوطه في أي مكان داخل المنطقة.

الربط بتاريخ الرياضيات

جاكوب برنولي
(1654–1705) كان جاكوب برنولي عالم رياضيات سويسريًا. وقد بدا له بوضوح أنه كلما كثرت ملاحظات مواقف ما، كانت الجدية على التنبؤ بالنتائج المستقبلية أفضل. فقد قدم دليلاً عليها على قانون الأعداد الكبيرة في كتابه Ars Conjectandi الذي نشر عام 1713.

تمرين موجّه

4. النرد إذا تدحرج نردان، فإننا نفرض أن المتغير العشوائي X يمثل مجموع النتائج المحتملة.

A. أوجد قيمة التوقع E(X) 7

B. صمّم نموذج محاكاة واستخدمه في تقدير متوسط القيمة لهذه التجربة. كيف تقارن تلك القيمة بقيمة التوقع التي أوجدتها في الجزء A؟ انظر ملحق إجابات الوحدة 5.

الاختلاف في متوسط القيمة من نموذج المحاكاة وقيمة التوقع في مثال 4 يوضح **قانون الأعداد الكبيرة**. كلما زاد عدد المحاولات في العملية العشوائية، اقترب متوسط القيمة من قيمة التوقع.

www.almanahj.com

التمرين وحل المسائل

الأمثلة 1، 3

1. **الدرجات** حصلت سمية على درجة امتياز في 80% من اختبارات الأحياء خلال الفصل الدراسي الأول. صمّم نموذج محاكاة واستخدمه مع نموذج هندسي لتقدير احتمال حصول سمية على درجة امتياز في اختبار الأحياء خلال الفصل الدراسي الثاني. قدم النواتج باستخدام الملخصات البيانية والعددية المناسبة. انظر **ملحق إجابات الوحدة 5**.

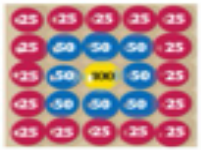
الأمثلة 2-3

2. **اللياقة** يوضح الجدول النسبة المئوية للأعضاء المشاركين في الدروس الأربعة المقدمة في صالة الألعاب الرياضية. صمّم نموذج محاكاة واستخدمه لتقدير احتمالات حضور أي عضو جديد في الصالة كل درس. قدم النواتج باستخدام الملخصات البيانية والعددية المناسبة. **انظر ملحق إجابات الوحدة 5**.

الصف الدراسي	نسبة التسجيلات %
التايكوندو	45%
اليوجا	30%
السباحة	15%
اللاكمة	10%

مثال 4

3. **ألعاب الكرنفالات** الهدف من اللعبة الموضحة هو جمع النقاط باستخدام سهم لمرقمة البالونات. افترض أن كل سهم سيخترق بالونًا.



a. احسب قيمة التوقع من كل رمية. 36

b. صمّم نموذج محاكاة لتقدير متوسط القيمة لهذه اللعبة. **انظر الهامش**.

c. كيف تقارن قيمة التوقع بمتوسط القيمة؟

الإجابة النموذجية: قيمة التوقع ومتوسط القيمة متقاربان.

الأمثلة 1، 3

4. **البولينج** سمية عضو في نادي البولينج في مدرستها. الموسم الماضي سددت ضربات أسقطت فيها الأجسام الخشبية كلها في 60% من الضربات. **انظر الهامش**.

5. **ألعاب الفيديو** يعمل حميد في أحد متاجر ألعاب الفيديو. العام الماضي باع 95% من دفعة ألعاب الفيديو الجديدة. انظر **ملحق إجابات الوحدة 5**.

6. الأناشيد تصنع سالي إلى أسطوانة وتعيد تشغيل الأسطوانات التي بها على الوضع العشوائي. توجد 10 أغنيات في الأسطوانة. انظر **ملحق إجابات الوحدة 5**.

7. **ألعاب اللوحة** يلعب حميد بإحدى ألعاب اللوحة بثماني فئات مختلفة. كل فئة فيها أسئلة يجب الإجابة عنها بشكل صحيح لكي يفوز. **انظر ملحق إجابات الوحدة 5**.

الأمثلة 2-3

التمثيل صمّم نموذج محاكاة واستخدمه مع مولد أعداد عشوائية. ثم قدم النواتج باستخدام الملخصات البيانية والعددية المناسبة.

8. **الأفلام** راجع مصرح للأفلام المبيعات من العام الماضي لتحديد نوعية الأفلام التي حققت أعلى مبيعات. النتائج موضحة على اليمين. انظر **ملحق إجابات الوحدة 5**.

النوع	نسبة التذاكر %
الكوميديا	40%
الغموض	30%
الكوميديا	25%
الإثارة	5%

9. **كرة البيسبول** طبقًا للنسب المئوية التي يسجلها أحد لاعبي كرة القاعدة في الوصول إلى القاعدة، فإنه يحرز نقطة واحدة 60% من الوقت، ويحرز نقطتين 25% من الوقت، بينما يحرز 10% من الوقت، ويسدد ضربة قاضية 5% من الوقت. انظر **ملحق إجابات الوحدة 5**.

10. المطلة طبقًا لاستفتاء أجرته وكالة سفر، فإن 45% من عملائها يسافرون إلى أوروبا لقضاء العطلة، و 25% يسافرون إلى آسيا، فيما يسافر 15% إلى أمريكا الجنوبية، و 10% إلى إفريقيا، و 5% إلى أستراليا. انظر **ملحق إجابات الوحدة 5**.

11. **النقل** أشار تحليل من تجارة السيارات إلى أن 35% من العملاء يشترون السيارة الزرقاء، و 30% منهم يشترون السيارة الحمراء، و 15% يشترون السيارة البيضاء، و 15% يشترون السوداء، و 5% يشترون ألوانًا غير ذلك.

انظر ملحق إجابات الوحدة 5.

www.almanahj.com

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 3 للتحقق من الاستيعاب.

ثم استخدم المخطط الموجود في الجزء السفلي من هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

إجابات إضافية

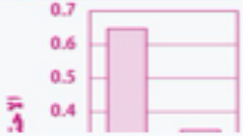
3b. الإجابة النموذجية: استخدم مولد أعداد عشوائي للحصول على الأعداد الصحيحة من 1 إلى 25 حيث إن 1-16 تمثل 25 نقطة و 17-24 تمثل 50 نقطة و 25 يمثل 100 نقطة. أجر 50 محاولة وسجل النتائج في جدول التكرار.

النتيجة	التكرار
25	29
50	21
100	0

متوسط القيمة هو 35.5.

4. الإجابة النموذجية: استخدم قرصًا دوارًا مقسمًا إلى مقطعين أحدهما يغطي 60% أو 216° والآخر 40% أو 144°. أجر 20 محاولة وسجل النتائج في جدول التكرار.

النتيجة	التكرار
رمية حاسمة	13
ليست رمية حاسمة	7
الإجمالي	20



إجابة إضافية

12. $E(Y) = 41.4$

الإجابة النموذجية:

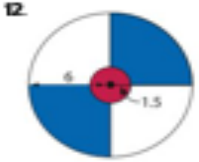
النتيجة	التكرار
أحمر	7
أزرق	20
أبيض	23
الإجمالي	50

متوسط القيمة = 47؛ إن متوسط القيمة أكبر من قيمة التوقع.

مثال 4

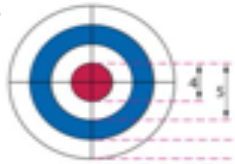
لوحة السهام توضح أبعاد لوحة السهام أدناه بالبوصات. هناك ضربة واحدة فقط في كل لعبة. احسب قيمة التوقع في كل لعبة من ألعاب السهام. ثم صمم نموذج محاكاة لتقدير متوسط القيمة في كل لعبة. قارن المتوسط بقيم التوقع. في كل شكل، ■ = 25 و □ = 50 و ■ = 100 نقطة. **12–14. انظر الهامش.**

12.



13.

14.



15. البطاقات أنت تلعب لعبة البطاقات، التي يمكن للفريق فيها إحراز عدد 0 من النقاط أو 3 نقاط في كل رمية. احتمال إحراز فريقك عدد 1 من النقاط في الرمية هي 60% واحتمال إحرازه 3 نقاط في الرمية هي 5%.

a. احسب قيمة التوقع لدى فريقك في كل رمية. **0.75**

b. صمم نموذج محاكاة لتقدير متوسط القيمة لدى فريقك في كل رمية. **انظر الهامش.**

c. قارن بين القيم في أجزاء الجزء a الجزء b. **الإجابة النموذجية: القيمتان متساويتان تقريبًا.**

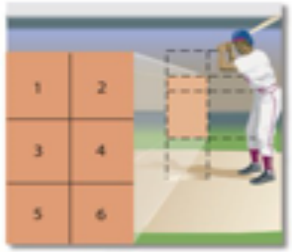
16. اتخاذ القرار الهدف من اللعبة الموضحة هو أن تكسب المال عن طريق دحرجة الكرة على منحدر في منطقة لها قيم ربح مختلفة. فاحتمال حصول ريهام على 0 دولار في الدحرجة هي 55% واحتمال حصولها على 1 دولار هي 20% بينما احتمال حصولها على 3 دولارات هي 5%. **a–c. انظر الهامش.**

a. افترض أن ريهام تدفع 1 دولار لكي تلعب. احسب الربح المتوقع، الذي يعادل قيمة التوقع مطروح منها تكلفة اللعب في كل دحرجة.

b. صمم نموذج محاكاة لتقدير متوسط الربح الذي تحققه ريهام من هذه اللعبة بعد أن تلعب 10 مرات.

c. هل يجب أن تخوض ريهام تلك اللعبة؟ اشرح استنتاجك.

17. البيسبول من بين الضربات الناجحة التي يحققها لاعب البيسبول، يريد أن يعرف أي مساحة داخل منطقة الضربات بها احتمال أعلى. فيقسم منطقة الضربات إلى ستة مربعات متطابقة كما هو موضح.



a. إذا كانت الضربة من المحتمل بالقدر نفسه أن تضرب كل مربع، فما مدى احتمال أن يحقق ضربة ناجحة في كل مربع؟

b. صمم نموذج محاكاة لتقدير احتمال تصويب الضربة في كل مربع.

c. قارن بين القيم في أجزاء a و b. **انظر ملحق إجابات الوحدة 5.**

17a. هناك $\frac{1}{6}$ أو 16.7% احتمال تسديد ضربة في كل مربع.

18. التمثيل استخدمت رنا إحصائياتها من الموسم الأخير لكي تصمم نموذج محاكاة باستخدام مولد أعداد عشوائية من أجل التنبؤ بما يتوقع أن تحرزه في كل مرة تملك فيها الكرة.

قيم الأعداد الصحيحة	النقاط المحرزة	التكرار
1-14	0	31
15	1	0
16-28	2	17
29-30	3	2

a. بناءً على جدول التردد، ما الذي افترضته رنا أن يكون الاحتمال الحظري بأن تحرز نقطتين عند امتلاك الكرة؟ 43.3% أو $\frac{13}{30}$ أو 43.3%

b. ما متوسط القيمة عند رنا في امتلاك الكرة؟ وما قيمة التوقع؟ 0.8; 1.1

c. هل تتوقع أن تكون البيانات الممثلة في نموذج المحاكاة مختلفة؟ إذا كان الجواب بنعم، فوضح الكيفية.
وإذا كان بلا، فوضح السبب. **انظر ملحق إجابات الوحدة 5.**

17c. الإجابة النموذجية: بعض القيم أكبر أو أصغر، لكن معظمها تقترب جدًا من 16.7%.

www.almanahj.com

نسخة مؤقتة © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

19. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستكشف قيمة التوقع. **انظر ملحق إجابات الوحدة 5. a–f.**

a. **بشكل ملموس** دحرج نردين 20 مرة وسجل مجموع كل دحرجة.

b. **عدديًا** استخدم مولد الأعداد العشوائي على آلة حاسبة لتوليد 20 زوجًا من الأعداد الصحيحة بين 1 و 6. سجل مجموع كل زوج.

c. **الجدول** انسخ الجدول أدناه وأكمله باستخدام نواتجك من الجزأين a و b.

المحاولة	مجموع دحرجة النرد	مجموع النتائج من مولد الأعداد العشوائية
1		
2		
...		
20		

d. **بيانيًا** استخدم التمثيل البياني بالأعمدة لتمثيل عدد مرات حدوث كل مجموع محتمل خلال الدحرجات الخمس الأولى. كرر العملية في الدحرجات العشر الأولى ثم في النتائج العشرين كلها.

e. **لفظيًا** كيف يتغير شكل التمثيل البياني الشريطي مع كل محاولة إضافية؟

f. **بيانيًا** مثل عدد مرات كل مجموع محتمل يحدث مع مولد الأعداد العشوائي بيانيًا في صورة تمثيل بياني شريطي.

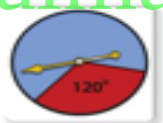
g. **لفظيًا** كيف تقارن التمثيلات البيانية لمحاولة النرد بمحاولة العدد العشوائي؟

h. **تحليليًا** بناءً على التمثيلات البيانية، في رأيك كيف تكون قيمة التوقع في كل تجربة؟ اشرح استنتاجك. **الإجابة النموذجية: قيمة التوقع في كلتا التجربتين هي 7 لأن المجموع هو ما يحدث بتكرار أكثر.**

19g. الإجابة النموذجية: كلاهما له معظم نقاط البيانات في المجموع المتوسط.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدم مهارات التفكير العليا

20. **الفرضيات** تجربة لها ثلاث نتائج متساوية الاحتمال *A* و *B* و *C*. هل يمكن استخدام القرص الدوار الموضح في نموذج محاكاة للتنبؤ باحتمال حدوث النتيجة *C*؟ اشرح استنتاجك. **انظر ملحق إجابات الوحدة 5.**



21. **الاستنتاج** هل يمكن استخدام رمي قطعة النقد أحيانًا أو دائمًا أو مطلقًا في محاكاة تجربة لها نتيجتان محتملتان؟ اشرح إجابتك. **انظر ملحق إجابات الوحدة 5.**

22. **اتخاذ القرار** تتكون لعبة الكرنفالات من اختيار 5 أرقام فائزة من 31 رقمًا محتملاً (0-30). ومن يوصل 5 أرقام، بأي ترتيب، يفوز بمليون تذكرة. **انظر ملحق إجابات الوحدة 5. a–b.**

a. إذا كانت تذكرة اللعبة تتكلف دولارًا واحدًا، فهل ستلعب؟ اشرح استنتاجك بحساب قيمة الدفع المتوقعة، التي هي قيمة التوقع مطروح منها تكلفة التذكرة.

b. هل سيتغير قرارك في اللعب إذا زاد المكسب ليصبح 5 ملايين تذكرة؟ وماذا لو كان المكسب 0.5 مليون تذكرة، لكنك اخترت من بين 21 رقمًا بدلاً من 31؟ اشرح إجابتك.

23. **الاستنتاج** عند تصميم نموذج محاكاة فيه تُلقى الأسهم على أهداف معينة، ما الافتراضات التي يجب اتخاذها ولماذا يجب اتخاذها؟ **انظر ملحق إجابات الوحدة 5.**

24. **مسألة غير محددة** الإجابة سف التجربة التي لا تكون قيمة التوقع فيها نتيجة محتملة. اشرح إجابتك. **انظر ملحق إجابات الوحدة 5.**

25. **الكتابة في الرياضيات** كيف تختلف قيمة التوقع عن الاحتمالات؟ **انظر ملحق إجابات الوحدة 5.**

www.almanahj.com

إجابات إضافية

13. $E(Y) = 38.1$

الإجابة النموذجية:

النتيجة	التكرار
أحمر	0
أزرق	29
أبيض	21
الإجمالي	50

متوسط القيمة = 35.5؛ إن قيمة التوقع أكبر من متوسط القيمة.

14. $E(Y) = 45.3$

الإجابة النموذجية:

النتيجة	التكرار
أحمر	5
أزرق	16
أبيض	29
الإجمالي	50

متوسط القيمة = 47؛ إن متوسط القيمة أكبر من قيمة التوقع.

15b. الإجابة النموذجية: استخدم مولد أعداد عشوائي للحصول على الأعداد الصحيحة من 1 إلى 20 حيث إن 1-7 تمثل 0 من النقاط و 8-19 تمثل نقطة واحدة و 20 يمثل 3 نقاط. أجر 50 محاولة وسجل النتائج في جدول التكرار.

النتيجة	التكرار
0	16
1	32
3	2

متوسط القيمة = 0.76

16a. AED −0.25

16b. الإجابة النموذجية: استخدم مولد

4 التقويم

حصاد الأمس اطلب من الطلاب كتابة كيف ساعدهم ما تعلموه بشأن الاحتمال الهندسي في تصميم نماذج المحاكاة وحساب قيمة التوقع.

المتابعة

استكشف الطلاب نماذج المحاكاة.

اسأل:

- ما الذي ينبغي عليك مراعاته عند استخدام نتائج نموذج المحاكاة للتوصل إلى توقع؟ الإجابة النموذجية: تصميم نموذج المحاكاة، وعدد المحاولات المستخدمة، وما إذا كانت الاحتمالات التجريبية والنظرية قريبة بشكل منطقي أم لا

26. **الاحتمالات** ترمي غولة ثلاث عملات في آن واحد وتكرر هذه العملية 9 مرات. تظهر النواتج بالأسفل حيث تمثل H وجه الكتابة بينما تمثل T وجه الصورة. بناءً على بيانات غولة، ما احتمال هبوط مجموعة واحدة على الأقل من 3 عملات بحيث يكون الكتابة هو الأعلى؟ D

H H H	T T T
H H T	H T T
T T H	T T H
T H T	H T H
H H H	H H T

A 0.1 B 0.2 C 0.3 D 0.9

27. **الجبر** يجمع إبراهيم الكتب المستعملة. ولديه 20 كتابًا في مجموعته، بينما يضيف 3 كتب كل شهر. كم عدد الشهور التي يملك خلالها 44 كتابًا في مجموعته؟ H

F 5 G 6 H 8 J 15

28. **إجابة قصيرة** صمّم أحمد نموذج محاكاة ليحدد عدد المرات التي يدحرج فيها اللاعب النرد ويظهر عليه رقم أكبر من 4 في لعبة اللوحة بعد خمس مرات دحرجة. الجدول أدناه يظهر نواتجه بعد 50 محاولة. ما احتمال دحرجة اللاعب رقم أكبر من 4 مرتين أو أكثر بعد 5 مرات دحرجة؟

عدد الدحرجات أكبر من 4	التكرار
0	8
1	15
2	18
3	9
4	0
5	0

$\frac{27}{50}$

29. **SAT/ACT** إذا كان وعاء يحتوي على 150 حبة فول سوداني و 60 حبة من الكاجو، فما احتمال اختيار حبة كاجو من الوعاء عند الاختيار العشوائي مرةً واحدة؟ B

A 0.25 C 0.33 E 0.71

B 0.29 D 0.4

www.almanahj.com

مراجعة شاملة

تم اختيار النقطة X بشكل عشوائي على $\overline{QT}$. أوجد احتمال وقوع كل حدث. (الدرس 3-5)

30. $\overline{QS}$ على $P(X)$ 0.64 أو $\frac{9}{14}$ أو 64%

31. $\overline{RT}$ على $P(X)$ 0.57 أو $\frac{4}{7}$ أو 57%

32. **الكتب** تختار إيمان بين 10 كتب في المكتبة. ما مدى احتمال اختيارها 3 كتب معينة لفحصها من بين الكتب العشرة المبدئية؟ $\frac{1}{120}$ (الدرس 2-5)

أوجد مساحة كل شكل. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

33.

50.3 ft²

34.

21.2 سم²

35.

1017.9 in²

مراجعة المهارات

36. **الترفيه** شملت مجموعة مكونة من 150 طالبًا عما يرغبون في تحقيقه أثناء وقت فراغهم.

a. كم عدد الطلاب الذين يفضلون الذهاب إلى السينما أو الخروج للتسوق؟ 117

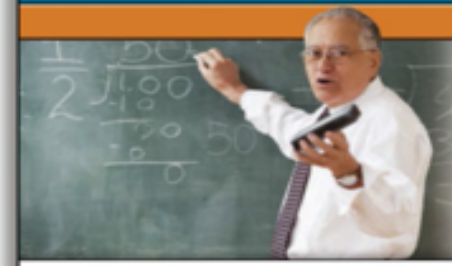
b. ما الأنشطة التي ذكرها 37 طالبًا؟ الرياضة أم التسوق

c. كم عدد الطلاب الذين لم يقولوا إنهم يفضلون السينما؟ 56

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

5-5 احتمالات الأحداث المستقلة وغير المستقلة

السابق:	الحالي:	لماذا؟:
• تعلمت من إيجاد احتمالات بسيطة	1 إيجاد احتمالات الأحداث المستقلة وغير المستقلة.	• يكتب 18 طالبًا في صف الأستاذة أسماء للكيمياء أسماءهم لاختيار الطالب الذي سيقدم عرضه التقديمي أولًا بأمل إسماعيل أن يتم اختياره أولًا. ويريد زميله أسامة أن يكون الثاني.
	2 إيجاد احتمالات الأحداث علمًا بوقوع أحداث أخرى.	



المفردات الجديدة

- حدث مركب
- compound event
- أحداث مستقلة
- independent events
- أحداث غير مستقلة
- dependent events
- احتمال مشروط
- conditional probability
- شجرة الاحتمال
- probability tree

ممارسات في الرياضيات

2 التفكير بطريقة تجريدية وكمية.

4 استخدام نماذج الرياضيات.

1 الأحداث المستقلة وغير المستقلة

يتكون **الحدث المركب** من حدثين بسيطين أو أكثر. في المثال المذكور أعلاه، يمثل اختيار إسماعيل وأسامة لتقديم عرضيهما التقديمي أولًا حدثًا مركبًا. فهو يتكون من حدث اختيار إسماعيل، وحدث اختيار أسامة.

ويمكن أن تكون الأحداث المركبة مستقلة أو غير مستقلة.

- الحدثان A و B **مستقلان** إذا كان احتمال وقوع الحدث A لا يؤثر على احتمال وقوع الحدث B.
- الحدثان A و B **غير مستقلين** إذا كان احتمال وقوع الحدث A يغير بطريقة ما احتمال وقوع الحدث B.

فكّر في اختيار بعض العناصر من مجموعة من العناصر. إذا أُعيد العنصر في كل مرة، فيمثل اختيار عناصر إضافية أحداثًا مستقلة. وإذا لم تعد العنصر في كل مرة، فيمثل اختيار عناصر إضافية أحداثًا غير مستقلة.

مثال 1 تحديد الأحداث المستقلة وغير المستقلة

حدد ما إذا كانت الأحداث مستقلة أو غير مستقلة. اشرح استنتاجك.

a. تم إلقاء قطعة نقد معدنية، ثم أُلقيت قطعة نقد معدنية أخرى.

لم تغير نتيجة إلقاء قطعة النقد المعدنية الأولى بأي شكل احتمال نتيجة إلقاء قطعة النقد المعدنية الثانية. لذلك فإن هذان الحدثان مستقلين.

b. في مثال العرض التقديمي في الصف الدراسي المذكور أعلاه، تم اختيار اسم طالب واحد ولم تتم إعادته، ثم جرى اختيار اسم طالب ثان.

بعد اختيار الطالب الأول، فقد تمت إزالة اسمه ولا يمكن إعادة اختياره. وهذا يؤثر على احتمال اختيار الطالب الثاني، حيث قل العضاء العيني بمقدار اسم واحد. لذا فإن هذان الحدثان غير مستقلين.

c. تُقدم الجائزة يومي الأربعاء والسبت. يحصل كل متسابق على عدد.

لا تؤثر الأعداد المختارة في السحب الأول على السحب الثاني. لذا فإن هذان الحدثان مستقلين.

تمرين موجّه 1A، 1B. انظر الهامش.

1A. سُحبت بطاقة من كومة بطاقات، ثم أُعيدت. وبعد ذلك، سُحبت بطاقة ثانية.

1B. اختارت ياسمين قميصًا من خزانتها لترتديه يوم الاثنين. ثم اختارت قميصًا مختلفًا لترتديه يوم الثلاثاء.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

www.almanahj.com

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 5-5 إيجاد الاحتمالات البسيطة.

الدرس 5-5 إيجاد احتمالات الأحداث المستقلة وغير المستقلة. إيجاد احتمالات الأحداث علمًا بوقوع أحداث أخرى.

بعد الدرس 5-5 إيجاد احتمالات الأحداث المتفصلة.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اسأل:

- ما العوامل التي تؤثر على احتمال أن يتم اختيار إسماعيل أولاً وأسامة ثانيًا؟ **الإجابة النموذجية: عدد الطلاب في الصف الدراسي**
- إذا تم اختيار إسماعيل أولًا، فما احتمال أن يتم اختيار أسامة ثانيًا؟ $\frac{1}{17}$
- كيف يؤثر اختيار طالب آخر أولاً على اختيار أسامة ثانيًا؟ **لأنه قد يتم اختيار أسامة أولاً.**

1 تحديد الأحداث المستقلة وغير المستقلة

المثال 1 يوضح كيفية تحديد إن كان الحدث مستقلاً أم لا. **المثال 2** يوضح كيفية حساب احتمال أن يكون حدثان مستقلان. **المثال 3** يوضح كيفية حساب احتمل أن يكون الحدثان غير مستقلين.

التقويم التكويني

استخدم التمرينات الموجهة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

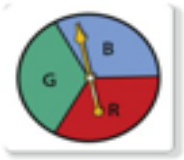
أمثلة إضافية

1 حدد ما إذا كانت الأحداث *مستقلة* أو *غير مستقلة*. اشرح استنتاجك.

a. تم إلقاء حجر نرد، ثم أُلقي حجر نرد آخر. كلا الحدثين مستقلين حيث إن إلقاء حجر النرد الأول لا يغير بأي طريقة احتمال حجر النرد الثاني.

b. سُحبت بطاقة من كومة بطاقات، ولم يتم إعادتها. وبعد ذلك، سُحبت بطاقة ثانية. كلا الحدثين غير مستقلين نظرًا لأنه تمت إزالة البطاقة الأولى ولا يمكن إعادة اختيارها ثانية. وهذا يؤثر على احتمال عملية السحب الثانية، حيث قلّ الفضاء العيني بمقدار بطاقة واحدة.

2 **تناول الطعام في الخارج**
خرجت هيام وهنا لتناول الغداء في الخارج. وقد وضعوا 5 قصاصات ورق خضراء و 6 قصاصات ورق زرقاء في حقيبة. فإذا سحبت إحداهما



افترض أنه تم إلقاء قطعة نقد معدنية وتدوير القرص الدوار المبين. الفضاء العيني لهذه التجربة هو

{(H, B), (H, R), (H, G), (T, B), (T, R), (T, G)}.

باستخدام الفضاء العيني، احتمال الحدث المركب لسقوط القطعة المعدنية على الصورة وتوقف القرص الدوار على اللون الأخضر هو $P(H, G) = \frac{1}{6}$.

لاحظ أنه يمكن إيجاد الاحتمال ذاته عن طريق ضرب احتمالات كل حدث بسيط.

$$P(H) = \frac{1}{2} \qquad P(G) = \frac{1}{3} \qquad P(H, G) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

يوضح هذا المثال القاعدة الأولى من قاعدتي ضرب الاحتمالات.

المفهوم الأساسي احتمال وقوع حدثين مستقلين

الشرح: احتمال وقوع كلا الحدثين المستقلين هو ناتج ضرب احتمالات كل حدث بمفرده.

الرموز: إذا كان الحدثان A و B مستقلين، إذًا $P(A \text{ and } B) = P(A) \times P(B)$.

قراءة في الرياضيات
و حرف العطف **و** هو عنصر رئيسي في المعادلة يشير إلى ضرب الاحتمالات.

ويمكن توسيع نطاق هذه القاعدة على أي عدد من الأحداث.

مثال 2 من الحياة اليومية احتمال وقوع الأحداث المستقلة

المواصلات تخطط أماني وصديقاتها للذهاب إلى حفلة. وقد وضعن القساسات الورقية المبينة في كيس. إذا سحبت إحدى الفتيات قساسة صفراء، تستقل الفتاة السيارة إلى الحفلة. أما إذا سحبت قساسة زرقاء، فهذا يعني أنها ستستقل السيارة.

لنفترض أن أماني سحبت قساسة. غير أن النتيجة لم تعجبها، فأعادتها وسحبت قساسة أخرى. ما احتمال أن تحصل على قساسة زرقاء في كل مرة تسحب قساسة؟

هذه الأحداث مستقلة، حيث أعادت أماني القساسة التي أزالتها.

افترض أن B تمثل قساسة زرقاء و Y قساسة صفراء.

السحب 1 السحب 2

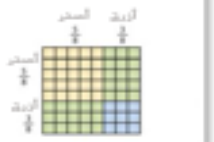
احتمال وقوع الأحداث المستقلة

$$P(B \text{ and } B) = P(B) \times P(B)$$

$$= \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} \quad \frac{9}{64} \qquad P(B) = \frac{3}{8}$$

إذًا، احتمال أن تسحب أماني قساستين زرقاوين هو $\frac{9}{64}$ أو حوالي 14%.

نصيحة دراسية
استخدام نموذج مساحي
يمكنك استخدام نموذج مساحي لتمثيل الحدثين معًا في حساب الاحتمال. فمثلًا لكنا القساستين زرقاوين. تمثل المنطقة الزرقاء احتمال سحب قساستين زرقاوين على التوالي. تمثل مساحة هذه المنطقة $\frac{9}{64}$ من إجمالي مساحة النموذج.



تمرين موجّه

2A. $\frac{1}{12}$ أو حوالي 8% **2B.** $\frac{1}{16} = 6.25\%$

أوجد الاحتمالات في كل مما يلي.

2A. تم إلقاء قطعة نقد معدنية وحجر نرد. ما احتمال ظهور الصورة على القطعة و ظهور العدد 6 على حجر النرد؟

2B. افترض أنك ألقيت قطعة نقد معدنية أربع مرات. ما احتمال أن تظهر الكتابة على القطعة في كل مرة؟

www.almanahj.com

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تتناول قاعدة ضرب الاحتمالات الثانية احتمال وقوع حدثين غير مستقلين.

المفهوم الأساسي احتمال وقوع حدثين غير مستقلين

الشرح احتمال وقوع كلا الحدثين غير المستقلين هو ناتج ضرب احتمال وقوع الحدث الأول في احتمال وقوع الحدث الثاني بشرط وقوع الحدث الأول بالفعل.

الرموز إذا كان الحدثان A و B غير مستقلين، إذًا

$$P(A \text{ and } B) = P(A) \times P(A|B)$$

ويمكن توسيع نطاق هذه القاعدة على أي عدد من الأحداث.

يقرأ الرمز $P(B|A)$ كالتالي: احتمال وقوع الحدث B علمًا بأن الحدث A قد وقع بالفعل ويسمى **الاحتمال المشروط**.

مثال 3 احتمال وقوع الأحداث غير المستقلة

المواصلات انظر المثال 2. افترض أن أيوب سحب قصاصة ورقية ولم يعدها. وبعد ذلك سحب زميله مازن قصاصة أخرى. ما احتمال أن يسحب كلاهما قصاصة صفراء؟

هذه الأحداث غير مستقلة، حيث لم يعد أيوب القصاصة التي أزالها.

احتمال وقوع الأحداث غير المستقلة

$$P(Y \text{ و } Y) = P(Y) \times P(Y|Y)$$

بعد اختيار قصاصة صفراء أولى، لا يزال هناك إجمالي 7 قصاصات، 4 منها صفراء.

$$= \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$$

إذًا، احتمال أن يسحب كلاهما قصاصة صفراء هو $\frac{5}{14}$ أو حوالي 36%.

التحقق يمكنك استخدام مخطط شجري للاحتمالات، يسمى **شجرة الاحتمال**، للتحقق من هذه النتيجة. احسب احتمال كل حدث بسيط في المرحلة الأولى، وكل احتمال مشروط في المرحلة الثانية. ومن ثم اضرب كل فرع لإيجاد احتمال كل نتيجة.

يجب أن يكون مجموع الاحتمالات 1.

$$\frac{20}{56} + \frac{15}{56} + \frac{15}{56} + \frac{6}{56} = \frac{56}{56} = 1 \checkmark$$

تمرين موجه $\frac{11}{850}$ أو حوالي 1%

3. تم اختيار ثلاث بطاقات من مجموعة أوراق لعب تضم 52 بطاقة.
ما احتمال أن تكون جميع البطاقات الثلاث ماسة في حال
عدم إعادة البطاقة الأولى أو الثانية؟

مثال إضافي

تناول الطعام في الخارج راجع المثال الإضافي 2. افترض أن هيام سحبت قصاصة ورقية ولم تعدها. وبعد ذلك، سحبت صديقتها قصاصة. ما احتمال أن تسحب كلا الصديقتين قصاصة خضراء؟

التركيز على محتوى الرياضيات

أحداث غير مستقلة يعتبر ترتيب وقوع الأحداث في الحدث غير المستقل مهمًا. فعلى سبيل المثال، لا يكون احتمال سحب ورقة لعب 3 من مجموعة بطاقات إذا تم سحب سباتي بالفعل هو نفس احتمال سحب سباتي إذا كان قد تم سحب ورقة 3 بالفعل. وبالرموز، يتم التعبير عن ذلك في الصورة $P(A|B) \neq P(B|A)$.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

اللوحة البيضاء التفاعلية

اختر طالبين للعمل على مثال أمام الصف. اطلب من طالب واحد شرح كيفية إيجاد احتمال الأحداث غير المستقلة، واطلب من طالب آخر توضيح كيفية إيجاد احتمال الأحداث المستقلة.

انتبه!

الترميز المشروط يجب عدم تفسير الرمز "|" في الترميز $P(B|A)$ على أنه رمز قسمة.

الربط بالحياة اليومية

توصلت دراسة حديثة إلى أن مع وجود 3 ركاب مراهقين أو أكثر في السيارة، فإن 85% من الحوادث الخاطئة للسائقين يقودها مراهقون حيث من خطأ من السائق. ومن بينها 50% تجربة السيارة الزائدة و 70% تجربة السيارة الخاطئة سيارة واحدة.

المصدر: مجلس السلامة الوطني

www.almanahj.com

McGraw-Hill Education هي مؤسسة لصالح مقرها ® تحفظ الحقوق وتأليف

التحقق من فهمك

مثال 1

حدد ما إذا كانت الأحداث مستقلة أو غير مستقلة. اشرح.

1. عضو بدر لاختبار SAT يوم السبت وحصل على 1,350 درجة. وفي الأسبوع التالي، خضع لاختبار ACT وحصل على 23 درجة. **انظر الهامش.**

2. تأهل فريق آمنة لكرة السلة للصعود ضمن الفرق الأربعة النهائية. إذا فازوا فسيلعبون في مباراة البطولة النهائية. **انظر الهامش.**

مثال 2

3. **البطاقات** تم اختيار بطاقة عشوائيًا من مجموعة أوراق اللعب التي تضم 52 بطاقة. وقد تمت إعادتها، واختيار بطاقة ثانية. ما احتمال اختيار كلتا البطاقتين الظاهرتين على اليسار؟ $\frac{1}{2704} = 3.7 \times 10^{-4}$

مثال 3

4. **المواصلات** يستقل سعيد الحافلة بعد العمل.

قيمة تذكرة الحافلة إلى منزله هي 0.50 AED. إذا كان معه 3 أرباع و 5 فلسات وسيلتان فئة 10 فلوس في جيبه، فأوجد احتمال أن يسحب ربعين على التوالي عشوائيًا. افترض أن احتمالات وقوع الأحداث متساوية. $\frac{1}{15} = 0.07$

مثال 4

5. **إجابة شبكية** كل يوم سبت، يلعب 10 أصدقاء الكرة الخادعة في منتزه محلي. لاختيار الفرق، يقومون بسحب بطاقات معدودة بأعداد صحيحة متعاقبة من 1 إلى 10 عشوائيًا. يضم اللاعبون الذين يسحبون الأعداد الفردية إلى الفريق A والذين يسحبون الأعداد الزوجية إلى الفريق B. ما احتمال أن يسحب لاعب في الفريق B العدد 10؟ $\frac{1}{5} = 0.20$

التمرين وحل المسائل

الأمثلة 1-3

الاستنتاج حدد ما إذا كانت الأحداث مستقلة أو غير مستقلة. ثم أوجد الاحتمال.

6. في لعبة، تُدحرج حجر النرد على عدد زوجي، ثم لف القرص الدوار العدد من 1 إلى 5 يتحصل على عدد فردي. **مستقل؛** $\frac{3}{10} = 30\%$

7. يتم سحب آس، دون إعادته، من مجموعة من أوراق اللعب التي تضم 52 بطاقة. وبعد ذلك، تُسحب بطاقة ثانية. **غير مستقل؛** $\frac{1}{221} = 5.0\%$

8. في كيس يحتوي على 3 كرات زجاجية خضراء و 4 كرات زجاجية زرقاء، تُسحب كرة زجاجية زرقاء ولا تتم إعادتها. وبعد ذلك، تُسحب كرة زجاجية زرقاء ثانية. **غير مستقل؛** $\frac{2}{7}$ **أو حوالي 29%**

9. تلقي حجري نرد وتحصل على 5 في كل مرة. **مستقل؛** $\frac{1}{36}$ **أو حوالي 3%**

10. **الألعاب** في لعبة ما، يُدار قرص دوار على اليسار وتُلقى قطعة نقد معدنية. ما احتمال الحصول على عدد زوجي على القرص الدوار وظهور الكتابة على قطعة النقد؟ $\frac{1}{4} = 25\%$

11. **الهدايا** يتبادل صف بثبة الهدايا. ستُسحب بثبة هدية أولاً، وبعدها زميلتها بدرية. إذا كان عدد المشتركات 18 طالبة، فما احتمال أن تسحب كل من بدرية وبثبة اسم إحداهما الأخرى؟ $\frac{1}{306}$ **أو حوالي 3.0%**

12. **العطلة** توصل استطلاع رأي عن العمل إلى أن 8 بين كل 10 موظفين ذهبوا في عطلة الصيف الماضي. إذا تم اختيار أسماء 3 موظفين عشوائيًا مع إعادتها، فما احتمال أن يكون الموظفون الثلاثة جميعهم قد ذهبوا في عطلة الصيف الماضي؟ **انظر الهامش.**

13. **الحملات** يعرض الجدول عدد كل لون من شارات حملة اتحاد الطلبة التي يتعين على جاسم توزيعها. إذا كان توزيع الشارات يتم عشوائيًا، فما احتمال أن تكون الشارتان الأولى والثانية اللتان يتم توزيعهما حمراوين؟ $\frac{20}{161}$ **أو حوالي 12%**

لون الشارات	القيمة
أزرق	20
أبيض	15
أحمر	25
أسود	10

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 5 للتحقق من الاستيعاب.

ثم استخدم المخطط الموجود في الجزء السفلي من هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

إجابات إضافية

1. إن نتيجة دخول بدر لاختبار SAT لا يغير بأي طريقة احتمال نتيجته في اختبار ACT. وبالتالي، فهذان الحدثان مستقلان.
2. لن يذهب فريق آمنة لمباراة البطولة إلا إذا فازوا بمباراتهم الدور قبل النهائي. وبالتالي، فهذان الحدثان غير مستقلين.
12. $\frac{512}{1000}$ أو حوالي 51%

تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج يستوعب الطلاب المتفوقون في الرياضيات الكميات وعلاقاتها في المواقف المذكورة في المسائل. ويستخدمون القدرة على الفصل عن السياق – لتجريد موقف معين وتمثيله رمزيًا. في التمارين من 6 إلى 9، شجع الطلاب على تحديد إن كانت الأحداث مستقلة أم غير مستقلة، ثم تطبيق قواعد الضرب للاحتمال.

www.almanahj.com

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إجابة إضافية

27. لتكون الأحداث مستقلة، يجب أن يتحقق أمران: 1) فرصة أن يقوم أحد الأشخاص بالتدخين هي نفسها فرصة أن يقوم أحد الأشخاص بالتدخين شريطة أن يكون أحد الوالدين مدخنًا، و 2) فرصة أن يكون أحد والدي الشخص مدخنًا هي نفسها فرصة أن يكون أحد والدي الشخص مدخنًا شريطة أن يكون هذا الشخص مدخنًا.

مثال 4

14. تم اختيار كرة زجاجية حمراء عشوائيًا من كيس يحتوي على كرتين زجاجيتين زرقاوتين و 9 كرات زجاجية حمراء. ولم يتم إعادتها. ما احتمال أن تكون الكرة الزجاجية الثانية التي يتم اختيارها حمراء؟ $\frac{4}{5} = 80\%$

15. تم إلقاء دحرجة حجر نرد. إذا كان العدد الظاهر أكبر من 2، فأوجد احتمال أن يكون 6. $\frac{1}{4} = 25\%$

16. يبلغ محيط رياضي أضلاع 12 وجميع أطوال الأضلاع أعدادًا صحيحة فردية. ما احتمال أن يكون رباعي الأضلاع مُعيّنًا؟ $\frac{1}{5} = 20\%$

17. تم تدوير قرص دوار معدد من 1 إلى 12. أوجد احتمال أن يتوقف القرص على العدد 11، مع العلم أن العدد الظاهر عدد فردي. $\frac{1}{6} = 17\%$

B 18. **الصفوف الدراسية** احتمال أن يدرس الطالب مادتي الهندسة واللغة الفرنسية في مدرسة الشوف هو 0.064. واحتمال أن يدرس الطالب اللغة الفرنسية هو 0.45. ما احتمال أن يدرس الطالب مادة الهندسة إذا درس اللغة الفرنسية؟ 0.14

19. **التقنية** في مدرسة الدجاج الثانوية، يمتلك 43% من الطلاب مشغل أقراص مدمجة و 28% يمتلكون مشغل أقراص مدمجة ومشغل MP3. ما احتمال أن يمتلك أحد الطلاب مشغل MP3 إذا كان يمتلك مشغل أقراص مدمجة أيضًا؟ 0.65

20. **البرهان** استخدم قانون احتمال وقوع حدثين غير مستقلين A|P و B لاستخلاص قانون الاحتمال المشروط لوقوع P(B|A).

انظر ملحق إجابات الوحدة 5.

C 21. **النص** يحدث الخطأ المزدوج في النص عندما يفشل لاعب الإرسال في توجيه إرساله دون أن يدوس على خط الإرسال في محاولتين. تبلغ النسبة المئوية لنجاح إرسال حصة الأول 40%، بينما نسبة نجاح الإرسال الثاني 70%.

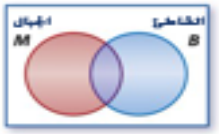
a. ارسم شجرة احتمال تبين كل نتيجة. **انظر ملحق إجابات الوحدة 5.**

b. ما احتمال أن ترتكب حصة خطأً مزدوجًا؟ **0.18 أو 18%**

c. صمّم نموذج محاكاة باستخدام برنامج مولد أعداد عشوائي يمكن استخدامه لتقدير احتمال ارتكاب حصة لأخطاء مزدوجة في إرسالها الثاني.

21c. **الإجابة النموذجية:** سوف استخدم مولد أعداد عشوائي للحصول على أعداد صحيحة من 1 إلى 50. وتمثل الأعداد الصحيحة 1-9 خطأً مزدوجًا، بينما تمثل الأعداد الصحيحة 10-50 النتائج المحتملة الأخرى. وسوف تشتمل المحاكاة على 50 محاولة.

22. **العطلة** أجرى استطلاع رأي عشوائي لتحديد أين تقضي العائلات عطلاتها. أشارت النتائج إلى أن $P(B) = 0.6$، $P(B \cap M) = 0.2$، وأن احتمال عدم قضاء العائلة عطلتها في أي من الوجهتين هي 0.1.



a. ما احتمال أن تقضي العائلة عطلتها وسط الجبال؟ 0.3

b. ما احتمال أن تقوم العائلة التي تزور الشاطئ بزيارة الجبال أيضًا؟ 0.33

23. **صناعة القرار** تحاول التوصل إلى قرار بشأن ما إذا كنت ستتوسع في عملك التجاري. إذا لم تتوسع وظلت الأحوال الاقتصادية جيدة، فتتوقع أن يبلغ العائد 2 مليون AED. أما إذا كانت الأحوال الاقتصادية سيئة، فتتوقع أن يكون العائد 0.5 مليون AED. تكلفة التوسع هي مليون AED. ولكن العائد المتوقع بعد عملية التوسع هو 4 مليون AED في الأحوال الاقتصادية الجيدة و مليون AED في الأحوال الاقتصادية السيئة. في حين تشير توقعاتك إلى أن احتمالات الأحوال الاقتصادية الجيدة والسيئة هي 30% و 70% على التوالي. استخدم شجرة الاحتمال لشرح ما يجب عليك فعله. **انظر ملحق إجابات الوحدة 5.**

مسائل مهارات التفكير العليا

24. **الفرضيات** يوجد n عناصر مختلفة في حقيبة. احتمال سحب العنصر A، ثم العنصر B دون إعادة أي منهما هو حوالي 4.2%. فما قيمة n؟ اشرح. **انظر ملحق إجابات الوحدة 5.**

25. **الاستنتاج** إذا كان $P(B|A) - P(B)$ و $P(A|B) - P(A)$، فماذا يمكن أن يقال عن العلاقة بين الحدثين A و B؟ **الحدثان A و B مستقلان.**

26. **مسألة غير محددة الإجابة** صف حدثين مستقلين وحدثين غير مستقلين. اشرح استنتاجك. **انظر ملحق إجابات الوحدة 5.**

27. **الكتابة في الرياضيات** يشير تقرير طبي إلى احتمال أن يصبح الشخص مدخنًا إذا كان والده يدخن. اشرح كيف يمكنك تحديد احتمال أن يكون تدخين الشخص وتدخين والده حدثين مستقلين. **انظر الهامش.**

www.almanahj.com

McGraw-Hill Education مملوكة لصالح مؤسسة © وتأليف

تمرين على الاختبار المعياري

28. **الاحتمال** تُكلف حليمة بصورة عشوائية بحضور 1 من 6 صفوف تربية رياضية على مدار اليوم وتحصل على 1 من 3 أوقات غداء. ما احتمال أن تكون في صف التربية الرياضية الثاني وتحصل على الغداء الأول؟ A

A $\frac{1}{18}$ B $\frac{1}{9}$ C $\frac{1}{6}$ D $\frac{1}{2}$

29. **الجبر** قام جاسم بتنزيل مخطوطي فيديو و 7 أناشيد دينية على مشغل الوسائط الحديثة مقابل AED 10.91. بينما قام جمال بتنزيل 3 مقاطع فيديو و 4 أناشيد دينية مقابل AED 9.93. فما تكلفة كل مقطع فيديو؟ J

F AED 0.99 H AED 1.42

G AED 1.21 J AED 1.99

30. **إجابة شبكية** يحتوي كيس من حبوب الجيلي على 7 حبوب حمراء و 11 حبة صفراء و 13 حبة خضراء. يختار حارب حبتي جيلي من الكيس دون أن ينظر. ما الاحتمال في صورة نسبة مئوية مقربة إلى أقرب جزء من عشرة أن يختار حارب حبة خضراء ثم حبة حمراء؟ 9.8

31. **SAT/ACT** إذا كان احتمال سقوط الأمطار يوم الثلاثاء هو $\frac{4}{13}$، إذًا ما احتمال ألا تسقط الأمطار؟ B

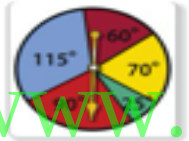
A $\frac{4}{9}$ C $\frac{13}{9}$ E $\frac{13}{4}$

B $\frac{9}{13}$ D $\frac{13}{5}$

مراجعة شاملة

32. **الكرة اللينة** لم تسجل حميدة أهدافًا في 10% من ضرباتها في الموسم الأخير. صمم نموذج محاكاة لتقدير احتمال ألا تسجل أهدافًا في ضرباتها القادمة في هذا الموسم. (الدرس 4-5) **انظر الهامش**

استخدم القرص الدوار في إيجاد الاحتمالات في كل مما يلي. وقم بتدوير القرص مرة أخرى إذا توقف على خط. (الدرس 3-5)



33. P(يتوقف المؤشر على اللون الأحمر) 0.25

34. P(يتوقف المؤشر على اللون الأزرق) 0.32

35. P(يتوقف المؤشر على اللون الأخضر) 0.07

36. P(يتوقف المؤشر على اللون الأصفر) 0.19

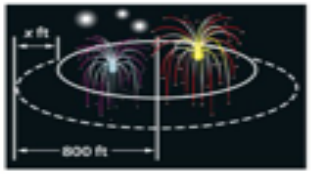
حدد ما إذا كان كل زوجين من المجسمات متشابهين أو ليس أيًا منهما. إذا كانت المجسمات متشابهة، فاذكر معامل المقياس.

37.

38. ليس أيًا منهما

متطابقة

39. **الألعاب النارية** أُطلقت الألعاب الطارية من مركب في وسط النهر. وهناك دائرة انفجار مستخدم بداخلها كل الألعاب النارية. ويجلس المتفرجون خارج دائرة أمان تبلغ 800 قدم من مركز عرض الألعاب النارية.



a. أوجد محيط دائرة الأمان التقريبي. 5026.5 ft

b. إذا كانت دائرة الأمان على بُعد 200 إلى 300 قدم من مركز دائرة الانفجار، فأوجد مدى قيم نصف قطر دائرة الانفجار. 500– 600 ft

c. أوجد أصغر محيط لدائرة الانفجار وأكبر محيط لها مقربًا إلى أقرب قدم. 3770 ft ؛3142 ft

مراجعة المهارات

أوجد عدد النتائج المحتملة لكل موقف.

40. تختار حورية من بين 5 نكهات آيس كريم مختلفة و 3 إضافات مختلفة. 15

41. يختار حسن من بين 6 ألوان وتصميمين للبدلات من أجل دراجته الجبلية الجديدة. 12

42. للمستطيل محيط يبلغ 12 وأطوال أضلاعه أعداد صحيحة. 3

43. ذُحرجة ثلاثة مكعبات أعداد في آن واحد. 216

تدريس الممارسات في الرياضيات

الفرضيات يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات فهم واستخدام الفرضيات والتعريفات في إنشاء الفرضيات. كما يُمكنهم تحليل المواقف بتقسيمها إلى حالات، ويمكنهم التعرف على الأمثلة المضادة واستخدامها. في التمرين 24، شجع الطلاب على تمثيل هذا التمرين باستخدام البلي الموجود في الحقيبة.

4 التقويم

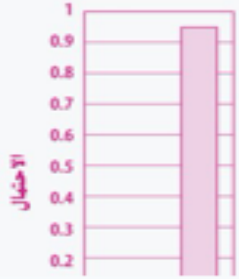
بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب

اطلب من الطلاب الكتابة على قطعة من الورق الفرق بين الأحداث المستقلة وغير المستقلة.

إجابة إضافية

32. الإجابة النموذجية: استخدم قرصًا دوارًا مقسمًا إلى مقطعين أحدهما يغطي 10% أو 36° والآخر 90% أو 324°. أجر 20 محاولة وسجل النتائج في جدول التكرار.

النتيجة	التكرار
تحقيق ضربة	1
أخرى	19
الإجمالي	20



www.almanahj.com

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

1 أحداث منفصلة

المثال 1 يوضح كيفية تحديد إن كان الحدث متنافيًا أم غير متناف. **المثال 2** يوضح كيفية حساب احتمال أن يكون الحدثان منفصلين. **المثال 3** يوضح كيفية حساب احتمال أن يكون الحدثان غير منفصلين.

التقويم التكويني

استخدم التمرينات الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

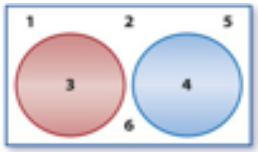
أمثلة إضافية

1 البطاقات سحب عمر بطاقة من مجموعة قياسية من البطاقات. حدد ما إذا كانت الأحداث منفصلة أو غير منفصلة. اشرح استنتاجك.

a. بطاقة عدد 1 أو 9 منفصلة، لا يوجد نتائج مشتركة. فلا يمكن أن تكون البطاقة بقيمة 1 و 9.

b. بطاقة ملك أو اسباتي غير منفصلة؛ بطاقة الملك الاسباتي تعتبر نتيجة مشتركة بين الحدثين.

2 العملات المعدنية أدخل علي يده في علبة تحتوي على 30 عملة بقيمة 25 فلسًا و 25 عملة بقيمة 10 فلس و 40 عملة بقيمة 5 فلسات و 15 فلسًا. فما احتمال أن تكون أول عملة يلتقطها هي عملة بقيمة 25 فلسًا أو فلس؟ $\frac{9}{21}$ أو حوالي 43%



عند إلقاء حجر نرد، ما احتمال ظهور العدد 3 أو 4 من مخطط فن. يمكنك رؤية أن هناك نتيجتين تحققان هذه الحالة، 3 و 4. إذًا،

$P(3 \text{ أو } 4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

لاحظ أنه يمكن إيجاد الاحتمال نفسه عن طريق جمع احتمالات كل حدث بسيط.

$P(3) = \frac{1}{6}$ $P(4) = \frac{1}{6}$ $P(3 \text{ أو } 4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

يوضح هذا المثال القاعدة الأولى من قاعدتي جمع الاحتمالات.

المفهوم الأساسي احتمال وقوع الأحداث المنفصلة

الشرح إذا كان الحدثان A و B منفصلين، فإن احتمال وقوع A أو B هو مجموع احتمالات كل حدث بمفرده.

مثال إذا كان الحدثان A و B منفصلين، فإن $P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B)$

قراءة في الرياضيات
أو مجرد المطعد أو هو متصر رقمي يفيد بوقوع حدث واحد على الأقل. A أو B تقرأ كالتالي: احتمال وقوع الحدث A أو وقوع الحدث B.

ويمكن توسيع نطاق هذه القاعدة على أي عدد من الأحداث.

مثال 2 من الحياة اليومية الأحداث المنفصلة

الموسيقى أعد حميد قائمة تشغيل تضم مجموعة أغاني من ثلاثة ألبومات مختلفة لمطربه المفضل. إذا جعل مُشَغِّل الوسائط العددية يختار الأغاني من هذه القائمة عشوائيًا، فما احتمال أن تكون الأغنية الأولى التي يتم تشغيلها من الألبوم 1 أو الألبوم 2؟

قائمة تشغيل حميد	
الألبوم	عدد الأغاني
1	10
2	12
3	13

هذه أحداث منفصلة، حيث لا يمكن أن تكون الأغاني المختارة من الألبومين 1 و 2 معًا.

افترض أن الحدث $A1$ يمثل اختيار أغنية من الألبوم 1.
افترض أن الحدث $A2$ يمثل اختيار أغنية من الألبوم 2.
يوجد إجمالي 10 + 12 + 13 أو 35 أغنية.

احتمال وقوع الأحداث المنفصلة $P(A1 \text{ أو } A2) = P(A1) + P(A2)$

$= \frac{10}{35} + \frac{12}{35}$ $P(A1) = \frac{10}{35}$ و $P(A2) = \frac{12}{35}$

$= \frac{22}{35}$ اجمع

إذًا، احتمال أن تكون الأغنية الأولى التي يتم تشغيلها من الألبوم 1 أو الألبوم 2 هو $\frac{22}{35}$ أو حوالي 63%.

تمرين موجه

2A. عند إلقاء حجري نرد، فما احتمال الحصول على عددين متطابقين أو عددين مجموعهما 9؟ $\frac{5}{18}$ أو حوالي 28%

2B. ألعاب الكرنفال إذا ربحت لعبة رمي الحلقات في الكرنفال، فإنك تفوز بدمية محشوة. إذا تم اختيار الدمية المحشوة عشوائيًا من بين 15 مهرًا و 16 هرة صغيرة و 14 ضفدعة و 25 تمساحًا و 10 وحيد القرن، فما احتمال أن يحصل الرابح على مهر أو هرة صغيرة أو وحيد القرن؟

الربط بتاريخ الرياضيات

ليونهارت أويلر (1707-1783)
أتم أويلر نظرية الرسم البياني عام 1736 في بحث بعنوان "جسور كونيغسبرغ الصبعة". وهو عبارة عن مسألة رياضيات محلولة ومشهورة مستوحاة من مكان ومواقف حقيقي. علاوة على ذلك، يمثل قانون أويلر المرتبط بعدد حواف متعدد الوجوه المحدب وعدد الرؤوس والأوجه أساس نظرية التمثيل البياني. راجع "التوسع 6-13".

2B. $\frac{41}{80}$ أو حوالي 51%

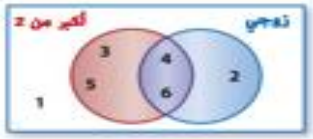
www.almanahj.com

مثال إضافي

3 **الفنون** استخدم الجدول الموجود في المثال 3. ما احتمال أن تختار نيرة لوحة مائية أو منظرًا طبيعيًا؟ $\frac{1}{3}$ أو حوالي 33%

عند إلقاء حجر نرد، فما احتمال الحصول على عدد أكبر من 2 أو عدد زوجي؟ من مخطط فن، يمكنك رؤية أن هناك 5 أعداد إما أكبر من 2 أو عدد زوجي، 2، 3، 4، 5، 6. إذًا،

$P(\text{أكبر من 2 أو عدد زوجي}) = \frac{5}{6}$.



بما أنه من الممكن ظهور عدد أكبر من 2 وعدد زوجي، فهذه الأحداث غير منفصلة. وفكر في احتمالات كل حدث بمفرده.

$P(\text{أكبر من 2}) = \frac{4}{6}$ $P(\text{عدد زوجي}) = \frac{3}{6}$

إذا تم جمع هذه الاحتمالات، فسيتم حساب احتمال النتيجتين، 4 و 6، مرتين—مرة لكونهما عددين أكبر من 2 ومرة أخرى لكونهما عددين زوجيين. يتعين عليك طرح احتمال هذه النتائج المشتركة.

$P(\text{أكبر من 2 أو عدد زوجي}) = P(\text{أكبر من 2}) + P(\text{عدد زوجي}) - P(\text{أكبر من 2 وعدد زوجي})$

$= \frac{4}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6}$ أو $\frac{5}{6}$

وهذا يقودنا إلى قاعدة جمع الاحتمالات التالية.

المفهوم الأساسي احتمال وقوع الأحداث غير المنفصلة

الشرح إذا كان الحدثان A و B غير منفصلين، فإن احتمال وقوع A أو B هو ناتج جمع احتمالات كل منهما ناقص احتمال وقوع كل من A و B معًا.

الرموز إذا كان الحدثان A و B غير منفصلين، فإن $P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B)$.

www.almanahj.com

مثال من الحياة اليومية الأحداث غير المنفصلين

الفن يوضح الجدول عدد ونوع اللوحات التي رسمها خالد. إذا اختار لوحة عشوائيًا لتقديمها في مسابقة للرسم، فما احتمال أن يختار لوحة لشخص أو لوحة زيتية؟

	لوحات خالد		
	إعلانية	طبيعة صامتة	لوحة أشخاص	منظر طبيعي
ألوان مائية	4	5	3
زيتية	1	3	2
أكريليك	3	2	1
باستيل	1	0	5

بما أن بعض لوحات خالد تتضمن كلاً من لوحات لأشخاص ولوحات زيتية، فهذه الأحداث غير منفصلة. استخدم القاعدة لحدثين غير منفصلين. إجمالي عدد اللوحات التي سيختار من بينها هو 30 لوحة.

$P(\text{زيتية أو لوحة لأشخاص}) = P(\text{زيتية}) + P(\text{لوحة لأشخاص}) - P(\text{زيتية ولوحة لأشخاص})$

$= \frac{1+3+2}{30} + \frac{5+3+2+0}{30} - \frac{3}{30}$ التعويض

$= \frac{6}{30} + \frac{10}{30} - \frac{3}{30}$ أو $\frac{13}{30}$ تبسيط الأبسط صورة

احتمال أن يختار خالد لوحة لأشخاص أو لوحة زيتية هو $\frac{13}{30}$ أو حوالي 43%.

الربط بالحياة اليومية

العروض الحية المنظمة للتعليم هي عروض تطلب فيها من الرسامين إرسال لوحاتهم الحية وتقرر لجنة من المنظم أي لوحة سيتم عرضها. وقد ظهرت هذه العروض في أوائل الثمانينات لعرض أعمال الرسامين المحليين وتثقيف الجمهور.

المصدر Humanities Web

تمرين موجّه

3. ما احتمال سحب بطاقة الملك أو دين من مجموعة أوراق اللعب التي تضم 52 بطاقة؟

$\frac{4}{13}$ أو حوالي 31%

Mcgraw-Hill Education يسمح بإعادة إنتاج هذا المحتوى لأغراض التعليم والتدريب فقط

التحقق من فهمك

مثال 1 **حدد ما إذا كانت الأحداث *منفصلة* أو *غير منفصلة*. اشرح استنتاجك.**

1. سحب بطاقة من مجموعة أوراق اللعب والحصول على ولد أو سباتي
غير منفصلة؛ بطاقة ولد سباتي هي بطاقة ولد وسباتي معًا.
2. رعاية قطة أو حصان **منفصلة؛ لا يمكن أن تكون القطة حصانًا والحصان لا يمكن أن يكون قطة.**

مثال 2 3. **الوظائف** سمية هي موظفة الشهر التالية. وجائزتها هي الاختيار عشوائيًا من بين 4 بطاقات هدايا و 6 أقداح قهوة و 7 أسطوانات DVD و 10 أسطوانات مضغوطة و 3 سلال هدايا. ما احتمال أن يحصل الموظف على بطاقة هدايا أو قدح قهوة أو أسطوانة مضغوطة؟ **انظر الهامش.**

مثال 3 4. **النوادي** وفقًا للجدول، ما احتمال أن يكون الطالب في النادي في السنة قبل الأخيرة أو في فريق المناظرة؟ $\frac{11}{25}$ **أو حوالي 44%**

النادي	السنة الأولى	السنة قبل الأخيرة	السنة الأخيرة
التطوعي	12	14	8
الرئيسي	2	6	3
الرياضيات	7	4	5
الدرامية	11	15	13

مثال 4 **حدد احتمال وقوع كل حدث.**

5. إذا كانت فرصة إسقاط الكرات في لعبة البولينج هي 2 من 10، فما احتمال أن تفوت الضربة؟ **احتمال تفويت الضربة هو $\frac{8}{10}$ أو 80%.**
6. إذا كانت فرصة الإقامة في مهجع بعينه هي 75%، فما احتمال الإقامة في مهجع آخر؟
احتمال الإقامة في مهجع آخر هو $\frac{1}{4}$ أو 25%.

مثال 5 7. **حفل التخرج** في صف خالد للسنة الأخيرة الذي يضم 100 طالب، صوت 91 طالبًا على تصرح الدفعة. إذا تم اختيار طالبين عشوائيًا من الصف بأكمله، فما احتمال عدم حضور واحد على الأقل منهم حفل التخرج؟ **17.3%**

www.almanahj.com

التمرين وحل المسائل

الأمثلة 1-3 **حدد ما إذا كانت الأحداث *منفصلة* أو *غير منفصلة*. ومن ثم، أوجد الاحتمال. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة في المئة، إذا لزم الأمر.**

8. سحب بطاقة من مجموعة أوراق اللعب والحصول على ولد أو ستة **منفصلة؛ $\frac{2}{13}$ = 4.15%**
9. إلقاء حجري نرد والحصول على عددين متطابقين أو ما مجموعه 8 **غير منفصلة؛ $\frac{10}{36}$ = 8.27%**
10. اختيار عدد عشوائيًا من مجموعة أعداد صحيحة من 1 إلى 20 والحصول على عدد زوجي أو عدد قابل للقسمة على 3
غير منفصلة؛ $\frac{13}{20}$ = 65%
11. إلقاء قطعة نقد معدنية والحصول على صورة أو كتابة **منفصلة؛ 100%**
12. سحب بطاقة آس أو قلب من مجموعة أوراق اللعب التي تضم 52 بطاقة **غير منفصلة؛ $\frac{4}{13}$ = 8.30%**
13. إلقاء حجري نرد والحصول على ما مجموعه 6 أو 10 **منفصلة؛ $\frac{2}{9}$ أو حوالي 2.22%**

مجمع جريس لاند الرياضي			
العمر	كرة القدم	كرة الفيسبول	كرة السلة
14	28	36	42
15	30	26	33
16	35	41	29

14. **الرياضيات** يحتوي الجدول على كل البرامج المتاحة في المجمع الرياضي وعدد المشاركين الذين تتراوح أعمارهم بين 14-16. ما احتمال أن يكون سن اللاعب 14 عامًا أو يلعب كرة السلة؟ **56%**
15. **التمثيل** حان وقت عودة طالبة تبادل إلى إيطاليا، ويرغب زملاؤها في الصف في تقديم هدية وداع لها. وقد أجرت البعثة استطلاعًا للرأي في الصف المكون من 32 طالبة ووجدت أن 10 طالبات اخترن بطاقة و 12 طالبة اخترن قميصًا و 6 اخترن فيديو و 4 اخترن سوارًا. إذا اختارت البعثة الهدية عشوائيًا، فما احتمال حصول طالبة التبادل على بطاقة أو سوار؟ **$\frac{7}{16}$ أو حوالي 8.43%**

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 7 للتحقق من الاستيعاب.

ثم استخدم المخطط الموجود في الجزء السفلي من هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

إجابة إضافية

3. $\frac{2}{3}$ أو حوالي 67%

تدريس الممارسات في الرياضيات

التمثيل بالنماذج يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات تطبيق الرياضيات التي تعلموها في حل المسائل التي تظهر في حياتهم اليومية. في التمرين 14، ينبغي أن يحدد الطلاب أولاً ما إن كانت الأحداث منفصلة أم غير منفصلة.

McGraw-Hill Education is a trademark of McGraw-Hill Education. All rights reserved.

تدريس الممارسات في الرياضيات

النقد يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات التمييز بين المنطق السليم والاستنتاج الخاطئ. في التمرين 28، كلاهما غير صحيح. جمعت فاطمة عدد البلي بشكل غير صحيح. أوجد ماجد احتمال أن يتم اختيار أي لون بخلاف الأحمر.

مثال 4

حدد احتمال وقوع كل حدث.

16. إلقاء حجري نرد وعدم الحصول على 3 $\frac{25}{36}$ أو حوالي 4.69%

17. سحب بطاقة من مجموعة أوراق لعب وعدم الحصول على بطاقة ماسة $\frac{3}{4}$ أو حوالي 75%

18. إلقاء قطعة نقد معدنية وعدم سقوطها على الصورة $\frac{1}{2}$ أو حوالي 50%

19. تدوير قرص دوار مقسم من 1 إلى 8 وعدم توقفه على العدد 5 $\frac{7}{8}$ أو 5.87%

20. **ألعاب الألغاز** اشترى خلف 20 لعبة ألغاز. إذا بيعت 500 لعبة ألغاز إجمالاً، فما احتمال ألا يفوز خلف بسيارة لعبة؟ $\frac{24}{25}$ أو حوالي 96%

21. **الوظائف** من بين الموظفين الشباب الذين تتراوح أعمارهم بين 18 و 25 عامًا يتقاضى 71% أجرهم بالساعة. إذا تم اختيار اثنين عشوائيًا من مجموعة تضم 100 موظف شاب، فما احتمال أن يتقاضى واحد بالتحديد أجره بالساعة؟ 42%

مثال 5

22. **إعادة التدوير** افترض أن 31% من الأمريكيين يعيدون تدوير المواد. إذا تم اختيار خمسين عشوائيًا من مجموعة تضم 50 أمريكيًا، فما احتمال أن واحدًا منهم على الأكثر يعيد تدوير المواد؟ حوالي 4.90%

B **البطاقات** **افترض أنك سحبت بطاقة من مجموعة أوراق اللعب التي تضم 52 بطاقة. أوجد احتمال وقوع كل حدث.**

23. البطاقة هي العدد 4. $\frac{1}{13} = 7.7\%$

24. البطاقة حمراء اللون. $\frac{1}{2} = 50\%$

25. البطاقة هي بطاقة عليها صورة. $\frac{3}{13} = 23.1\%$

26. البطاقة ليست بطاقة عليها صورة. $\frac{10}{13} = 76.9\%$

27. **الموسيقى** أجرت إحدى المدارس استطلاعًا للرأي على 265 طالبًا لمعرفة أنواع الموسيقى التي يرغبون سماعها في حفل المدرسة الراقص. تظهر النتائج في مخطط فن. أوجد الاحتمالات في كل مما يلي.

a. P(الكانتري أو آر أند بي) 71.3%

b. P(الروك والكانتري أو آر أند بي والروك) 11.3%

c. P(آر أند بي ولكن ليس الروك) 36.2%

d. P(كل الأنواع الثلاثة) 3.8%

مسائل مهارات التفكير العليا

28. **التفكير النقدي** تريد حفصة وسها تحديد احتمال اختيار كرة زجاجية حمراء من كيس يحتوي على 4 كرات زجاجية حمراء و 7 زرقاء وكرتين زجاجيتين أرجوانيتين. هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

حفصة	سها
$P(R) = \frac{4}{17}$	$P(R) = 1 - \frac{4}{18}$

لا شيء منهما. الإجابة النموذجية: احتمال اختيار كرة زجاجية حمراء هو $\frac{14}{18} = 1 - \frac{4}{18}$.

29. **تحدٍ** إذا ألقيت 3 أحجار نرد، فما احتمال أن تكون نتيجة حجري نرد على الأقل أقل من أو يساوي 14؟ اشرح استنتاجك. **انظر ملحق إجابات الوحدة 5.**

الاستنتاج **حدد ما إذا كانت الأحداث التالية منفصلة. اشرح. 34-30. انظر الهامش.**

30. اختيار رياضي أضلاع في شكل مربع وآخر في شكل مستطيل

31. اختيار مثلث في شكل متساوي أضلاع وآخر في شكل متساوي الزوايا

32. اختيار عدد مركب واختيار عدد طبيعي

33. **مسألة غير محددة الإجابة** صف حدثين منفصلين وحدثين غير منفصلين.

34. **الكتابة في الرياضيات** اشرح لماذا لا يكون مجموع احتمالات حدثين منفصلين 1 دائمًا.

www.almanahj.com

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تمرين على الاختبار المعياري

35. الاحتمال يمكن أن يفوز الزبائن في صالون جديد بجوائز في يوم الافتتاح. يعرض الجدول نوع الجوائز وعددها. ما احتمال أن تفوز الزبونة الأولى بجلسة عناية باليدين أو تدليك؟ **D**

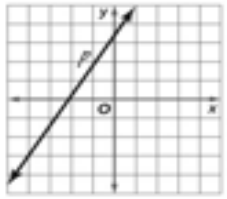
الجائزة	العدد
عناية باليدين	10
عناية بالقدمين	6
تدليك	3
تأميل الوجه	1

A 0.075
B 0.35
C 0.5
D 0.65

36. إجابة قصيرة يظهر مكعب معدد من 1 إلى 6.

إذا تم إلقاء المكعب مرة، فما احتمال أن يظهر عدد أقل من 3 أو عدد فردي على الوجه العلوي للمكعب؟ $\frac{2}{3}$

37. الجبر ماذا سيحدث لميل الخط ℓ إذا تم تغييره بحيث يبقى المقطع من المحور الرأسي y كما هو ويقترب المقطع من المحور الأفقي x من نقطة الأصل؟ **J**



F سيصبح الميل سالبًا.
G سيصبح الميل صفرًا.
H سيظل الميل.
H سيزيد الميل.

38. SAT/ACT احتمال اختيار حلوى النعناع من كيس حلوى هو 0.25 واحتمال اختيار شوكولاتة هو 0.3. يحتوي الكيس على 60 قطعة حلوى، مع العلم أن أنواع الحلوى الوحيدة الموجودة في الكيس هي النعناع والشوكولاتة والسكر البني مع الزبدة. كم عدد حلوى السكر البني مع الزبدة في الكيس؟ **B**

A 15
B 27
C 30
D 33
E 45

مراجعة شاملة

حدد ما إذا كانت الأحداث مستقلة أو غير مستقلة. ومن ثم، أوجد الاحتمال. (الدرس 5-5)

39. تُسحب بطاقة ملك دون إعادتها من مجموعة أوراق اللعب التي تضم 52 بطاقة. وبعد ذلك، تُسحب بطاقة ملك ثانية. **غير مستقل؛** $\frac{1}{221} = 5.0\%$

40. تلقي نردًا وتحصل على العدد 2. وتلقي نردًا آخر وتحصل على العدد 3. **مستقل؛** $\frac{1}{36}$ **أو حوالي 3%**

41. الرياضة توصل استطلاع للرأي في مدرسة ثانوية أن 15% من الرياضيين بالمدرسة يلعبون الكرة الطائرة فقط، و 20% يلعبون كرة القدم الأمريكية فقط، و 30% يلعبون كرة السلة فقط، و 35% يلعبون كرة القدم فقط. صمم نموذج المحاكاة الذي يمكن استخدامه لتقدير احتمال ممارسة الرياضي كل واحدة من تلك الرياضات. (الدرس 4-5) **انظر ملحق إجابات الوحدة 5.**

انسخ الشكل والنقطة P. بعد ذلك، استخدم مسطرة لرسم الصورة في الشكل تحت تمدد مع المركز P ومعامل المقياس r الموضح. 42-44. انظر ملحق إجابات الوحدة 5.

42. $r = \frac{1}{2}$

43. $r = 3$

44. $r = \frac{1}{5}$

4 التقويم

تعيين مصطلح الرياضيات اطلب من الطلاب الكتابة على ورقة الفرق بين الأحداث المنفصلة وغير المنفصلة وقانون الاحتمال لكل منها.

إجابات إضافية

30. غير منفصلة؛ الإجابة النموذجية: حيث إن كل مربع عبارة عن مستطيل، بينما لا يكون كل مستطيل بالضرورة مربعًا، إذًا يمكن أن يكون رباعي الأضلاع المربع مستطيلاً، ولكن لا يمكن أن يكون رباعي الأضلاع المستطيل مربعًا.

31. غير منفصلة؛ الإجابة النموذجية: إذا كان المثلث متساوي الأضلاع، يكون كذلك متساوي الزوايا. ولا يمكن أن يكون الاثنان منفصلين.

32. غير منفصلة؛ الإجابة النموذجية: العدد الطبيعي هو عدد مركب أيضًا.

33. الإجابة النموذجية: إذا سحبت بطاقة من مجموعة، يمكن أن تكون بطاقة عدد 3 أو 5. والحدثان متنافيان. إذا سحبت بطاقة من مجموعة، يمكن أن تكون بطاقة عدد 3 وحمراء. والحدثان غير منفصلين.

34. الإجابة النموذجية: عندما يكون الحدثان منفصلين، يعني ذلك أنه لا يمكن وقوعهما معًا. ولا يعني ذلك أنه يجب أن يقع أحد الحدثين. ويجب أن يساوي مجموع جميع النتائج المحتملة في الفضاء العيني 1. فعلى سبيل المثال، إذا كان الحدث A والحدث B منفصلين،

www.almanahj.com

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

www.almanahj.com

www.almanahj.com