

المنقذ في الرياضيات للصف الثاني عشر

ثالثا: الدوال الجذرية

- إذا كانت رتبة الجذر فردية فإن مجال الجذر R
- إذا كانت رتبة الجذر زوجية فهناك حالتان

(1) إذا كان الجذر في البسط فإن المجال يكون ≥ 0 ما بداخل الجذر

$$g(x) = \sqrt{2x + 4}$$

(2) إذا كان الجذر في المقام فإن المجال > 0 ما بداخل الجذر

$$h(x) = \frac{5x}{\sqrt{3-x}}$$

ثانيا: الدوال النسبية

المجال {أصفار المقام} $R/\{ \}$

$$f(x) = \frac{3x - 1}{x^2 - 25}$$

$$R/\{5, -5\}$$

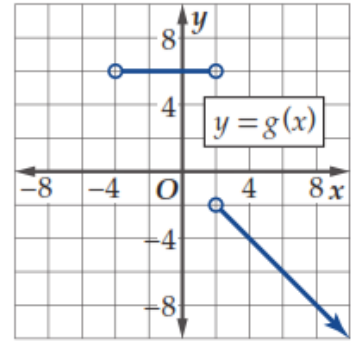
ملحوظة: عند التحليل إذا كانت الأصفار غير حقيقية فإن المجال R

أولا: الدوال كثيرة الحدود

مجالها R

$$f(x) = 3x^2 + 4x - 1$$

رابعا: المجال من على الرسم من على المحور x



خامسا: المدى من على الرسم البياني

من على المحور y كما ورد في المثال السابق لحساب المجال بيانيا

ايجاد المقطع السيني أو المقطع x جبريا

نضع $x = 0$ في المعادلة ثم نقوم بحل المعادلة

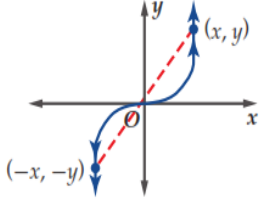
ايجاد المقطع الصادي أو المقطع y جبريا

نضع $x = 0$ في المعادلة ونكون النقطة هي $(0, f(0))$

المقطع

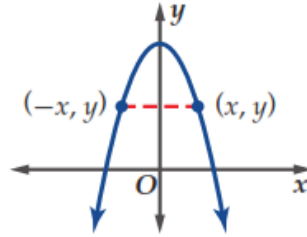
حول نقطة الأصل

جبريا بالتعويض عن كل x ب $-x$
و بالتعويض عن كل y ب $-y$
نحصل على نفس المعادلة الأصلية



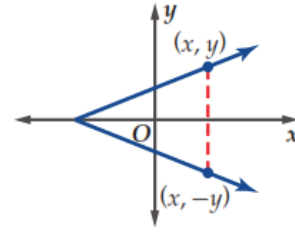
حول المحور y

جبريا بالتعويض عن كل x ب $-x$
نحصل على نفس المعادلة الأصلية



حول المحور x

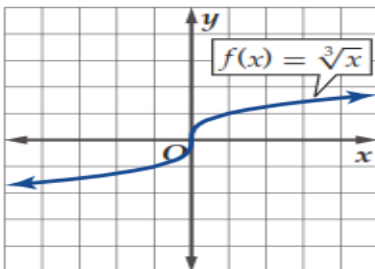
جبريا بالتعويض عن كل y ب $-y$
نحصل على نفس المعادلة الأصلية



التمائل

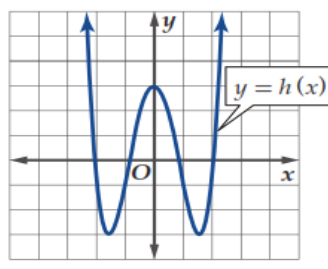
الدوال الفردية

تكون الدالة زوجية إذا كانت متماثلة حول نقطة الأصل



الدوال الزوجية

تكون الدالة زوجية إذا كانت متماثلة حول المحور y



خطوات الاختبار

- عوض كل x ب $-x$
- إذا كان الاس زوجي تسحب على الإشارة
- إذا كان الاس فردى نظل السالب وتضرب بالمعامل
- إذا لم تتغير أى إشارة تكون زوجية
- إذا تغيرت جميع الإشارات تكون فردية

الدوال الزوجية والفردية

النهايات

كيفية عمل الجدول

إذا كان عند عدد موجب

1.99	1.999	2	2.001	2.01

إذا كان عند عدد سالب

	-2.001	-2	-1.999	-1.99

عند الصفر

	-0.001	0	0.001	0.01

تكون النهاية غير موجودة إذا كان

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

تكون النهاية موجودة إذا كان

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

الاتصال

تكون الدالة متصلة عند a إذا كان

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

الفجوة : أصفار المقام المشتركة مع البسط

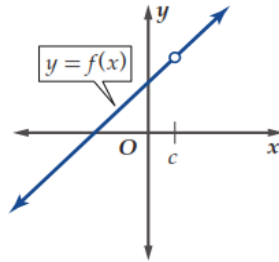
$$f(x) = \frac{x-5}{x^2-25} = \frac{(x-5)}{(x-5)(x+5)}$$

عند $x = 5$ يوجد فجوة

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq f(a)$$

إعادة تعريف الدالة حتى تكون متصلة

$$f(x) = \begin{cases} \text{الدالة الاصلية} & x \neq a \\ \text{قيمة النهاية} & x = a \end{cases}$$



الانفصال (عدم الاتصال)

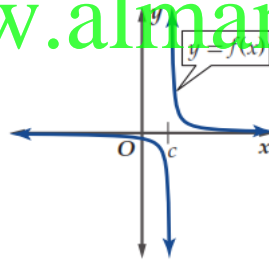
الانفصال اللانهائي : أصفار المقام الغير مشتركة مع البسط

$$f(x) = \frac{x-5}{x^2-25} = \frac{(x-5)}{(x-5)(x+5)}$$

عند $x = -5$ يوجد انفصال لانهائي

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$

لا يمكن إعادة تعريفها لتكون متصلة



الفجوة : تظهر في الدوال المتفرعة إذا كان

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

$$f(x) \begin{cases} 2x+1 & x \geq 2 \\ x^2-2 & x < 2 \end{cases}$$

- عوض $x = 2$ في كلا الطرفين إذا حصلت على إجابتان مختلفتان يوجد فجوة. وإذا كانت نفس الإجابة لا يوجد فجوة.
- تقوم بعمل جدول مع ملاحظة التعويض بشكل صحيح في كل طرف

$$x^2 - 2$$

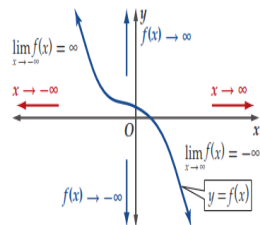
$$2x + 1$$

1.99	1.999	2	2.001	2.01

السلوك الطرفي للدوال النسبية

- إذا كان درجة البسط أقل من درجة المقام يكون السلوك الطرفي للطرفين عند $y = 0$
- إذا كان درجة البسط تساوي درجة المقام يكون السلوك الطرفي كالتالي

$$y = \frac{\text{معامل أكبر أس}}{\text{معامل أكبر أس}}$$



ما هي قيمة y عندما تذهب x إلى ∞ أو $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \text{الطرف الايسر} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \text{الطرف الايمن}$$

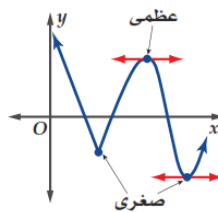
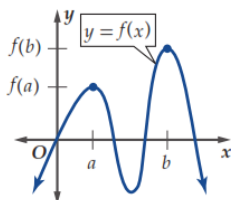
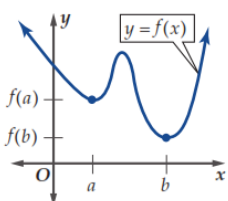
الجدول التالي للتحقق

-1000	-100	-10	0	10	100	1000

السلوك الطرفي

القيم العظمى (محلية ومطلقة)

القيم الصغرى (محلية ومطلقة)



جبريا من المعادلات

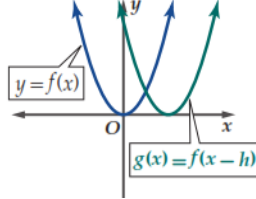
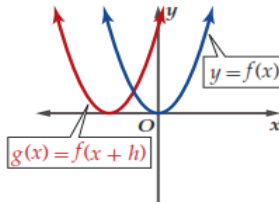
عوض x_1 و x_2 في المعادلة ليجاد $f(x_1)$ و $f(x_2)$

$$\text{متوسط التغير} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

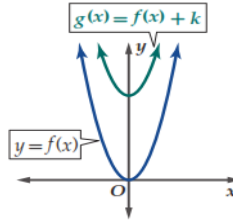
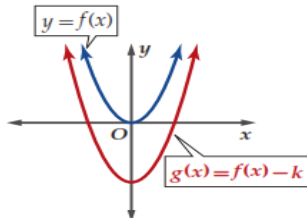
بيانيا

- تحدد النقاط x_1 و x_2 من على الرسم
- توجد قيمة $f(x_1)$ و $f(x_2)$
- تعوض في القانون السابق

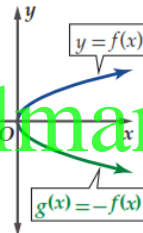
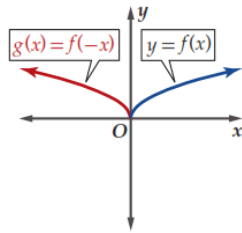
تحويلات الدوال (X تخالف - y توافق)

الازاحة (يمين ويسار) مرتبطة ب x

- $F(x + 2)$ ازاحة يسار وحدتين
- $f(x - 3)$ ازاحة يمين 3 وحدات

الانتقال (أعلى - أسفل) غير مرتبطة ب x

- $F(x) + 2$ ازاحة أعلى وحدتين
- $f(x) - 3$ ازاحة أسفل 3 وحدات



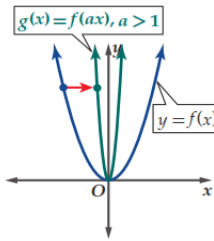
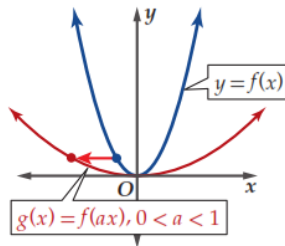
الانعكاس

• حول المحور x اذا كان السالب بعيد عن x

$$g(x) = -f(x)$$

• حول المحور y اذا كان السالب مع x

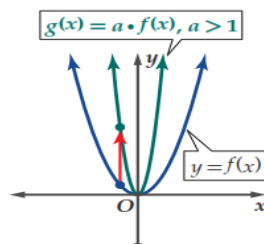
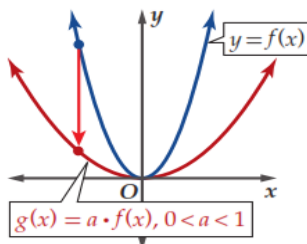
$$g(x) = f(-x)$$

التمدد والانكماش الأفقي (مرتبط ب x)• اذا كان مطلق معامل x أكبر من 1 يحدث انكماش أفقي

$$g(x) = f(2x)$$

• اذا كان مطلق معامل x أقل من 1 يحدث تمدد أفقي

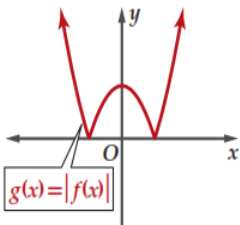
$$g(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$$

التمدد والانكماش الرأسى (مرتبط ب $f(x)$)• اذا كان مطلق معامل $f(x)$ أكبر من 1 يحدث تمدد رأسى

$$g(x) = 2f(x)$$

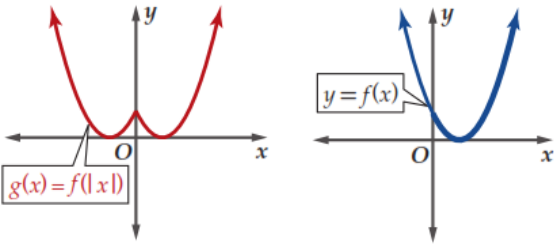
• اذا كان مطلق معامل $f(x)$ أقل من 1 يحدث انكماش رأسى

$$g(x) = \frac{1}{2}f(x)$$

 $|f(x)|$

• نقوم بعمل انعكاس لكل اجزاء الرسم

التي تقع أسفل المحور x حول المحور x



$f(|x|)$

- نقوم بعمل انعكاس لكل اجزاء الرسم التي تقع الى اليمين من المحور y حول المحور y

- عند تركيب الدالة $gof(x)$ نقوم بوضع الدالة $f(x)$ بدلا من كل x في الدالة $g(x)$

$$f(x) = x^2 + 3, \quad g(x) = 3x - 1$$

$$gof(x) = 3(x^2 + 3) - 1$$

وتكمل عملية التبسيط

- عند تركيب الدالة $fog(x)$ نقوم بوضع الدالة $g(x)$ بدلا من كل x في الدالة $f(x)$

$$f(x) = x^2 + 3, \quad g(x) = 3x - 1$$

$$fog(x) = (3x - 1)^2 + 3$$

وتكمل عملية التبسيط

- مجال التركيب $fog(x)$

$$f(x) = \frac{6}{2x+1}, \quad g(x) = \frac{4}{4-x}$$

(1) نقوم بإيجاد موانع الدالة $f(x)$

$$x \neq \frac{-1}{2}$$

(2) نقوم بوضع الموانع $g(x)$

$$\frac{4}{4-x} = \frac{-1}{2} \rightarrow -4 + x = 8 \rightarrow x = 12$$

(3) نقوم بإيجاد موانع الدالة $g(x)$

$$x \neq 4$$

يكون مجال التركيب هو $R / \left\{ \frac{-1}{2}, 4 \right\}$

- عند تركيب الدالة $fog(2)$

$$f(x) = x^2 + 3, \quad g(x) = 3x - 1$$

(1) نقوم بإيجاد قيمة $g(2)$

$$g(2) = 3(2) - 1 = 5$$

(2) نقوم بإيجاد قيمة $f(5)$

$$f(5) = (5)^2 + 3 = 28$$

يكون الدالتين $f(x), g(x)$ متعاكستين اذا كان

$$fog(x) = x, \quad gof(x) = x$$

يكون الدالتين $f(x), g(x)$ متعاكستين اذا كان

$$fog(x) = x, \quad gof(x) = x$$

تركيب الدوال

الدوال العكسية

$$f(x) = -3\sqrt{x-1} + 2$$

$$x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$$

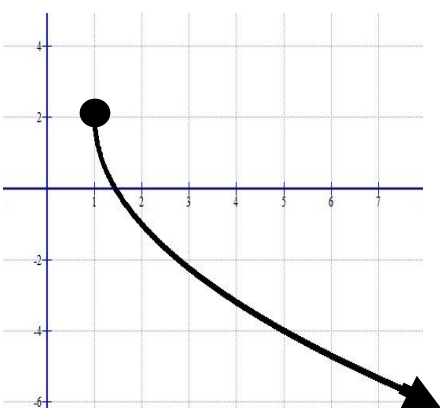
المجال $[1, \infty)$

ثم تكمل الجدول بالحاسبة

وتمثل الجدول بيانيا

ثم توجد المدى من على الرسم

المدى $(-\infty, 2]$



المجال (ما تحت الجذر فقط اكبر من او يساوى الصفر)

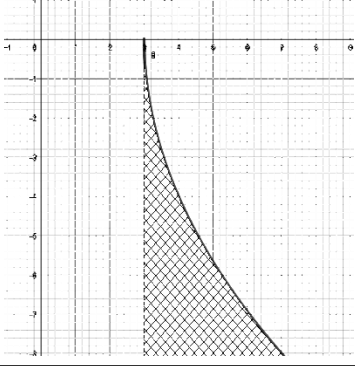
المدى: يفضل من على الرسم

طريقة رسم المعادلات

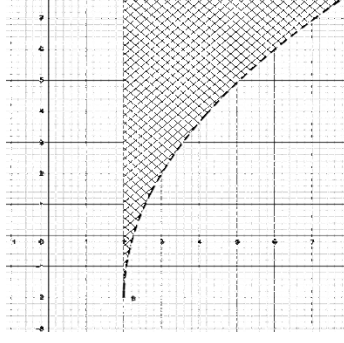
- (1) Mode 7
- (2) نكتب المعادلة ثم =
- (3) Start من المجال
- (4) End رقم اخر ضمن المجال
- (5) Step دائما 1
- (6) انسخ الجدول ثم مثل الرسم

معادلات الجذر التربيعي

$$y \leq -4\sqrt{x+3}$$



$$y > 4\sqrt{x-2} - 2$$



المجال (ما تحت الجذر فقط اكبر من او يساوى الصفر)

طريقة رسم المتباينات

- نفس طريقة رسم المعادلات مع ملاحظة التالي
- (1) إذا كانت $f(x) \leq$ او $f(x) \geq$ تكون البداية ● ويكون الخط متصل
- (2) إذا كانت $f(x) <$ او $f(x) >$ تكون البداية ○ ويكون الخط منقطع
- (3) نقوم بتظليل الجزء الاعلى من الرسم اذا كانت $f(x) \geq$ والجزء الادنى من الرسم اذا كانت $f(x) \leq$

الجذور النونية: اذا كانت رتبة الجذر زوجية والنتاج ذو أس فردى يجب وضع مطلق في الأجابة $\sqrt[4]{16x^8y^{20}} = 2x^2|y^5|$

مرافق الجذر: اذا كان الجذر فى المقام نقوم بالضرب فى مرافق الجذر للتخلص منه

$$\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \rightarrow \frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \times \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{3\sqrt{x}-3-x+\sqrt{x}}{x-1} = \frac{4\sqrt{x}-x-3}{x-1}$$

يجب التحقق من الحل وذلك بالتعويض فى المعادلة الأصلية

- إذا كان كلا الطرفين متساويين يكون الحل حقيقى
- إذا كان كلا الطرفين غير متساويين يكون الحل دخيل

فى المثال السابق

$$\sqrt{9+16} \stackrel{?}{=} 2 + \sqrt{9}$$

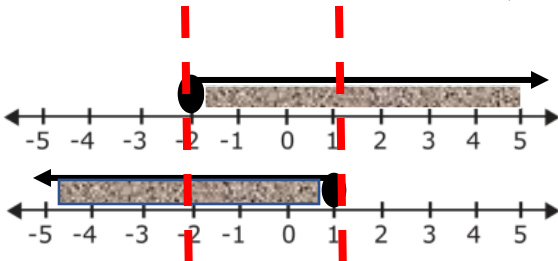
$$5 = 5$$

الحل حقيقى

اوجد حل كل مما يلى $\sqrt{x+16} = 2 + \sqrt{x}$

- عند حل معادلات الجذر التربيعي نقوم بتربيع كلا الطرفين
 - إذا ظهر جذر جديد بعد التربيع نجعله فى طرف وباقي المسألة فى الطرف الأخر ثم نقوم بالتربيع مرة أخرى
- $$\begin{aligned} (\sqrt{x+16})^2 &= (2 + \sqrt{x})^2 \\ x + 16 &= 4 + 4\sqrt{x} + x \\ x - x + 16 - 4 &= 4\sqrt{x} \\ 12 &= 4\sqrt{x} \\ \sqrt{x} &= 3 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

يجب ايجاد تقاطع الحل مع المجال لمعرفة مجموعة حل المتباينة



ويكون حل المتباينة هو

$$-2 \leq x \leq 1$$

اوجد حل كل متباينة $\sqrt{3x+6} + 2 \leq 5$

1. عند حل المتباينة نقوم بايجاد مجال الجذر التربيعي
2. نقوم بحل المتباينة بجعل الجذر التربيعي فى طرف لحالة . ثم تربيع الطرفين

$$\sqrt{3x+6} \leq 3$$

$$3x + 6 \leq 9$$

$$3x \leq 3$$

$$x \leq 1$$

المتطابقات والدوال المثلثية

متطابقات الزاويتين المتتامتين

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$$

متطابقات فيثاغورث

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

مقلوب الدوال

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

متطابقات الزاويتين المتكاملتين

$$\sin(\pm B) = \sin A \cos B \pm \sin B \cos A$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

متطابقات الدوال الزوجية والفردية

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$

متطابقات الزاويتين المتكاملتين

$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$$

$$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$$

متطابقات ضعف الزاوية

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta \cos\theta$$

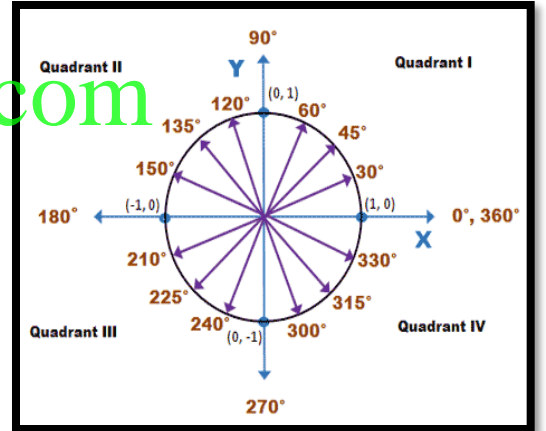
$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$$

عند الحل يجب التأكد من الربع الذي تقع فيه الزاوية (θ)



متطابقات نصف الزاوية

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}}, \quad \cos\frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}}, \quad \tan\frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}}$$

عند الحل يجب التأكد من الربع الذي تقع فيه نصف الزاوية ($\frac{\theta}{2}$)

1) $\cos\theta = 0$ at

$$\theta = 90, \theta = 270$$

2) $\cos\theta = 1$ at

$$\theta = 0, \theta = 360$$

3) $\sin\theta = -1$ at $\theta = 180$

1) $\sin\theta = 0$ at

$$\theta = 0, \theta = 180, \theta = 360$$

2) $\sin\theta = 1$ at $\theta = 90$

3) $\sin\theta = -1$ at $\theta = 270$