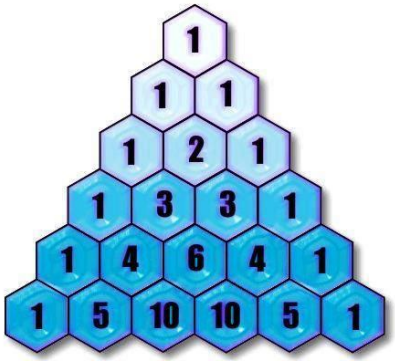
Math Warehouse



الفصل الدراسي الثالث

www.almanahj.com

العام الدراسي 2016 – 2017 م

الوحدة العاشرة

الاستقراء الرياضي + نظرية ذات الحدين

الصف الثاني عشر العام

الخطوات المتبعة لتطبيق مبدأ الأستقراء الرياضي

1) نبرهن ان العلاقة صحيحة عندما $n=1$

2) نفرض ان العلاقة صحيحة عندما $n=k$

3) نستخدم العلاقة في 2 لبرهنة أن عندما $n=k+1$ فان العلاقة الأصلية صحيحة

السؤال الأول استخدم الاستقراء الرياضي لبرهنة ان $1+2+3+4+.....+n=\frac{n(n+1)}{2}$

حيث n عدد صحيح موجب .

1) نبرهن ان العلاقة صحيحة عندما $n=1$

الطرف الأيسر = 1 و الطرف الأيمن = $\frac{1(1+1)}{2}=1$ اذن العلاقة صحيحة عندما $n=1$

www.almanahj.com

2) نفرض أن العلاقة صحيحة عندما $n=k$ أي $1+2+3+.....+k=\frac{k(k+1)}{2}$ صحيحة

3) بإضافة $k+1$ لطرفي العلاقة في 2 نحصل على

$$1+2+3+.....+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$1+2+3+.....+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2}$$

$$1+2+3+.....+k+(k+1)=\frac{k^2+k+2k+2}{2}$$

$$1+2+3+.....+k+(k+1)=\frac{k^2+3k+2}{2}$$

$$1+2+3+.....+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

اذن العلاقة صحيحة عندما $n=k+1$ و بالتالي العلاقه أعلاه صحيحة لجميع قيم n الصحيحة الموجبة

السؤال الثاني استخدم الاستقراء الرياضي لبرهنة ان $1^3+2^3+3^3+4^3+.....+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

حيث n عدد صحيح موجب .

1) نبرهن ان العلاقة صحيحة عندما $n=1$

الطرف الأيسر $1^3=1$ و الطرف الأيمن $\frac{1^2(1+1)^2}{4}=1$ اذن العلاقة صحيحة عندما $n=1$

2) نفرض أن العلاقة صحيحة عندما $n=k$ أي $1^3+2^3+3^3+.....+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}$ صحيحة

3) بإضافة $(k+1)^3$ لطرفي العلاقة في 2 نحصل على

$$1^3+2^3+3^3+.....+k^3+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3$$

$$1^3+2^3+3^3+.....+k^3+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+\frac{4(k+1)^3}{4}$$

www.almanahj.com

$$1^3+2^3+3^3+.....+k^3+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2[k^2+4k+4]}{4}$$

$$1^3+2^3+3^3+.....+k^3+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

اذن العلاقة صحيحة عندما $n=k+1$ و بالتالي العلاقه أعلاه صحيحة لجميع قيم n الصحيحة الموجبة

تمرين (1) استخدم الاستقراء الرياضي لبرهنة ان

$$3+7+11+.....+(4n-1)=2n^2+n$$

حيث n عدد صحيح موجب

تمرين (2) استخدم الاستقراء الرياضي لبرهنة ان

$$1^2+2^2+3^2+4^2+.....+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

حيث n عدد صحيح موجب

السؤال الثالث استخدم الاستقراء الرياضي لبرهنة ان 5^n-3^n يقبل القسمة على 2

حيث n عدد صحيح موجب .

1) نبرهن ان العلاقة صحيحة عندما $n=1$

$5^1-3^1=2$ يقبل القسمة على 2 اذن العلاقة صحيحة عندما $n=1$

2) نفرض أن العلاقة صحيحة عندما $n=k$ أي 5^k-3^k تقبل القسمة على 2 صحيحة

$$5^k-3^k=2r \quad \rightarrow \quad 5^k=2r+3^k$$

3) نبرهن ان العلاقة صحيحة عندما $n=k+1$ أي نبرهن أن $5^{k+1}-3^{k+1}$ تقبل القسمة على 2

$$5^{k+1}-3^{k+1}=5\times5^k-3\times3^k$$
$$=5(2r+3^k)-3\times3^k=10r+5\times3^k-3\times3^k$$
$$5^{k+1}-3^{k+1}=10r+2\times3^k=2(5r+3^k)$$

www.almanahj.com

اذن $5^{k+1}-3^{k+1}$ تقبل القسمة على 2

اذن العلاقة صحيحة لجميع قيم n الصحيحة الموجبة

تمرين (3) استخدم الاستقراء الرياضي لبرهنة ان 5^n-2^n يقبل القسمة على 3

حيث n عدد صحيح موجب .

تمرين (4) استخدم الاستقراء الرياضي لبرهنة ان $9^n - 1$ يقبل القسمة على 8

حيث n عدد صحيح موجب .

تمرين (5) استخدم الاستقراء الرياضي لبرهنة ان $1+4+7+.....+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}$

www.almanahj.com

حيث n عدد صحيح موجب .

تمرين (6) استخدم الاستقراء الرياضي لبرهنة ان $4^n \geq 4n$ لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n

تمرين (7) استخدم الاستقراء الرياضي لبرهنة ان $n \geq 12$, $n! > 5^n$ حيث n عدد صحيح موجب

www.almanahj.com

تمرين (8) برهن نظرية ديموافر باستخدام الاستقراء الرياضي

لاي عدد صحيح موجب n يكون $[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

تمرين (9) استخدم الأستقراء الرياضي لبرهنة $\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+.....+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{2(n+2)}$

لجميع قيم n الصحيحة الموجبة

www.almanahj.com

مثلث باسكال

$$
\begin{array}{lcl}
(a+b)^0 & \rightarrow & 1 \\
(a+b)^1 & \rightarrow & 1 \quad 1 \\
(a+b)^2 & \rightarrow & 1 \quad 2 \quad 1 \\
(a+b)^3 & \rightarrow & 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
(a+b)^4 & \rightarrow & 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
(a+b)^5 & \rightarrow & 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
(a+b)^6 & \rightarrow & 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1
\end{array}
$$

السؤال الأول استخدم مثلث باسكال لايجاد مفكوك $(x+1)^6$

www.almanahj.com

السؤال الثاني استخدم مثلث باسكال لايجاد مفكوك $(2x-y)^5$

نظرية ذات الحدين

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} nCr\ a^{n-r}\ b^r$$

ملاحظات مهمة :-

1) عدد حدود مفكوك ذات الحدين يساوي $n+1$

2) مجموع أسى a , b يساوي دائما n

3) يمكن إيجاد أي حد في المفكوك من العلاقة $w_{r+1} = nCr\ a^{n-r}\ b^r$

4) قيمة $nCr = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ و يمكن حسابها من الآلة الحاسبة

السؤال الثالث في مفكوك $(a+b)^n$ يحتوي أحد الحدود على a^5b^9 فأن :

www.almanahj.com

1) قيمة n تساوي .....

2) عدد الحدود يساوي .....

3) معامل هذا الحد يساوي .....

4) الحد السابع من هذا المفكوك يساوي .....

السؤال الرابع أوجد الحد الخامس في مفكوك $(x^2 + \frac{1}{x^2})^8$ حيث $x \neq 0$

تمرين (1) باستخدام نظرية ذات الحدين اوجد مفكوك $(z-2w)^5$

تمرين (2) باستخدام نظرية ذات الحدين اوجد مفكوك $(1-x)^6$

www.almanahj.com

تمرين (3) اوجد مفكوك ذات الحدين $(3p+2q)^5$

تمرين (4) مثل تفكيك $(3a+12b)^{30}$ باستخدام الرمز سيجما $\sum$

تمرين (5) أوجد الحد الأوسط في مفكوك $(\sqrt{2}+2c)^{10}$

www.almanahj.com

تمرين (6) في مفكوك $(ax+b)^5$ المعامل العددي للحد الثاني يساوي 400 و المعامل العددي للحد الثالث 2000 . أوجد قيمتي a , b