دولة الإمارات العربية المتحدة
وزاة التربية و التعليم
إدارة قطاع العمليات د / نطاق 3
مدرسة أم عمارة للتعليم الثانوي للبنات

المتجهات

للثاني عشر متقدم/ فيزياء

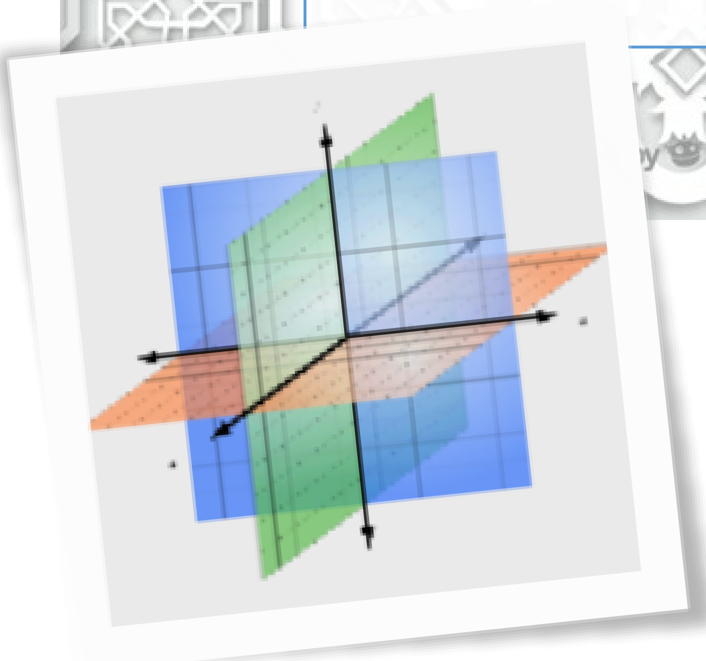
إعداد م . إلهام الشحي

2017-2018

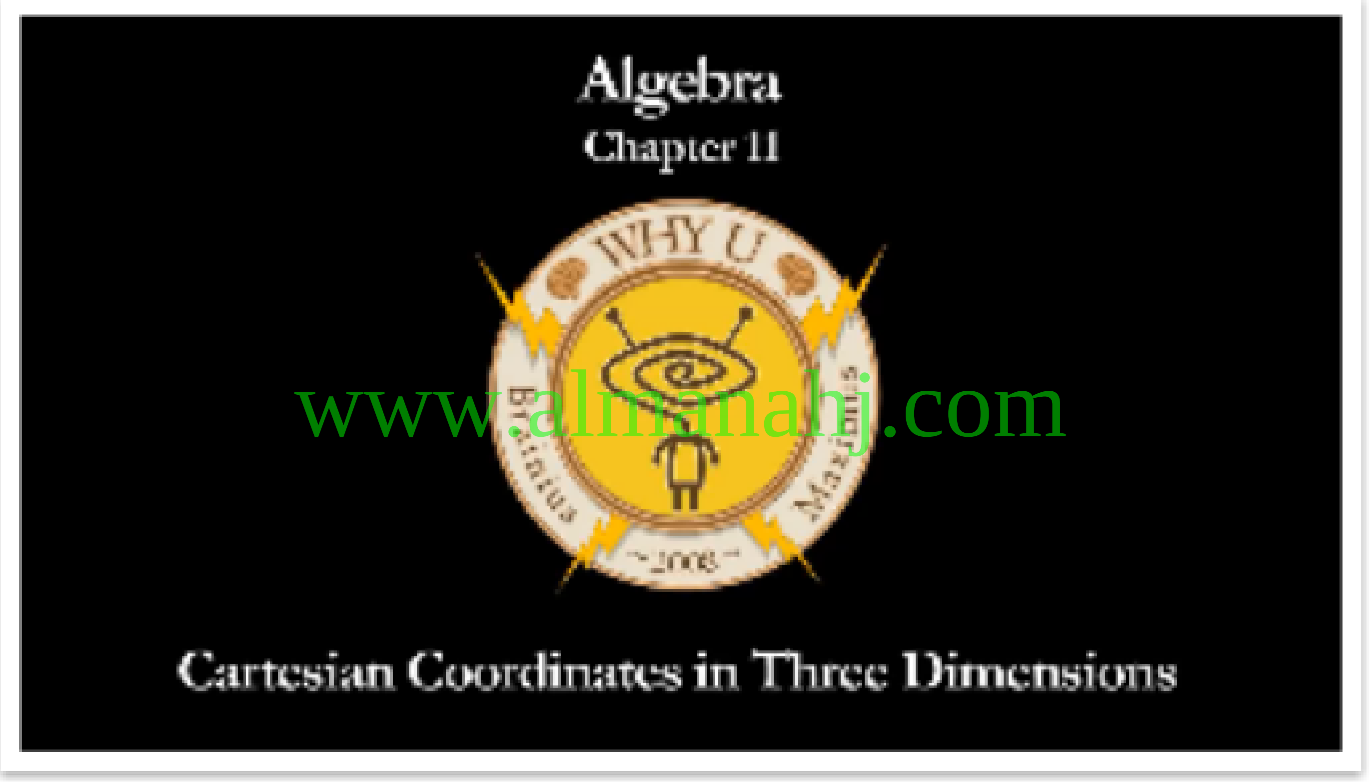
مؤشرات الأداء : ❖

تتعرف الطالبة على : -

- مفهوم النظام الإحداثي الديكارتي
- التمثيل الديكارتي للمتجهات
- جمع المتجهات و طرحها بيانيا
- جمع المتجهات باستخدام المركبات
- ضرب متجه في كمية قياسية
- متجهات الوحدة
- طول المتجه و اتجاهه
- الضرب القياسي للمتجهات

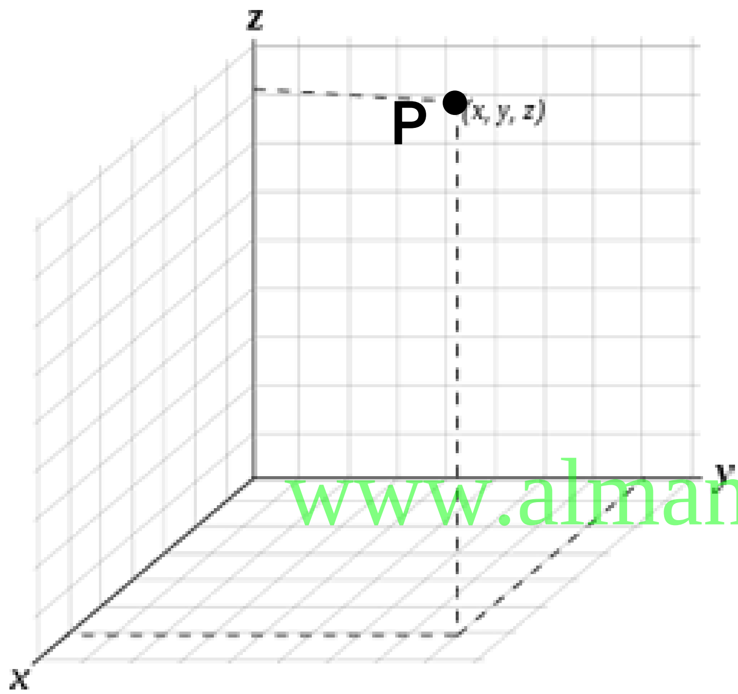


➢ مفهوم النظام الإحداثي الديكارتي

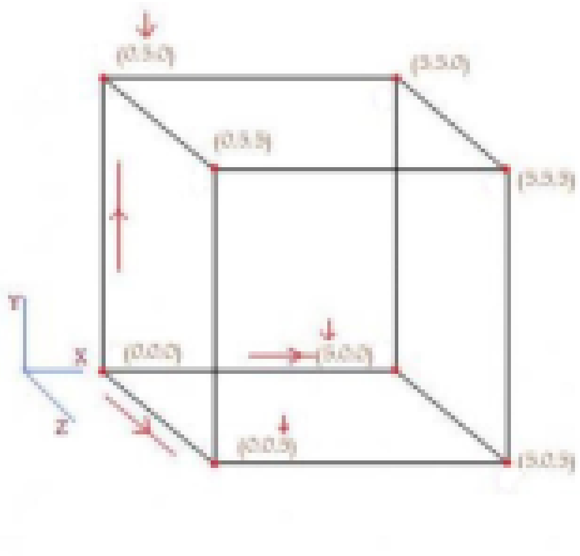


➢ مفهوم النظام الإحداثي الديكارتي

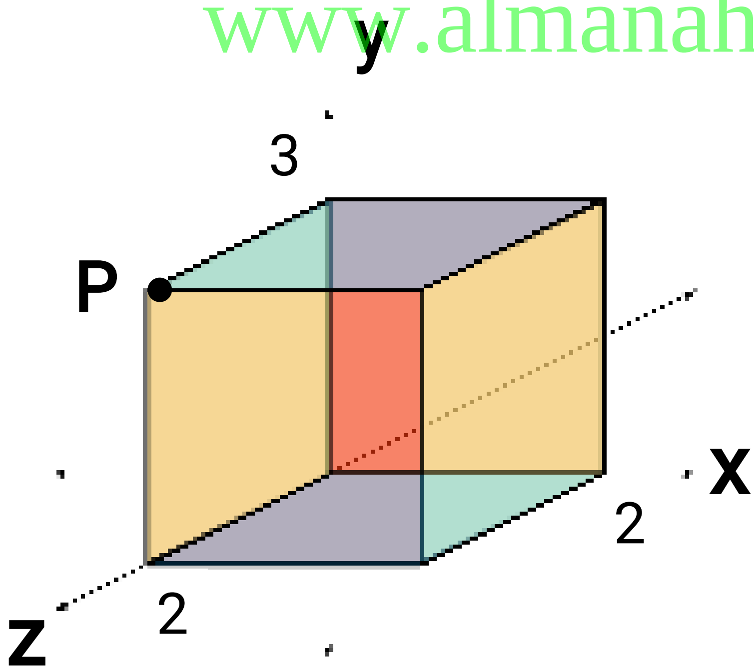
ما هي إحداثيات النقطة **P** -
في الشكل المجاور ؟



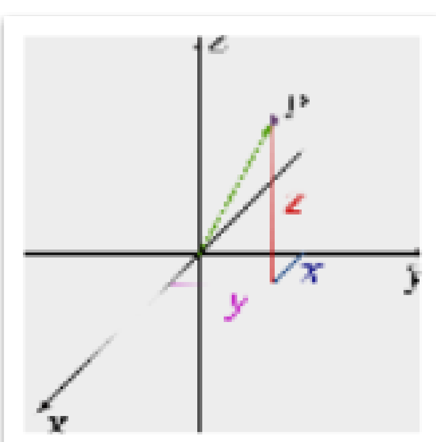
➢ مفهوم النظام الإحداثي الديكارتي

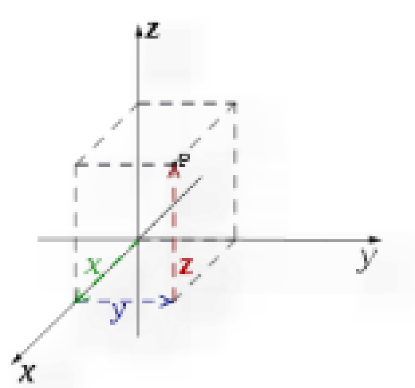


يمثل الشكل المجاور،
إحداثيات زوايا المكعب في
النظام الديكارتي .



- إحداثيات النقطة **P**
بالنظام الديكارتي
هي :
....



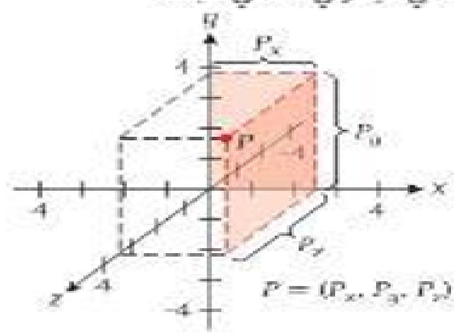


النظام الإحداثي الديكارتي ➢

الشكل 1.13 تمثيل النقطة P في نظام إحداثي ديكارتي أحادي البعد.

في فضاء ثنائي الأبعاد $A = (A_x, A_y)$

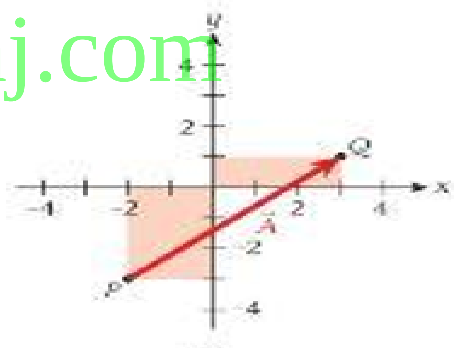
في فضاء ثلاثي الأبعاد $A = (A_x, A_y, A_z)$



الشكل 1.14 تمثيل النقطة P في فضاء ثلاثي الأبعاد بدلالة إحداثياتها الديكارتية.

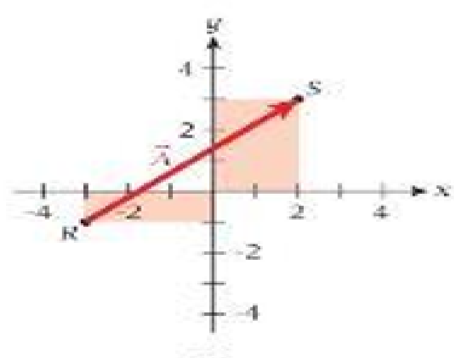
مركبتا A هما إحداثيات النقطة Q مطروحا منها إحداثيات النقطة P .

$$\vec{A} = \big(3-(-2), 1-(-3)\big) = (5.4)$$



$$\vec{A} = \big(2-(-3), 3-(-1)\big) = (5.4)$$

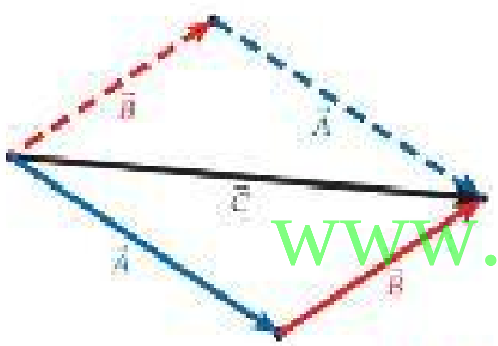
يمكن نقل المتجه مع الحفاظ على مقداره واتجاهه



➢ جمع المتجهات و طرحها بيانيا

- $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$

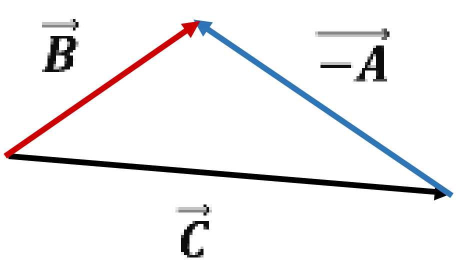
- $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$



الشكل 1.18 خاصية التبديل لجمع المتجهات.

- $\vec{C} - \vec{C} = (0,0,0)$

الشكل 1.19 المتجه المعاكس $-\vec{C}$



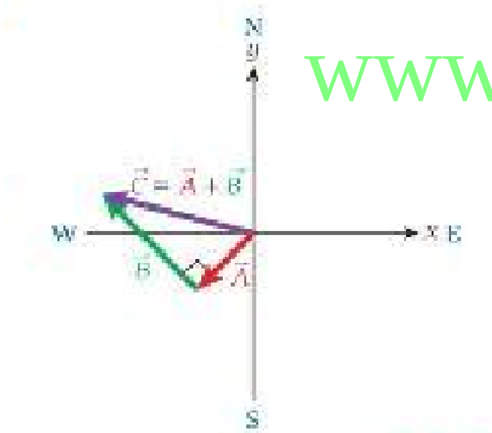
- $\vec{B} = \vec{C} - \vec{A}$

- جمع المتجهات باستخدام المركبات

- ـ باستخدام أطوال المتجهات (جمع المتجهات المطول) :

<u>مسألة محلولة 1.3 ص 24</u>

- أنت تتنزه سيراً في منطقة إيفرجلادز في فلوريدا متجهاً من المخيم الأساسي إلى الجنوب الغربي مسافة 1.27 km ، ثم وصلت إلى نهر لا يمكنك عبوره بسبب عمقه البالغ. فاستدرت جهة اليمين بزاوية 90° وسرت مرة أخرى مسافة 3.12 km لتصل إلى الجسر. كم تبعد عن المخيم الأساسي ؟



الشكل 1.27 رحلة السير مع الانعطاف بزاوية 90°

الحل :

$$A_x = A\cos\theta$$
$$A_x = 1.27\cos 45 = -1.22 \text{ غربا}$$
$$A_y = 1.27\sin 45 = -1.22 \text{ جنوبا}$$

$$B_x = 3.12\cos 45 = -2.21 \text{ غربا}$$
$$B_x = 3.12\sin 45 = 2.21 \text{ شمالا}$$

$$C_x = -1.22 + (-2.21) = -3.43 \text{ غربا}$$
$$C_y = -1.22 + 2.21 = 0.99 \text{ شمالا}$$
$$C = \sqrt{3.43^2 + 0.99^2} = 3.57\ km$$

للتحقق:
بما أن $\vec{C}$ هو الوتر لمثلث قائم الزاوية، يمكن حساب طول الضلع باستخدام نظرية فيثاغورس مباشرة. جرب !

- جمع المتجهات باستخدام المركبات

- باستخدام التمثيل الديكارتي للمتجهات:

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = (B_x, B_y, B_z)$$

$$\vec{\boldsymbol{C}} = \vec{\boldsymbol{A}} + \vec{\boldsymbol{B}}$$

$$= (A_x, A_y, A_z) + (B_x, B_y, B_z)$$

$$= (A_x + B_x\,,\ A_y + B_y\,,\ A_z + B_z)$$

أي أن :

$$C_x = A_x + B$$
$$C_y = A_y + B_y$$
$$C_z = A_z + B_z$$

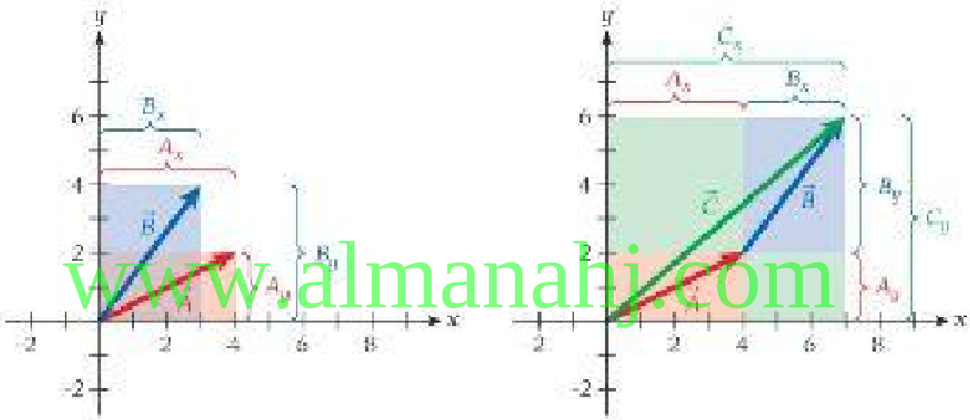
- جمع المتجهات باستخدام المركبات

- مثال :
- إذا علمت أن :

$$\vec{A} = (3,3)$$
$$\vec{B} = (2,3\ )$$

أوجدي $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ ؟

- جمع المتجهات باستخدام المركبات



(a) (b)

يوضح الشكل 1.20 العلاقة بين الطريقة البيانية وطريقة المركبات. يوضح الشكل 1.20a متجهين $\vec{A} = (4, 2)$ و $\vec{B} = (3, 4)$ في فضاء ثنائي الأبعاد ويوضح الشكل 1.20b متجه المجموع $\vec{C} = (4+3, 2+4) = (7,6)$. يثبت الشكل 1.20b بوضوح أن $C_x = A_x + B_x$. نظرًا لأن المجموع الكلي يساوي مجموع المركبات معًا.

وبالطريقة نفسها، يمكننا حساب متجه الفرق $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$ ويمكن التوصل إلى المركبات الديكارتية لمتجه الفرق بواسطة

$$D_x = A_x - B_x$$
$$D_y = A_y - B_y \qquad (1.14)$$
$$D_z = A_z - B_z .$$

ضرب متجه في كمية قياسية ⮚

- $\vec{E} = s\,\vec{A} = s(A_x, A_y, A_z) = (sA_x, sA_y, sA_z)$

- $E_x = sA_x$
- $E_y = sA_y$
- $E_z = sA_z$

✓مثال :

$\vec{A} = (2,3,5)$
$\vec{E} = 6\vec{A}$

- أوجد $\vec{E}$ ؟

متجهات الوحدة ➢

- هي متجهات مقدارها 1، تمتد على طول المحاور الإحداثية الأساسية للنظام الإحداثي .
- في حالة الثلاث أبعاد تكون هذه المتجهات في اتجاه X الموجب
- و y الموجب و z الموجب

ويرمز لها على الترتيب :

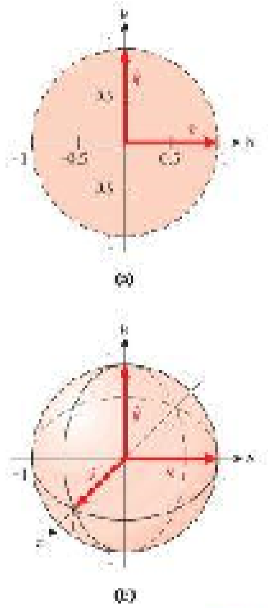
$$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$$

$$\hat{x} = (1,0,0)$$

$$\hat{y} = (0,1,0)$$

$$\hat{z} = (0,0,1)$$

➢ متجهات الوحدة



الشكل 1.21

الشكل المجاور يبين متجهات الوحدة
في بعدين و في ثلاثة أبعاد .

تمكننا متجهات الوحدة من من كتابة أي متجه
كمجموع لمتجهات الوحدة هذه بدلا من استخدام رمز المركبات .

$$\vec{A}=(A_x,A_y,A_z)$$
$$=(A_x,0,0)+(0,A_y,0)+(0,0,A_z)$$
$$=A_x(1,0,0)+A_y(0,1,0)+A_z(0,0,1)$$
$$=A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z}.$$

في حالة البُعدين، نحصل على

$$\vec{A}=A_x\hat{x}+A_y\hat{y}.$$

سيكون تمثيل متجه الوحدة هذا مفيدا بشكل خاص في ضرب متجهين.

مثال : ❖

- مثل المتجه $\vec{A}=(2,3,5)$ بمتجهات الوحدة .

الحل : ✓

$$\vec{A}=(2,3,5)$$

يمكن التعبير عنها بمتجهات الوحدة كالتالي:

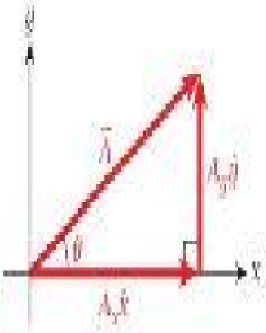
- $$\vec{A}=2\hat{x}+3\hat{y}+5\hat{z}$$

طول المتجه و اتجاهه ➢

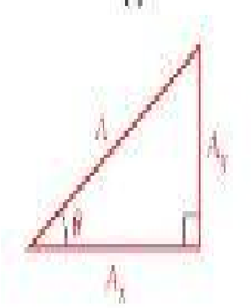
- يمكن حساب طول المتجه كالتالي :

$$A = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2}$$

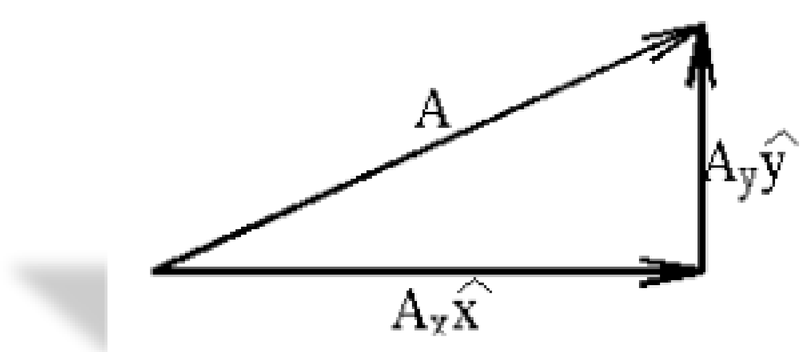
$$\theta = tan^{-1}\frac{A_y}{A_x}$$



(a)



$$A_x = A\cos\theta$$
$$A_y = A\sin\theta$$



➢ الضرب القياسي للمتجهات

$$\vec{A}.\vec{B} = (A_x, A_y, A_z) . (B_x, B_y, B_z)$$

$$\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\alpha = \vec{B}.\vec{A}$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2}$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{{B_x}^2 + {B_y}^2 + {B_z}^2}$$

مثال :

- أوجدي الزاوية α بين متجهي الموقع

$$\vec{A} = (4.00, 2.00\ , 5.00)$$
$$\vec{B} = (4.50, 4.00\ , 3.00)$$

الإجابة: $\alpha = 24.6°$

➢ الضرب القياسي للمتجهات

- يعطي الضرب القياسي كمية قياسية ، و تسري عليه خاصية التوزيع
- $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$
- الضرب القياسي لمتجهات الوحدة :

$$\hat{x}\cdot\hat{x}=\hat{y}\cdot\hat{y}=\hat{z}\cdot\hat{z}=1$$
$$\hat{y}\cdot\hat{x}=\hat{z}\cdot\hat{x}=\hat{z}\cdot\hat{y}=0$$

يكون ناتج الضرب القياسي لأي متجهي وحدة مختلفين يساوي الصفر حيث أن المتجهين متعامدان على بعضهما .

$$\vec{x}.\vec{y}=\ |\vec{x}||\vec{y}|\cos 90=0$$
$$\vec{x}.\vec{x}=\ |\vec{x}||\vec{x}|\cos 0=1$$

$$|\vec{x}|^2=\ \sqrt{(1+0+0)}^2=1$$

الضرب الاتجاهي ➢

الضرب الاتجاهي هو عملية ثنائية بين متجهين، تكون نتيجتها متجه متعامد على المستوى الذي ينتمي له المتجهان طرفا هذه العملية. و هذا بخلاف الضرب القياسي الذي يكون حاصله كمية قياسية.

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

يتم تحديد المقدار المطلق للمتجه $\overrightarrow{C}$ من خلال :

$$|\vec{C}| = |\vec{A}||\vec{B}| \sin\theta$$

θ هي الزاوية المحصورة بين $\vec{A}$ و $\vec{B}$.

من ذلك نستنتج أن :

١. إذا كانت $\vec{A} \perp \overrightarrow{B}$ فإن $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \longleftarrow$ أقصى ما يمكن $|\vec{A}||\vec{B}|$

٢. في حالة $\vec{A} \parallel \vec{B}$ فإن $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \longleftarrow \vec{A} \times \vec{B} = 0$

٣. $\vec{A} \times \vec{A} = 0$

٤. $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

٥. $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$

الضرب الاتجاهي ➢

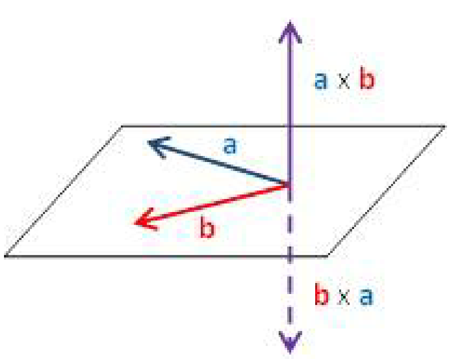
- يعرف الضرب الاتجاهي بين المتجهين

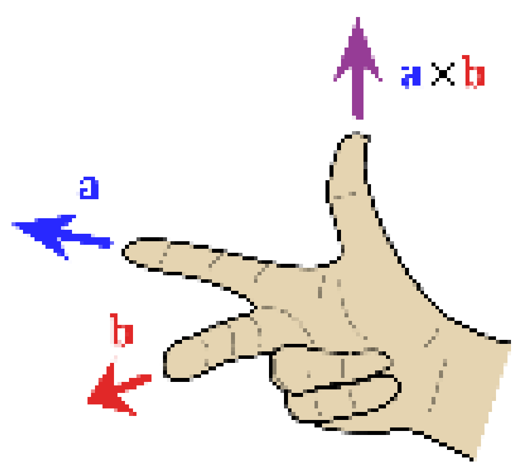
$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \color{red}{\hat{x}} & \color{red}{\hat{y}} & \color{red}{\hat{z}} \end{array} \\ \left| \begin{array}{ccc} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{array} \right| \end{array}$$

$$C_x = A_y B_z - A_z B_y$$
$$C_y = -(A_x B_z - A_z B_x)$$
$$C_z = A_x B_y - A_y B_x$$

$$\vec{C} = (A_y B_z - A_z B_y)\hat{x} - (A_x B_z - A_z B_x)\hat{y} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{z}$$





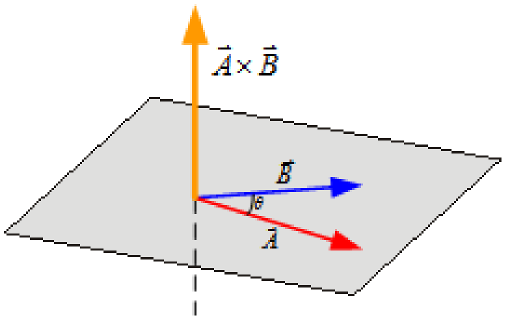
سؤال:

- لتكن $\vec{B} = (3,2,1)$ و $\vec{A} = (1,0,-2)$
- أوجد $\vec{A} \times \vec{B}$

الإجابة هي: $\vec{A} \times \vec{B} = 4\hat{x} - 7\hat{y} + 2\,\hat{z}$

الضرب الاتجاهي ➢

• يمكن ملاحظة أن :

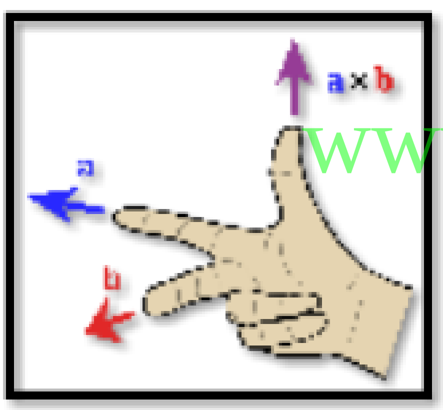


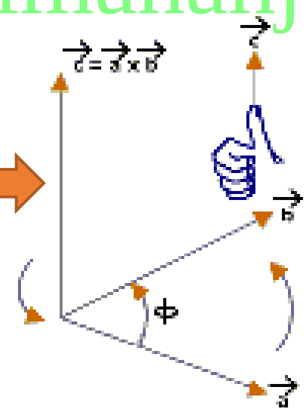
$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$$
$$\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$$
$$\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$$

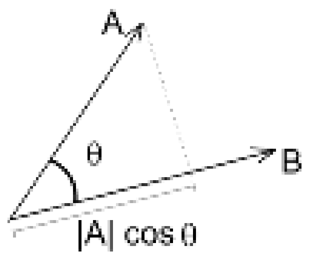
لإيجاد اتجاه المتجه $\vec{C}$ حيث :

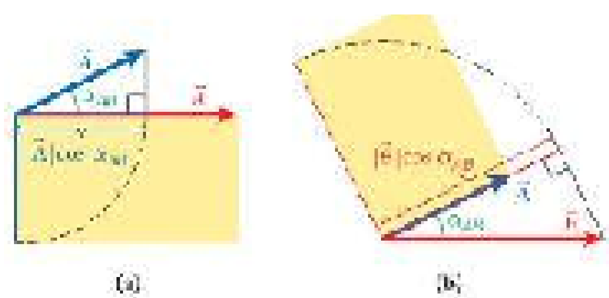
$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

نستخدم قاعدة اليد اليمنى

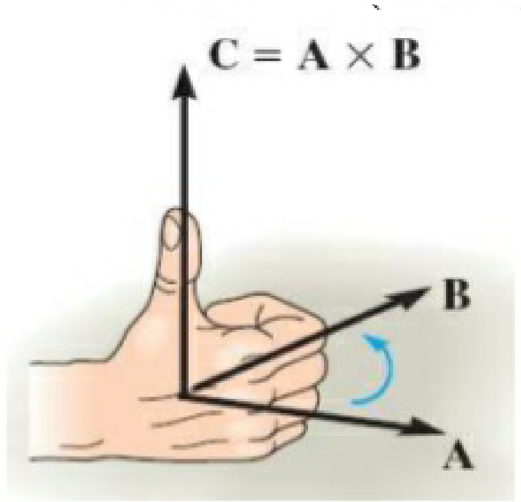


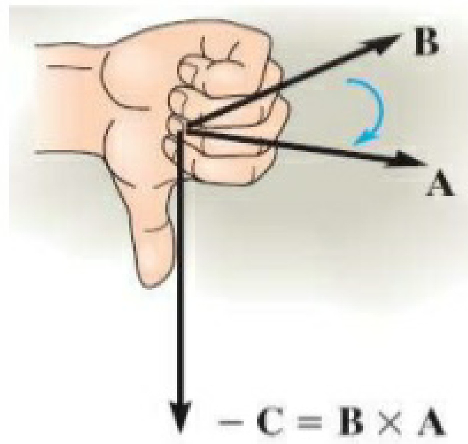






الشكل 1.25 التفسير الهندسي للضرب القياسي كمساحة (a) مسقط $\vec{A}$ على $\vec{B}$ (b) مسقط $\vec{B}$ على $\vec{A}$





$\hat{x} \times \hat{x} = \hat{0}$	$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$	$\hat{x} \times \hat{z} = \widehat{-y}$
$\hat{y} \times \hat{y} = \hat{0}$	$\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$	$\hat{y} \times \hat{x} = \widehat{-z}$
$\hat{z} \times \hat{z} = \hat{0}$	$\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$	$\hat{z} \times \hat{y} = \widehat{-x}$