الرياضيات المتقدمة

الصف الثاني عشر المتقدم

الوحدة الرابعة

الفصل الدراسي الثاني للعام الدراسي 2018-2019

www.almanahj.com

مدرس المادة:- صكبان صالح محمد

الوحدة (4) :- تطبيقات الاشتقاق

تتكون هذه الوحدة من المواضيع التالية .

[4,1]- التقريبات الخطية وطريقة نيوتن .

[4,2]-الصيغ غير المعرفة وقاعدة لوبيتال .

[4,3] - القيم العظمى والصغرى .

[4,] - الدوال المتزايدة والمتناقصة .

[4,5]- التقعر واختبار المشتقة الثانية .

[4,6]- نظرة عامة على رسم المنحنيات .

[4,7] - القيم المثلى .

[4,8]- المعدلات المرتبطة .

[4,9]- معدلات التغير في الاقتصاد والعلوم .

التقريبات الخطية وطريقة نيوتن

www.almanahj.com

تعريف : التقريب الخطي (أو المماس) للدالة $f(x)$ عند $x=x_0$ هو الدالة

$$L(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

س1):- أوجد التقريب الخطي للدالة $f(x)=\cos x$ عند $x_0=\frac{\pi}{3}$

.....

.....

.....

.....

س2):- أوجد التقريب الخطي للدالة $f(x)=\sin x$ عندما تقترب x من الصفر .

.....

.....

.....

.....

س3):- استخدم التقريب الخطي لتقريب كل من الجذور :- $\sqrt{26}$, $\sqrt[3]{25.2}$, $\sqrt[3]{8.07}$

.....

.....

.....

.....

.....

www.almanahj.com

س4):- قدرت شركة أنه يمكن بيع $f(x)$ ألف آلة تصوير بسعر x درهم . كما هو معطى في الجدول المجاور . قدر عدد الات التصوير التي يمكن بيعها بسعر 7 دراهم .

x	6	10	14
f(x)	84	60	32

.....

.....

.....

.....

.....

طريقة نيوتن رافسون للتقريب :-

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad , \quad n=0,1,2,.....$$

س5):- استخدم طريقة نيوتن لإيجاد الصفر التقريبي للدالة $f(x)=x^5-x+1$

.....

.....

.....

.....

.....

س6):- استخدم طريقة نيوتن لتقريب الجذور $\sqrt{23}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[3]{11}$

.....

.....

.....

.....

.....

www.almanahj.com

س7):- قدرت شركة ما أنه يمكن بيع $f(x)$ ألف لعبة برمجة بالسعر x درهم كما في الجدول المجاور . قدر عدد اللعبات التي يمكن بيعها بسعر 24 درهم .

x	20	30	40
f(x)	18	14	12

.....

.....

.....

.....

.....

قاعدة لوبيتال

من الصيغ غير المعرفة التي مرت علينا (0^0 ، $0\times\infty$ ، 1^∞ ، $\infty-\infty$ ، ∞^0 ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\frac{0}{0}$)

ملاحظة:- قاعدة لوبيتال تطبق فقط عندما يكون ($\frac{\infty}{\infty}$ ، $\frac{0}{0}$) ،

س1):- أوجد النهايات التالية وذلك بتحديد ما إذا كان يمكن استخدام طريقة لوبيتال أم لا :-

1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

.....

.....

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{e^{3x}-1}$

.....

.....

www.almanahj.com

3) $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{e^{2t}-1}{t}$

.....

.....

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+5}{x^2+6x+5}$

.....

.....

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\sin^{-1}x}$

.....

.....

6) $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$

.....

.....

7) $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x}$

.....

.....

8) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x}$

.....

.....

www.almanahj.com

9) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

.....

.....

.....

10) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{e^x - 1}$

.....

.....

.....

11) $\lim_{x \to \infty} (x + 1)^{\frac{2}{x}}$

.....

.....

12) $\lim_{x\to\infty} x\sin(\frac{1}{x})$

.....

.....

.....

13) $\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^x$

.....

.....

.....

.....

.....

www.almanahj.com

س2): استخدم قاعدة لوبيتال لإيجاد النهايات التالية .

14) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2 - \sin^2 x}{x^4}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

15) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x - \frac{1}{2}x^2}{x^4}$

.....

.....

.....

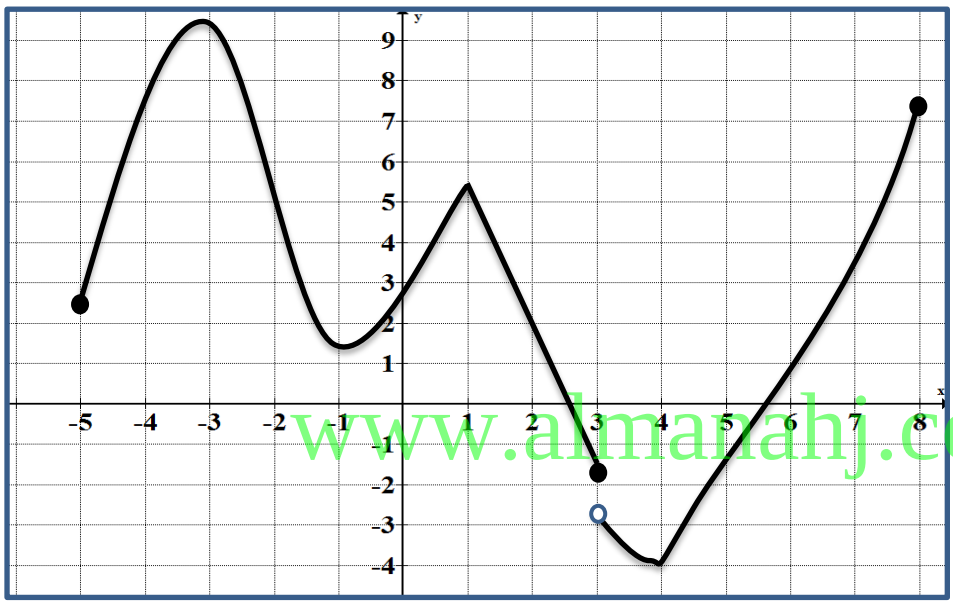
.....

القيم العظمى والصغرى [4,3]

ملاحظة :- يمكن إيجاد القيم العظمى والقيم الصغرى المحلية (والقيم المطلقة) (بيانياً أو جبرياً) .

تعريف النقطة الحرجة (العدد الحرج). تكون النقطة a نقطة حرجة عندما تكون $f'(a)=0$ أو $f'(a)$ غير معرفة . حيث النقطة a تقع في مجال الدالة f .

س3):- من الشكل المجاورالذي يمثل بيان الدالة f حدد ما يلي .



www.almanahj.com

1):- النقاط الحرجة

.....

.....

.....

2):- القيم العظمى والقيم الصغرى المحلية .

.....

.....

.....

3):- القيم العظمى والصغرى المطلقة :-

.....

.....

الدوال المتزايدة والمتناقصة [4,4]

تكون الدالة متزايدة في فترة إذا كانت $1)\quad x_2>x_1 \rightarrow f(x_2)>f(x_1)$

تكون الدالة متناقصة في فترة إذا كانت $2)\quad x_2>x_1 \rightarrow f(x_2)<f(x_1)$

كما مر بنا سابقاً في الفصل الدراسي الأول .

نظرية :- إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق في فترة معينة فإن :-

1):- تكون الدالة f متزايدة إذا كانت $f'(x)>0$

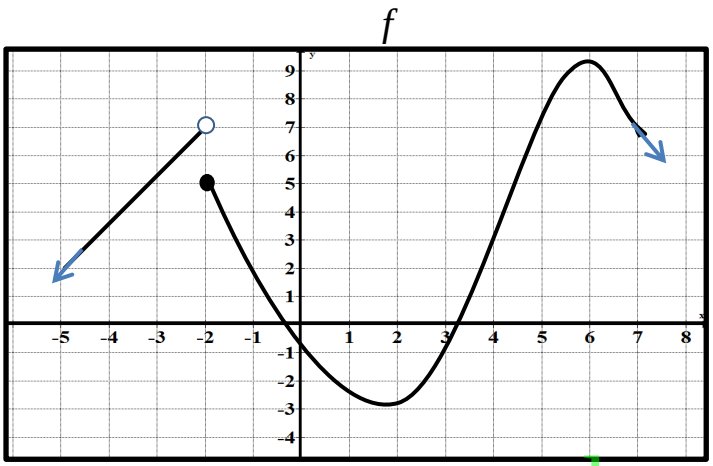
2):- تكون الدالة f متناقصة إذا كانت $f'(x)<0$

س):- متى تكون $f'(x)>0$، ومتى تكون $f'(x)<0$

الجواب :-

.....

س1):- الشكل المجاور يمثل بيان الدالة f



والمطلوب :-

1):- قيم x التي عندها نقاط حرجة

.....

.....

2):- فترات التزايد للدالة f

.....

3):- فترات التناقص للدالة f

.....

4):- قيم x التي عندها قيم عظمى وقيم x التي عندها قيم صغرى

.....

www.almanahj.com

س2):- لكل مما يلي أوجد (النقاط الحرجة ، فترات التزايد والتناقص ، القيم القصوى المحلية)

1) $f(x)=2x^3-3x^2-12x+5$

.....

.....

.....

.....

2) $f(x)=(3x+1)^{\frac{2}{3}}$

3) $f(x)=x^4-3x^3+2$

4) $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

www.almanahj.com

5) $f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1 & , \quad x<0 \\ x^2-4x+3 & , \quad x\geq 0 \end{cases}$

س3):- في كل مما يلي أوجد (النقاط الحرجة والقيم القصوى المطلقة) في الفترة المشار إليها .

1) $f(x)=x^3-3x+1$, $[-3,2]$

.....

.....

.....

.....

.....

2) $f(x)=x^4-8x^2+2$, $[-3,1]$

.....

.....

.....

.....

.....

www.almanahj.com

3) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$, $[-4,-2]$

.....

.....

.....

.....

.....

4) $f(x)=\dfrac{3x^2}{x-3}$, $[-2,2]$

.....

.....

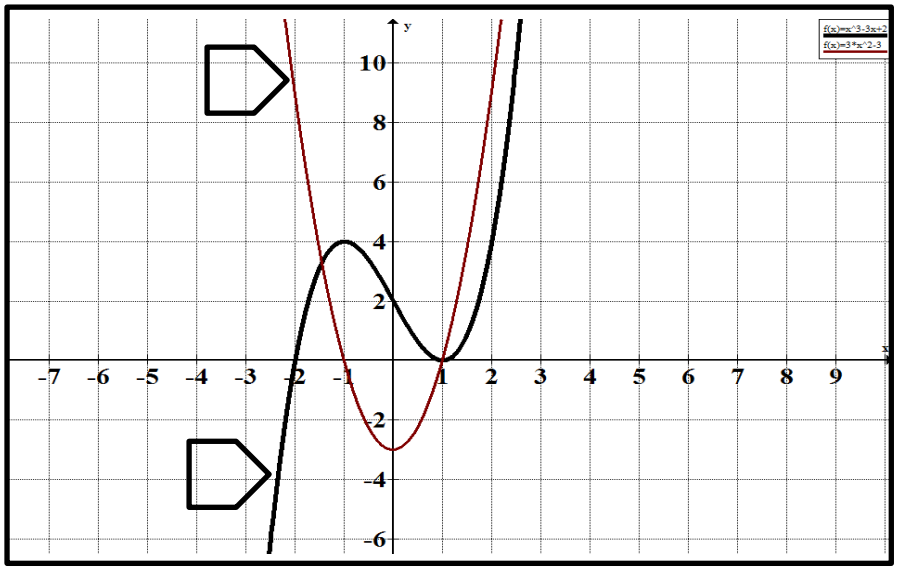
.....

.....

.....

كيفية إيجاد النقاط الحرجة والقيم القصوى المحلية وفترات التزايد وفترات التناقص من رسم المشتقة الأولى :-

س4):- الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f(x)$ وبيان مشتقتها الأولى $f'(x)$ والمطلوب :-



أين $f(x)$ وأين $f'(x)$

.....

1): النقاط الحرجة للدالة $f(x)$

.....

.....

2):- فترات التزايد للدالة $f(x)$

.....

3):- فترة التناقص للدالة $f(x)$

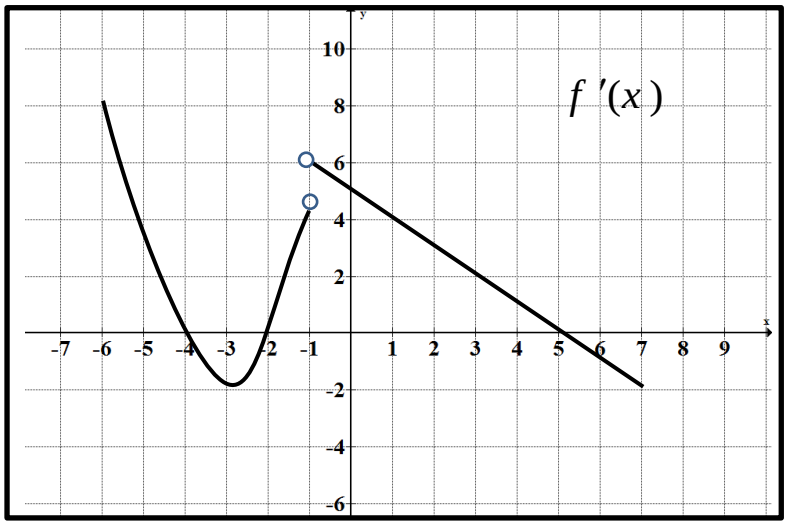
.....

4):- قيم x التي عندها قيم عظمى وصغرى ؟ هل توجد للدالة قيم قصوى مطلقة ؟

www.almanahj.com

.....

س5):- الشكل المجاور يمثل بيان المشتقة الأولى $f'(x)$ والمطلوب :-



1):- النقاط الحرجة

.....

.....

2):- قيم x التي عندها قيم قصوى محلية وقيم قصوى مطلقة .

.....

.....

3):- فترات التزايد وفترات التناقص

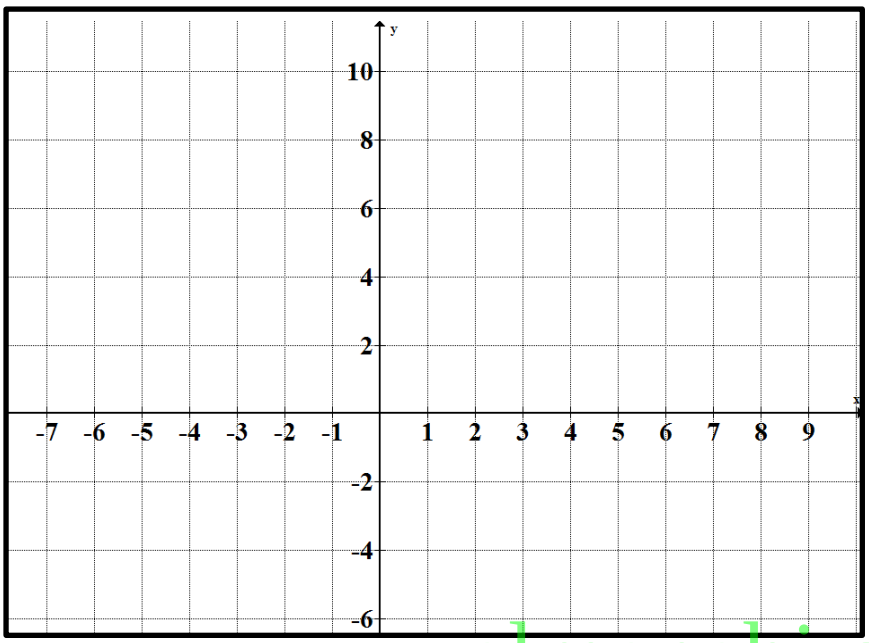
.....

س6):- ارسم كل من الدالتين التاليتين بيانياً بالخصائص التالية .

1) $f(-1)=1, f(2)=5, \quad f'(x)<0 \rightarrow x<-1, x>2$

$f'(x)>0 \rightarrow -1<x<2$

$f'(-1)=0 \quad , \quad f'(2)$ غير موجودة



www.almanahj.com

2) $f(0)=1, f(2)=5, \quad f'(x)<0 \rightarrow x<0, x>2$

$f'(x)>0 \rightarrow 0<x<2$