يمكنك الحصول على جميع الملفات من أوراق عمل وامتحانات ومذكرات وملخصات لجميع الصفوف وجميع المواد الخاصة بالمنهاج الإماراتي من خلال الرابط التالي

https://www.almanahj.com

كما يمكنك الحصول على جميع الملفات لجميع الفصول عبر تحميل تطبيق المناهج من خلال الرابط التالي:

https://play.google.com/store/apps/details?id=com.almanahj.UAEapplication

يمكنك الحصول على جميع الروابط الخاصة بمجموعات المناهج الإماراتية على مواقع التواصل الاجتماعي واتساب وفيسبوك وتلغرام من خلال الدخول على الرابط التالي:

http://t.me/almanahj

12
عام

مدرسة عبد القادر الجزائري
قسم الرياضيات

تحذير هام

هذه الأوراق بمثابة دفتر مساعد للطالب لتوفير الوقت في كتابة السؤال ولكن الحذر كل الحذر من الإكتفاء بها فقط حيث أن كتاب الوزارة هو المرجع الأساسي في كل شئ وعلى الطالب أن يتدرب على حل التمارين الواردة في الكتاب المدرسي الموجودة نهاية كل درس ويناقش المعلم بها

math 2020

الوحدة التاسعة
الإحداثيات القطبية

أ/ أحمد عطا

اسم الطالب / ....

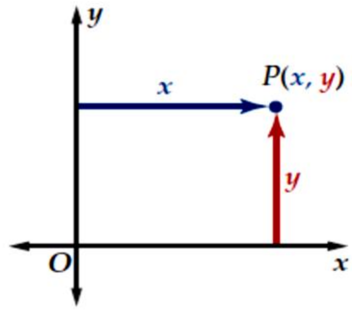
اسم المدرسة / ....

1 تمثيل النقاط بيانيًا باستخدام الإحداثيات القطبية.

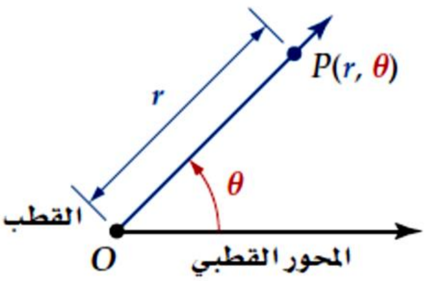
الإحداثيات القطبية

2 تمثيل المعادلات القطبية بيانيًا.

نظام الإحداثيات الديكارتية

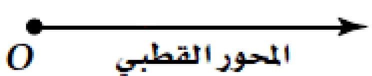


نظام الإحداثيات القطبية

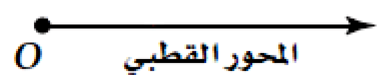


مثّل كل نقطة من النقاط الآتية في المستوى القطبي:

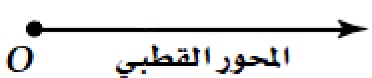
1 $A(2, 45°)$



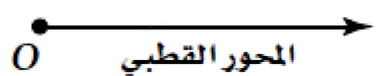
2 $B\left(-1.5, \frac{2\pi}{3}\right)$



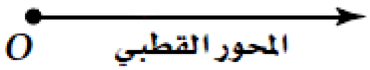
3 $C(3, -30°)$



4 $D\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$



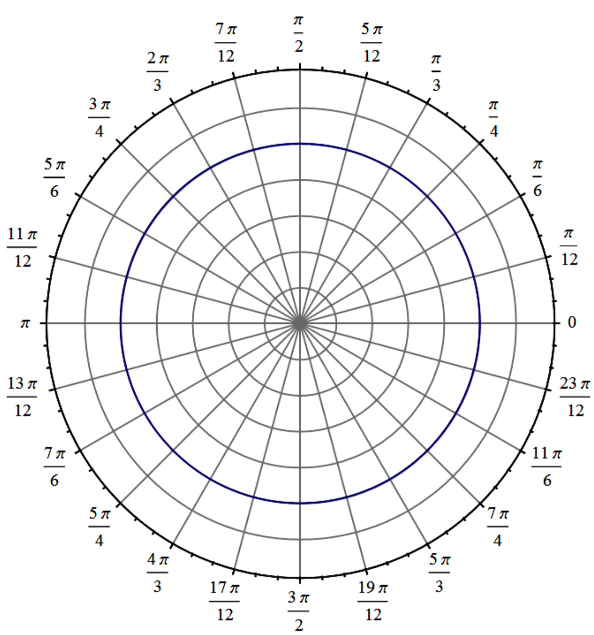
5 $E(2.5, 240°)$



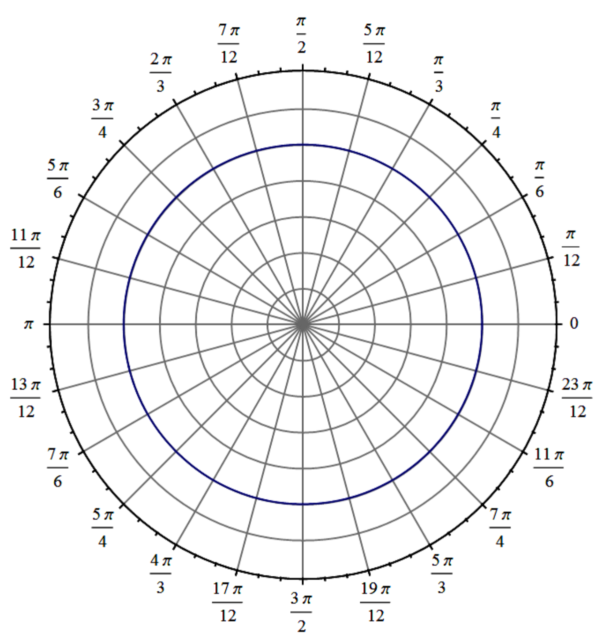
6 $F\left(4, -\frac{5\pi}{6}\right)$

مثّل كلًّا من النقاط الآتية في المستوى القطبي:

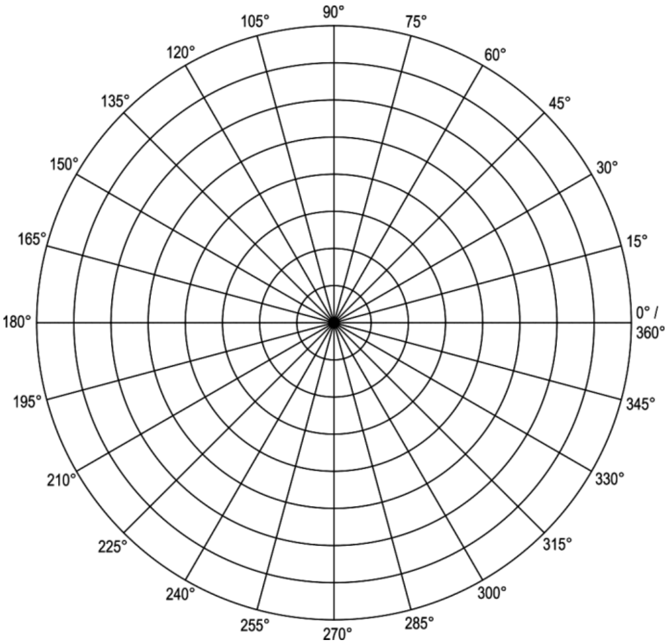
7 $P\left(3, \frac{4\pi}{3}\right)$



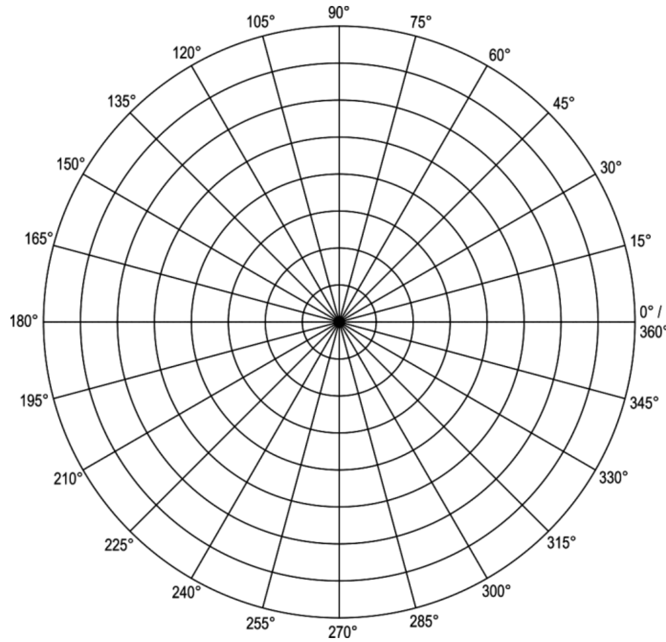
8 $R\left(1.5, -\frac{7\pi}{6}\right)$



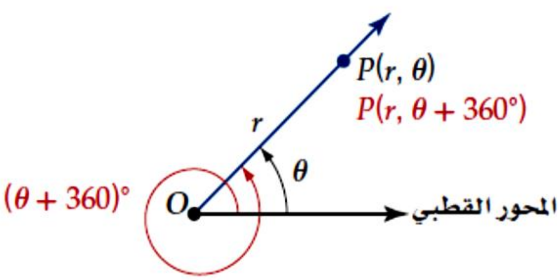
9 $Q(-3.5, 150°)$

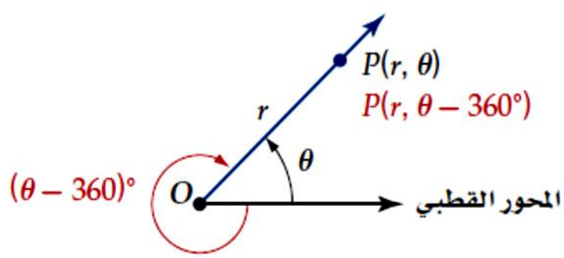


10 $S(-2, -135°)$

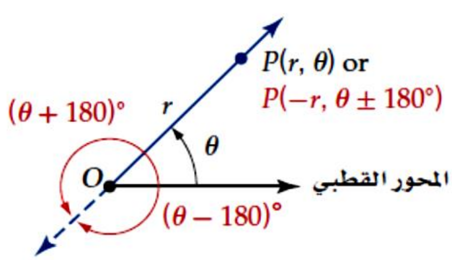


في نظام الإحداثيات الديكارتية كل نقطة يُعبَّر عنها بزوج وحيد من الإحداثيات (x, y). إلا أن هذا لا ينطبق على نظام الإحداثيات القطبية؛ وذلك لأن قياس كل زاوية يُكتب بعدد لانهائي من الطرائق؛ وعليه فإن للنقطة (r, θ) الإحداثيات $(r, \theta \pm 360°)$ أو $(r, \theta \pm 2\pi)$ أيضًا كما هو مبيّن أدناه.



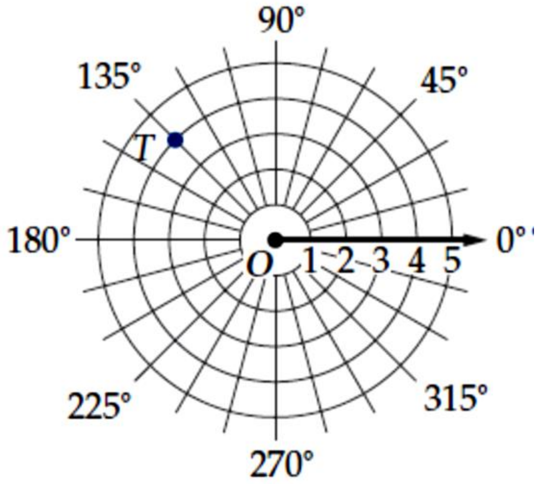


وكذلك لأن r مسافة متجهة، فإن (r, θ) و $(-r, \theta \pm 180°)$، أو $(-r, \theta \pm \pi)$ تمثّل النقطة نفسها، كما في الشكل المجاور.



وبصورة عامة، إذا كان n عددًا صحيحًا، فإنه يمكن تمثيل النقطة (r, θ) بالإحداثيات $(r, \theta + 360°n)$ أو $(-r, \theta + (2n+1)180°)$. وبالمثل، إذا كانت θ مقيسة بالراديان، وكان n عددًا صحيحًا، فإنه يمكن تمثيل النقطة (r, θ) بالإحداثيات $(r, \theta + 2n\pi)$ أو $(-r, \theta + (2n+1)\pi)$.

11 إذا كانت $-360° \leq \theta \leq 360°$ ، فأوجد أربعة أزواج مختلفة كل منها يمثّل إحداثيين قطبيين للنقطة T في الشكل المجاور.



....

....

....

....

....

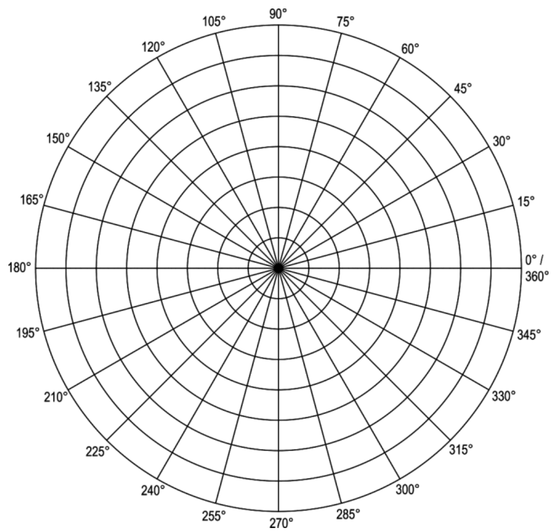
....

....

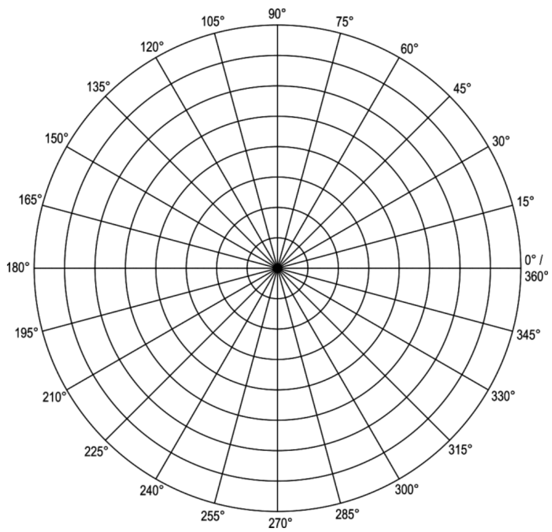
....

أوجد ثلاثة أزواج مختلفة كل منها يمثّل إحداثيين قطبيين للنقطة المعطاة، علمًا بأن:
$-360° \leq \theta \leq 360°$ ، أو $-2\pi \leq \theta \leq 2\pi$.

12 $(5, 240°)$



13 $(-2, 300°)$



....

....

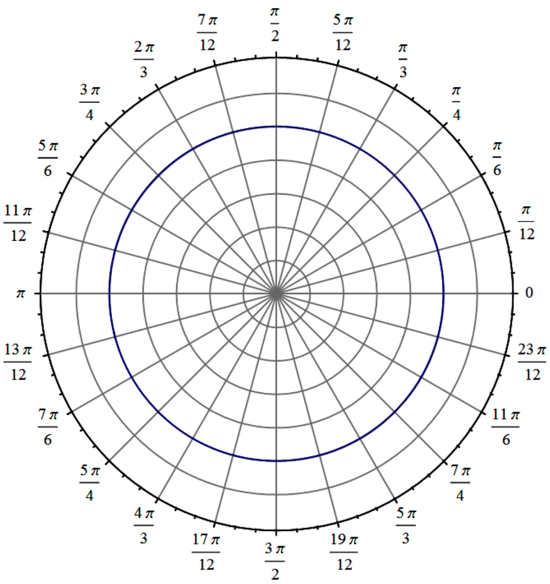
....

....

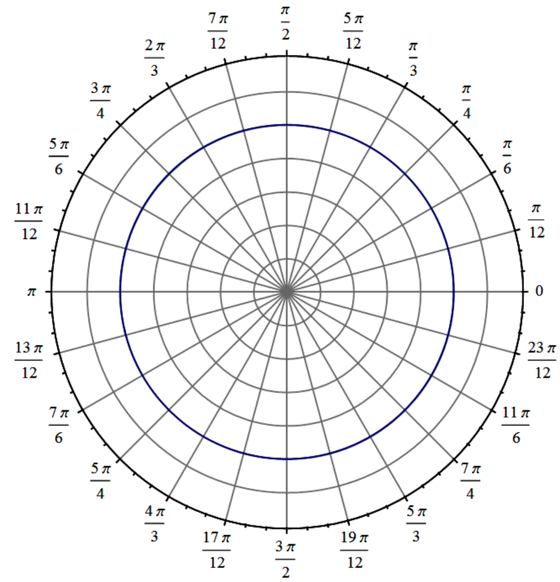
....

....

14 $\left(-2, \frac{\pi}{6}\right)$



15 $\left(-3, \frac{2\pi}{3}\right)$



....

....

....

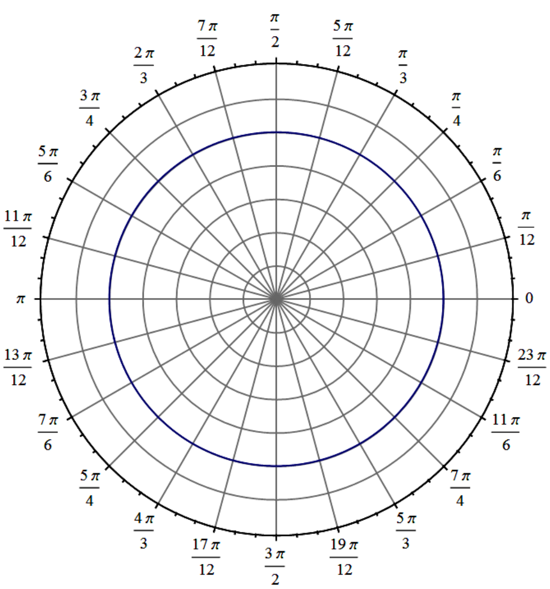
....

....

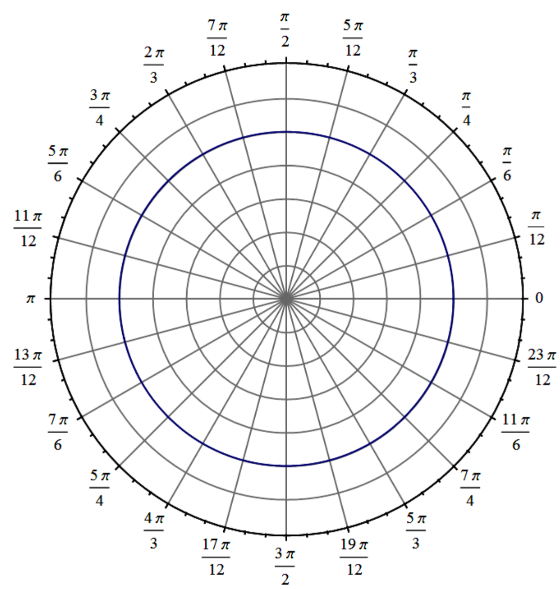
....

مَثِّل كل معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًا:

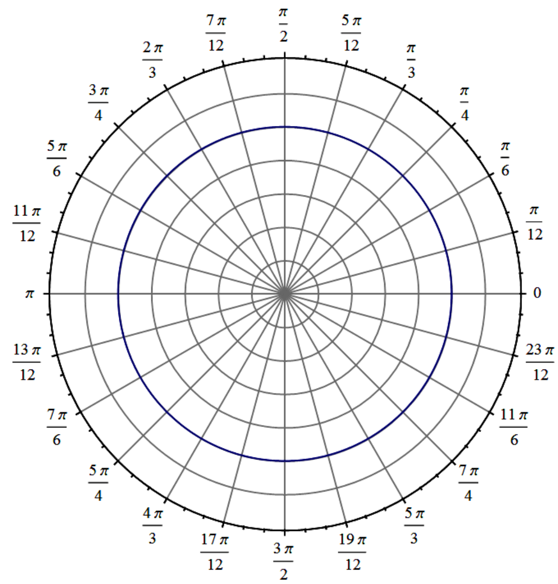
16 $r = 2$



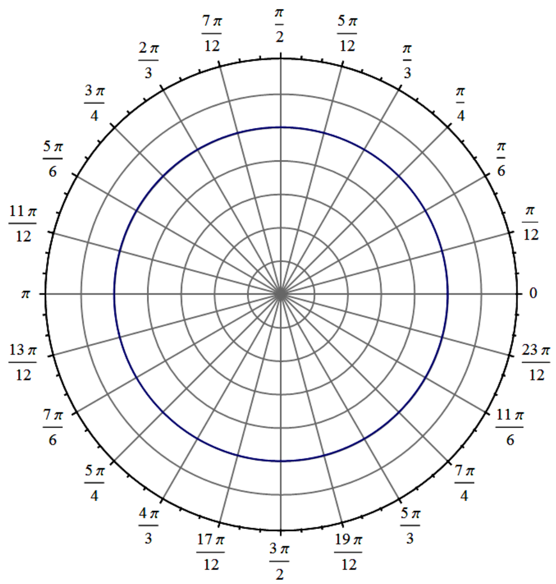
17 $r = 3$



19 $\theta = \frac{2\pi}{3}$



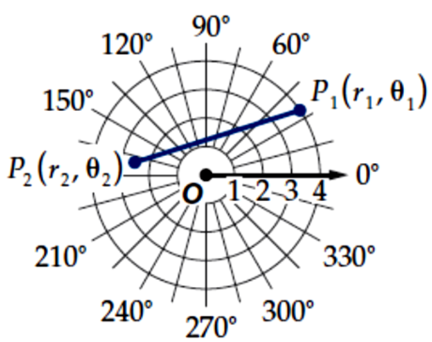
18 $\theta = \frac{\pi}{6}$



مفهوم أساسي — المسافة بالصيغة القطبية

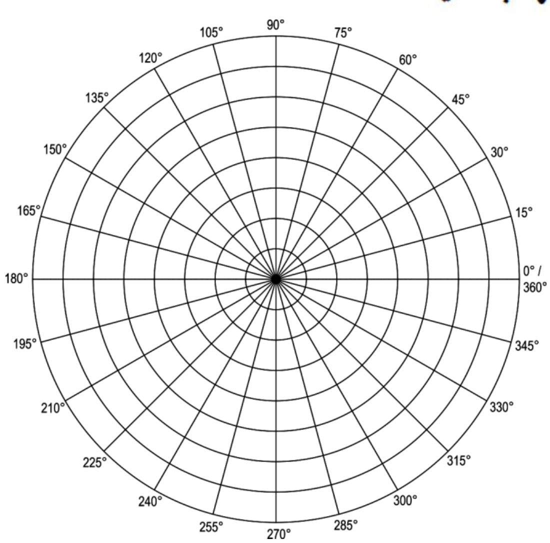
افترض أن $P_1(r_1, \theta_1)$, $P_2(r_2, \theta_2)$ نقطتان في المستوى القطبي، تُعطى المسافة P_1P_2 ، بالصيغة:

$$P_1P_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$



20 **حركة جوية :** يتابع مراقبُ الحركة الجوية طائرتين تطيران على الارتفاع نفسه، حيث إحداثيات موقعي الطائرتين هما $A(5, 310°)$, $B(6, 345°)$ ، وتقاس المسافة المتجهة بالأميال.

a) مثِّل هذا الموقف في المستوى القطبي.



b) إذا كانت تعليمات الطيران تتطلب أن تكون المسافة بين الطائرتين أكثر من 3 mi ، فهل تخالف هاتان الطائرتان هذه التعليمات؟ وَضِّح إجابتك.

....

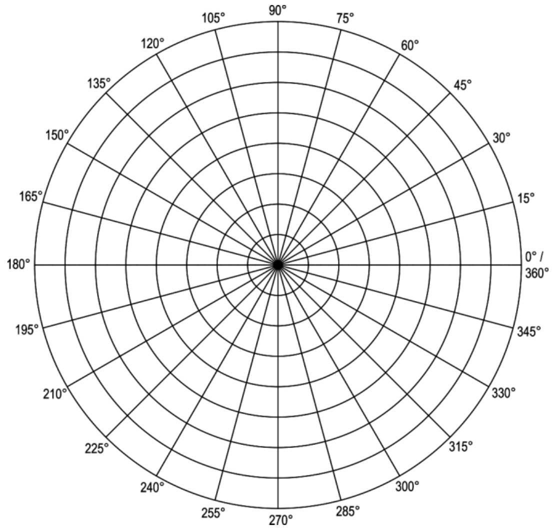
....

....

....

قوارب: يرصُد رادار بحري حركة قاربين، إذا كانت إحداثيات موقعي القاربين $(3, 65°)$, $(8, 150°)$ ، حيث r بالأميال.

فمثّل هذا الموقف في المستوى القطبي.



ما المسافة بين القاربين؟

....

....

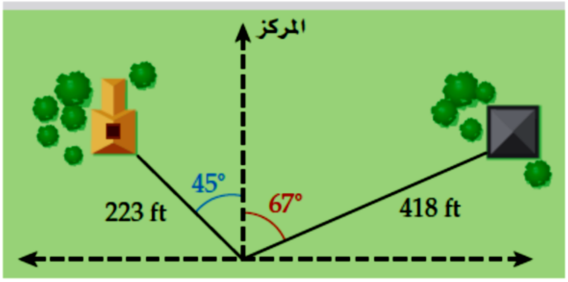
....

....

....

22

مسّاحون: أراد مسَّاح تحديد حدود قطعة أرض، فحدّد أثرًا يبعُد 223 ft ، بزاوية 45° إلى يسار المركز ، وأثرًا آخر على بُعد 418 ft ، بزاوية 67° إلى يمين المركز، كما في الشكل أدناه، أوجد المسافة بين الأثرين.



....

....

....

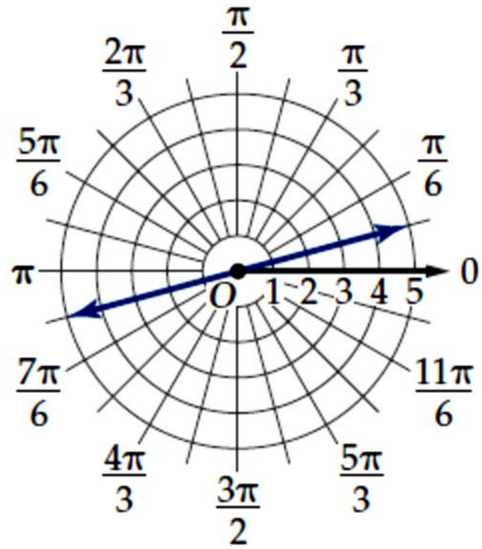
....

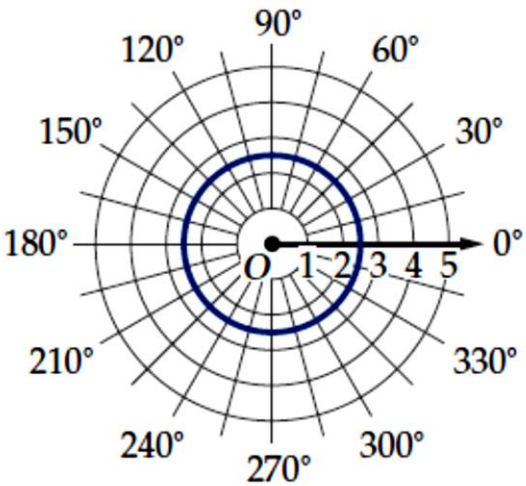
....

....

....

23 اكتب المعادلة لكل تمثيل قطبي مما يأتي:





....

....

أوجد الإحداثي المجهول الذي يحقِّق الشروط المعطاة في كل مما يأتي:

24 $P_1 = (3, 35°)\,,\, P_2 = (r, 75°)\,,\, P_1P_2 = 4.174$

....

....

....

....

....

....

25 $P_1 = (5, 125°)\,,\, P_2 = (2, \theta)\,,\, P_1P_2 = 4\,,\, 0 \le \theta \le 180°$

....

....

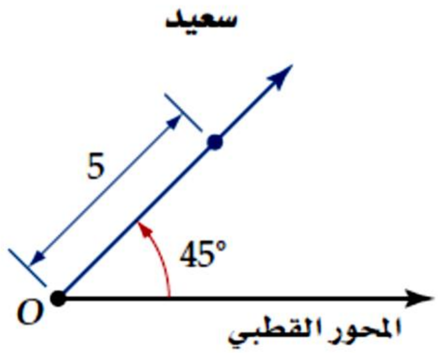
....

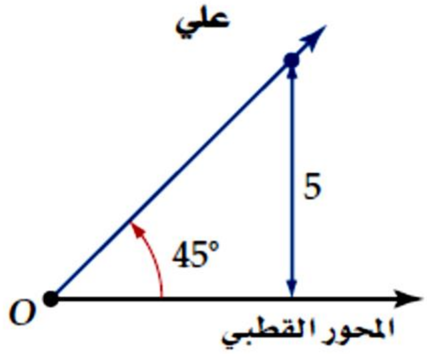
....

....

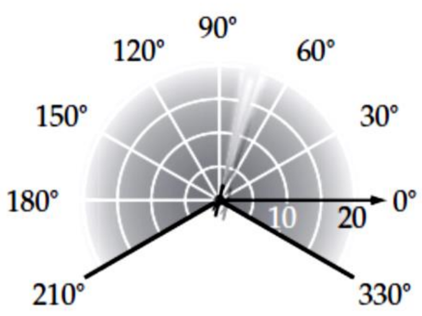
....

26 **اكتشف الخطأ:** قام كل من سعيد وعلي بتمثيل النقطة $(5, 45°)$ في المستوى القطبي كما هو مبيّن أدناه. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ بَرِّر إجابتك.





27 يستطيع رشاش ماء رشّ منطقة على شكل قطاع دائري يمكن تحديدها بالمتباينتين $0 \le r \le 20$ ، $-30° \le \theta \le 210°$ ، حيث r بالأقدام. ما المساحة التقريبية لهذه المنطقة؟



A $821\ ft^2$

B $838\ ft^2$

C $852\ ft^2$

D $866\ ft^2$

28 أيُّ المتجهات الآتية يمثِّل $\overrightarrow{RS}$ ، حيث إن نقطة البداية $R(-5, 3)$ ، ونقطة النهاية $S(2, -7)$؟

A $\langle 7, -10 \rangle$

B $\langle -3, 10 \rangle$

C $\langle -7, 10 \rangle$

D $\langle -3, -10 \rangle$

1 التحويل بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات المتعامدة.

2 التحويل بين المعادلات القطبية والمتعامدة.

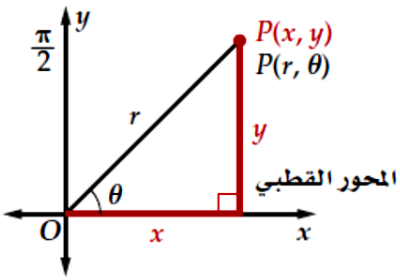
الصور القطبية والمتعامدة للمعادلات

مفهوم أساسي تحويل الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الديكارتية

إذا كان للنقطة P الإحداثيات القطبية (r, θ)، فإن الإحداثيات الديكارتية (x, y) للنقطة P هي:

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$

أي أن $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.



حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية، لكلٍّ نقطة مما يأتي:

1 $P\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$

2 $S\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$

3 $Q(-2, 135°)$

4 $V(3, -120°)$

6 $R(-6, -120°)$

....

....

....

....

....

....

....

5 $T(-3, 45°)$

....

....

....

....

....

....

....

مفهوم أساسي — تحويل الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية

إذا كان للنقطة P الإحداثيات الديكارتية (x, y) ، فإن الإحداثيات القطبية للنقطة P هي (r, θ) حيث:

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، $\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$ ، عندما $x > 0$

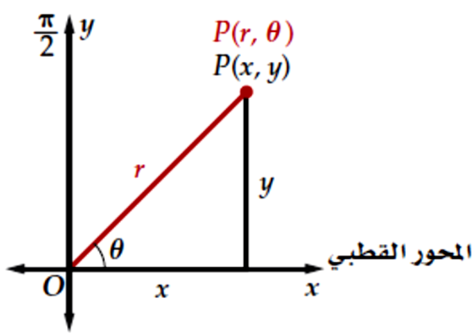
وعندما $x < 0$ فإن:

$\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + \pi$

أو $\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + 180°$.

وعندما $x = 0$ فإن: $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، $r = y$ إذا كانت $y > 0$

أو $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ، $r = y$ إذا كانت $y < 0$



أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيّات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي:

8 $T(-3, 6)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

7 $S(1, -\sqrt{3})$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

9 $V(8\ ,10)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

10 $W(-9\ ,-4)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

لماذا ؟

يبعث مِجَس مُثبت إلى رجلٍ آلي أمواجًا فوق صوتية على شكل دوائر كاملة، وعندما تصطدم الأمواج بجسم، فإنّ المجس يستقبل إشارة، ويقوم بحساب بُعد الجسم عن مقدمة الرجل الآلي بدلالة المسافة المتجهة r ، والزاوية المتجهة θ . ويوصل المجس هذه الإحداثيات القطبية إلى الرَّجل الآلي الّذي يحولها إلى الإحداثيات الديكارتية؛ ليتمكن من تعيينها على خريطة داخلية.

11 **رجل آلي:** بالرجوع إلى فقرة «لماذا؟» ، افترض أن الرَّجل الآلي متجه إلى الشرق، وأن المِجَسَّ قد رَصَدَ جسمًا عند النقطة $(5, 295°)$.

a) ما الإحداثيات الديكارتية التي يحتاج الرجل الآلي إلى حسابها؟

....

....

....

....

....

b) إذا كان موقع جسم رُصد سابقًا عند النقطة التي إحداثياتها $(3, 7)$ ، فما المسافة وقياس الزاوية بين الجسم والرجل الآلي؟

....

....

....

....

12 **صيد الأسماك:** يُستعمل جهاز رصد مثبت في قارب صيد؛ لتحديد موقع وجود الأسماك تحت الماء. افترض أن قاربًا يتجه إلى الشرق، وأن جهاز الرصد قد رصد سربًا من الأسماك عند النقطة $(6, 125°)$.

A) ما الإحداثيات الديكارتية لموقع سرب الأسماك؟

....

....

....

....

....

B) إذا كان موقع سرب الأسماك قد رُصد سابقًا عند النقطة التي إحداثياتها الديكارتية $(-2, 6)$، فما الإحداثيات القطبية لموقع السرب؟

....

....

....

....

....

اكتب كلَّ معادلة مما يأتي على الصورة القطبية:

13 $(x-4)^2 + y^2 = 16$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

14 $y = x^2$

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

15 $x^2 + (y - 3)^2 = 9$

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

16 $x^2 - y^2 = 1$

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

عملية تحويل المعادلة القطبية إلى معادلة ديكارتية ليست مباشرة مثل عملية التحويل من المعادلة الديكارتية إلى المعادلة القطبية، ففي التحويل الثاني تلزمنا جميع العلاقات الآتية:

$r^2 = x^2 + y^2$, $\tan \theta = \frac{y}{x}$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية.

17 $\theta = \frac{\pi}{6}$

....

....

....

....

....

....

....

18 $\theta = \frac{\pi}{3}$

....

....

....

....

....

....

....

19 $r = 7$

....

....

....

....

....

....

....

20 $r = -3$

....

....

....

....

....

....

....

21 $r = -5 \sin \theta$

....

....

....

....

....

....

....

22 $r = 3 \cos \theta$

....

....

....

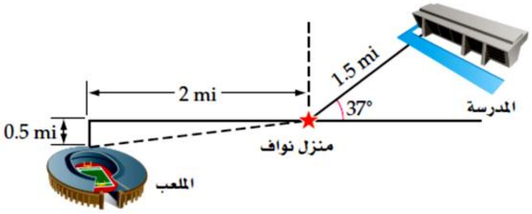
....

....

....

....

23 **مسافات:** إذا كانت مدرسة نواف تبعُد 1.5 mi عن منزله، وتصنع زاوية مقدارها 53° شمال الشرق كما في الشكل أدناه، فأجب عن الفرعين **a** , **b**.



a) إذا سلك نواف طريقًا للشرق ثم للشمال؛ كي يصل إلى المدرسة، فكم ميلًا يتحرك في كل اتجاه؟

....

....

....

....

....

b) إذا كان الملعب على بُعد 2 mi غربًا، و 0.5 mi جنوبًا، ومنزل نواف يمثّل القطب، فما إحداثيات موقع الملعب على الصورة القطبية؟

....

....

....

....

....

24 أيٌّ من النقاط الآتية يعد تمثيلًا آخر للنقطة $\left(-2, \frac{7\pi}{6}\right)$ في المستوى القطبي؟

A $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$

B $\left(-2, \frac{\pi}{6}\right)$

C $\left(2, \frac{-6\pi}{11}\right)$

D $\left(-2, \frac{11\pi}{6}\right)$

25 إذا كان $\mathbf{m} = \langle 5, -4\rangle, \mathbf{n} = \langle -7, 3\rangle$، فأيٌّ مما يأتي يمثّل $\mathbf{k}$، حيث $\mathbf{k} = \mathbf{n} - 2\mathbf{m}$؟

A $\langle -17, 11\rangle$

B $\langle -17, -5\rangle$

C $\langle 17, -11\rangle$

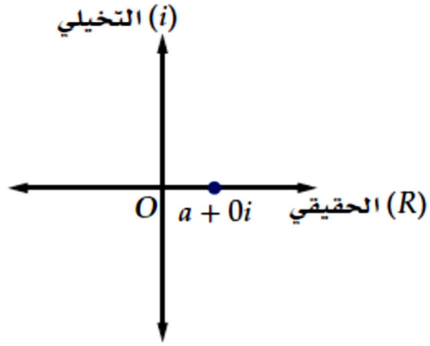
D $\langle -17, 5\rangle$

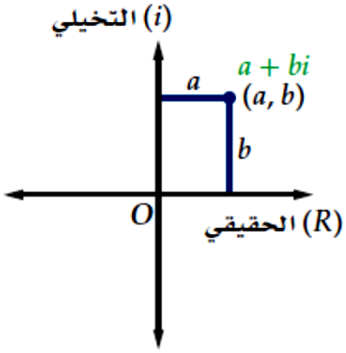
1 تحويل الأعداد المركبة من الصورة المتعامدة إلى الصورة القطبية والعكس.

الأعداد المركبة ونظرية دي موافر

2 إيجاد ناتج ضرب الأعداد المركبة وناتج قسمتها وأسسها وجذورها في الصورة القطبية.

في العدد المركب $a + 0i$ (لاحظ أن $b = 0$). يكون الناتج عددًا حقيقيًّا يمكن تمثيله على خط الأعداد أو على المحور الحقيقي. وعندما $b \neq 0$ ، فإننا سنحتاج إلى المحور التخيلي لتمثيل الجزء التخيلي.

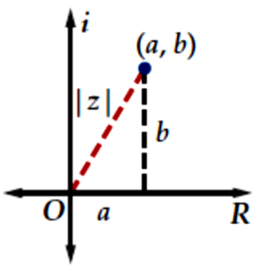




مفهوم أساسي — القيمة المطلقة لعدد مركب

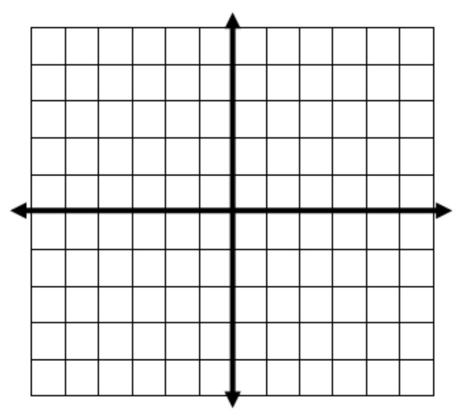
القيمة المطلقة للعدد المركب $z = a + bi$ هي:

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

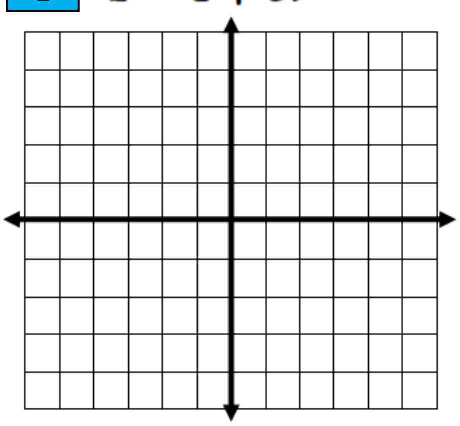


مَثِّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركَّب، وأوجد قيمته المطلقة:

2 $z = -2 - i$

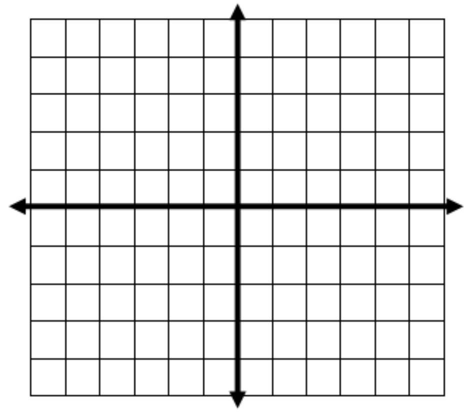


1 $z = 4 + 3i$

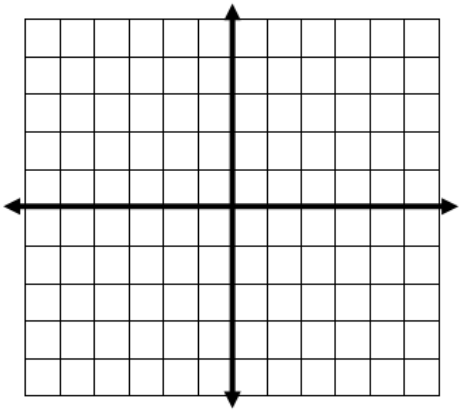


....

4 $5 + 2i$



3 $-3 + 4i$



....

مفهوم أساسي الصورة القطبية لعدد مركب

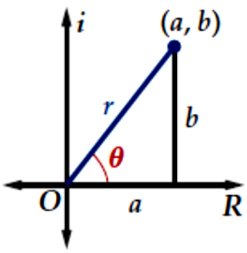
الصورة القطبية أو المثلثية للعدد المركب $z = a + bi$ هي:

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$، حيث

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$، $a = r\cos\theta$، $b = r\sin\theta$،

$\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$ عندما $a > 0$ ، $\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ عندما $a < 0$.

أما إذا كانت $a = 0$ ، فإن $\theta = \frac{\pi}{2}$ إذا كانت $b > 0$ ، $\theta = -\frac{\pi}{2}$ إذا كانت $b < 0$



عبِّر عن كلّ عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

6 $4 + \sqrt{3}i$

....

....

....

....

....

....

....

....

5 $-6 + 8i$

....

....

....

....

....

....

....

....

7 $9+7i$

....

....

....

....

....

....

....

....

8 $-2-2i$

....

....

....

....

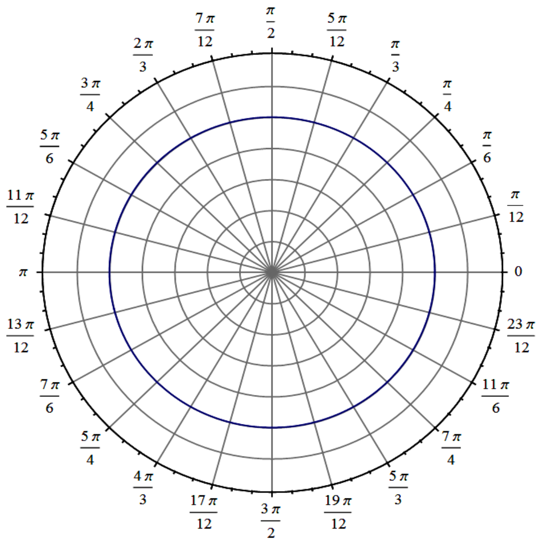
....

....

....

....

9 مثِّل العدد $z=3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ في المستوى القطبي، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية.



....

....

....

....

....

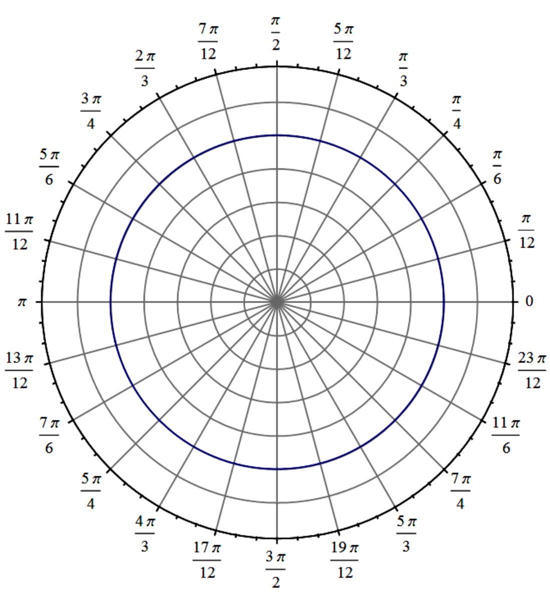
....

....

....

مَثِّل كل عدد مركب مما يأتي في المستوى القطبي، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية:

10 $5\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$



....

....

....

....

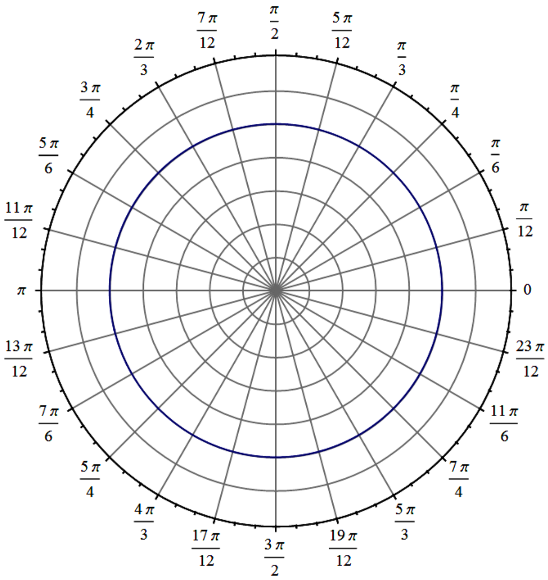
....

....

....

....

11 $4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$



....

....

....

....

....

....

....

....

مفهوم أساسي **ضرب الأعداد المركبة على الصورة القطبية وقسمتها**

للعددين المركبين $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ ، $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ ، فإن:

صيغة الضرب $z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$

صيغة القسمة $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$ ، حيث $z_2 \neq 0$ ، $r_2 \neq 0$

أوجد الناتج على الصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية لكلٍّ مما يأتي:

12 $2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) \cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

13 $3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot 5\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

....
....
....
....
....
....
....
....
....

14 $-6\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

....
....
....
....
....
....
....
....

15

الكهرباء إذا كان الجهد الكهربائي لدائرة كهربائية E يساوي 150 والمعاوقة Z تساوي $6 - 3j$ أوم. فأوجد شدة التيار I بالأمبير في الدائرة الكهربائية في الصورة المتعامدة. استخدم $E = I \cdot Z$.

....
....
....
....
....
....
....
....

16 **كهرباء:** إذا كان فرق جهد دائرة كهربائية $120\,V$، وكانت شدة التيار $(8 + 6j)$ أمبير، فاكتب كلًّا من فرق الجهد وشدة التيار بالصورة القطبية، ثم أوجد المعاوقة واكتبها على الصورة الديكارتية.

....

....

....

....

....

....

....

....

نظرية

نظرية ديموافر

إذا كان $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ عددًا مركبًا على الصورة القطبية، وكان n عددًا صحيحًا موجبًا، فإن:
$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي، وعبّر عنه بالصورة الديكارتية :

17 $(4 + 4\sqrt{3}i)^6$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

18 $(1+\sqrt{3}i)^4$

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

19 $(2\sqrt{3}-2i)^8$

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

مفهوم أساسي الجذور المختلفة

لأي عدد صحيح $n \geq 2$، فإن للعدد المركب $r(\cos\theta + i\sin\theta)$، n من الجذور النونية المختلفة، ويمكن إيجادها باستعمال الصيغة :

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

حيث $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

20 أوجد الجذور الرباعية للعدد المركب $-4 - 4i$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

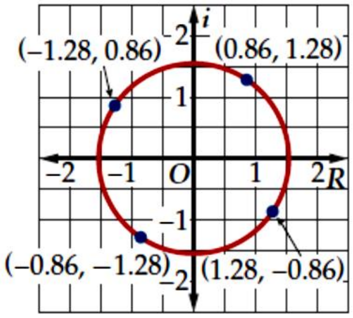
....

21 أوجد الجذور التكعيبية للعدد $2 + 2i$

....

22 أوجد الجذور التكعيبية للعدد 8

....



لاحظ أن الجذور الأربعة التي أوجدناها في المثال 7 تقع على دائرة. فإذا نظرنا إلى الصورة القطبية لكل جذر، نجد أن لكل منها مقياسًا قيمته ($\sqrt[3]{32} \approx 1.54$)، ويمثل نصف قطر الدائرة. كما أن المسافات بين الجذور على الدائرة متساوية، وذلك نتيجة للفرق الثابت بين قيم السعة؛ إذ يساوي $\frac{2\pi}{4}$.

تحدث إحدى الحالات الخاصة عند إيجاد الجذور النونية للعدد 1، فعند كتابة 1 على الصورة القطبية، فإن قيمة r التي نحصل عليها هي $r = 1$. وكما ذكرنا في الفقرة السابقة، فإن مقياس الجذور هو طول نصف قطر الدائرة الناتجة عن تمثيل الجذور في المستوى المركب؛ لذا فإن **الجذور النونية للعدد واحد** تقع على دائرة الوحدة.

23 أوجد الجذور الثُّمانيَّة للعدد واحد.

....

....

....

24 أوجد الجذور التكعيبية للعدد واحد.

....

25 أوجد الجذور السداسية للعدد واحد.