YEAR OF ZAYED
عام زايد

دائرة التعليم والمعرفة
DEPARTMENT OF EDUCATION AND KNOWLEDGE

الفصل الدراسي الثالث
2018-2017

الوحدة التاسعة (المتتاليات والمتسلسلات)

math 2020

الصف الحادي عشر (متقدم)

إعداد
أ / أحمد عطا
أ / سامية شحاتة

اسم الطالب/ ....
مدرسة / ....
شعبة / ....

المتتاليات والمتسلسلات والرمز سيجما

9-1

1 المتتاليات في الرياضيات، **المتتالية** عبارة عن مجموعة من الأعداد المرتبة ترتيبًا معينًا ويُعرف كل عدد في المتتالية باسم **الحد**. تشتمل **المتتالية المنتهية**، مثل 1, 3, 5, 7, 9, 11، على عدد منتهٍ من الحدود. وتشتمل **المتتالية اللانهائية**، مثل ... ,7 ,5 ,3 ,1، على عدد غير منتهٍ من الحدود.

كل حد في المتتالية عبارة عن دالة خاصة بموقعها. ومن ثم، فإن المتتالية اللانهائية هي دالة مجالها مجموعة الأعداد الطبيعية ويمكن كتابتها بالشكل التالي ... $f(1) = a_1, f(2) = a_2, f(3) = a_3, \dots, f(n) = a_n$، حيث تشير a_n إلى الحد النوني. وإذا كان مجال الدالة هو الأعداد الطبيعية n الأولى فقط، فستكون المتتالية منتهية.

ويوجد عدد لا نهائي من المتتاليات التي لها نفس الحدود القليلة الأولى. ولتعريف متتالية بأنها وحيدة بدرجة كافية، يجب وضع صيغة للحد النوني أو يجب تقديم معلومات أخرى. وعند تعريفها بوضوح، تُعطي **الصيغة الصريحة** الحد النوني a_n في صورة دالة n.

1. أوجد الحدود الأربعة التالية للمتتالية ... ,17 ,12 ,7 ,2.

....

2. أوجد الحدود الأربعة التالية في المتتالية ... ,17 ,10 ,5 ,2.

....

3. أوجد الحدود الأربعة الأولى للمتتالية الناتجة عن $a_n = 2n(-1)^n$.

....

4. أوجد الحدود الأربعة الأولى في المتتالية e الناتجة عن $a_n = n^3 - 10$.

....

يمكن أيضًا تعريف المتتالية بالتكرار. تنتج المتتاليات المعرفة بالتكرار حدًا واحدًا أو أكثر من الحدود القليلة الأولى. ثم تُعرف الحدود التالية باستخدام تلك الحدود السابقة. تُسمى الصيغة التي تعرف الحد النوني في المتتالية باسم **الصيغة التكرارية أو الصيغة الضمنية** أو علاقة التكرار.

5. أوجد الحد الخامس في المتتالية المُعرفة بالتكرار $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ و $a_1 = 1$، حيث $n \geq 2$.

....

....

....

....

6. أوجد الحد السادس لكل متتالية حسابية. $a_1 = 8, a_n = 2a_{n-1} - 7, n \geq 2$

....

....

....

....

مثال 3 من الحياة اليومية متتالية فيبوناتشي

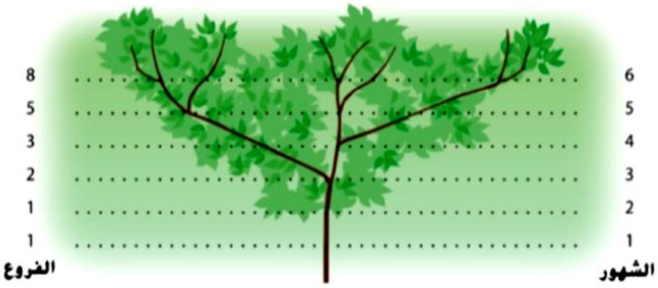
الطبيعة على فرض أنه عندما بدأ النبات في النمو، ينبغي أن ينمو الجذر أولاً لمدة شهرين ليصبح قويًا بما يكفي لحمل الفروع. نبت فرع جديد في نهاية الشهر الثاني وسينبت فرع جديد كل شهر. ثم ينمو كل فرع من الفروع الجديدة لمدة شهرين ثم ينبت فرع جديد مع كل شهر. إذا استمر هذا النمط، فكم فرعًا سيكون في النبات بعد 10 شهور؟

سيكون هناك فرع واحد فقط والجذر خلال الشهرين الأولين. وفي نهاية الشهر الثاني، سينبت فرع جديد من الجذر. وبهذا يكون الإجمالي فرعين في الشهر الثالث. سينمو الفرع الجديد لمدة شهرين قبل أن ينبت منه فرع جديد. ولكن سينبت فرع جديد في كل شهر من الفرع الأصلي.

يبين الجدول التالي النمط.

الشهر	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
الفروع	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1

كل حد هو مجموع الحدّين السابقين. ويمكن كتابة هذا النمط في صورة صيغة تكرارية (ضمنية) $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ و $a_0 = 1, a_1 = 1$، حيث $n \geq 2$.



7 كم فرعًا سيكون في نبات مثل ذلك المذكور في المثال 3 بعد مرور 15 شهرًا إذا لم تتم إزالة أية فروع؟

....

....

....

....

في السابق لقد استكشفت في درس سابق، السلوك الطرفي للتمثيلات البيانية للدوال. وتعلمت أنه عندما يقترب مجال بعض الدوال من ∞، فإن المدى يقترب من عدد وحيد يُسمى النهاية. ومثل الدالة، يمكن أن يكون للمتتالية اللانهائية نهاية. وإذا كان للمتتالية نهاية بحيث تقترب الحدود من عدد وحيد، فستوصف المتتالية بأنها **تقاربية**. وإذا لم تكن كذلك، فستوصف المتتالية بأنها **تباعدية**.

حدد ما إذا كانت كل متتالية مما يلي *تقاربية* أم *تباعدية*.

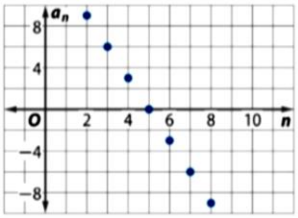
8 $a_n = -3n + 12$

....

....

....

....



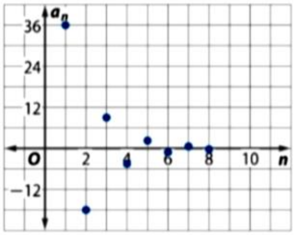
9 $a_1 = 36, a_n = -\frac{1}{2}a_{n-1}, a \geq 2$

....

....

....

....



11 $a_1 = 9, a_n = a_{n-1} + 4$

....

....

....

....

12 $a_n = \frac{(-1)^n \cdot n}{4n+1}$

....

....

....

....

2 المتسلسلة

المتسلسلة هي مجموع جميع حدود المتتالية. وكالمتتالية، يمكن أن تكون المتسلسلة منتهية أو لانهائية. **المتسلسلة المنتهية** هي مجموع جميع حدود المتتالية المنتهية، بينما **المتسلسلة اللانهائية** هي مجموع جميع حدود المتتالية اللانهائية.

	متتالية	متسلسلة
منتهية	1, 3, 5, 7, 9	1 + 3 + 5 + 7 + 9
لانهائية	1, 3, 5, 7, 9, ...	1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ...

يُسمى مجموع الحدود النونية الأولى في المتسلسلة بالمجموع الجزئي **النوني** ويُرمز إليه بـ S_n. ويمكن إيجاد المجموع الجزئي النوني لأي متسلسلة بحساب كل حد وصولاً إلى الحد النوني، ثم إيجاد مجموع تلك الحدود.

13 أوجد المجموع الجزئي الرابع لـ $a_n = (-2)^n + 3$.

....

....

....

....

14 أوجد S_3 لـ $a_n = \frac{4}{10^n}$.

....

....

....

....

15 أوجد المجموع الجزئي السادس لـ $a_n = 0.5(a_{n-1})$ و $a_1 = 8$، حيث $n \geq 2$.

....

....

....

....

المفهوم الأساسي الرمز سيجما

في أي متتالية ...a_1, a_2, a_3, a_4، يرمز لمجموع الحدود k الأولى بـ

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k$$

حيث n هي مؤشر المجموع، و k هي الحد العلوي للمجموع و 1 هو الحد السفلي للمجموع.

قراءة في الرياضيات

الرمز سيجما $\sum_{n=1}^{k} a_n$ يُقرأ المجموع من $n = 1$ إلى k من a إلى n.

أوجد مجموع كل مما يلي.

16 $\sum_{n=1}^{5} (4n-3)$

....

....

....

17 $\sum_{n=3}^{7} \frac{6n-3}{2}$

....

....

....

18 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{10^n}$

....

....

....

19 $\sum_{n=1}^{5} \frac{n^2-1}{2}$

....

....

....

9-2 المتتاليات والمتسلسلات الحسابية

1 المتتاليات الحسابية تُسمّى المتتالية التي يكون فيها الفرق بين أيحدين متتاليين مقدارًا ثابتًا **بالمتتالية الحسابية**. ويُشار إلى المقدار الثابت بمصطلح **الفرق المشترك**، والذي يُرمز إليه بالرمز d. ولإيجاد الفرق المشترك لمتتالية حسابية، اطرح أي حد من الحد التالي له. ولإيجاد الحد التالي في المتتالية، اجمع الفرق المشترك مع الحد المعطى.

1 حدّد الفرق المشترك، وأوجد الحدود الأربعة التالية في المتتالية الحسابية ... ,7 ,12 ,17 .

....

....

....

....

2 حدّد الفرق المشترك، وأوجد الحدود الأربعة التالية في كل متتالية حسابية.

....

....

....

....

3 $244, 187, 130, \ldots$

....

....

....

....

نصيحة دراسية

الصيغ الصريحة إذا أُعطي حد غير a_1، فستحتاج الصيغة الصريحة لإيجاد الحد النوني للمتتالية إلى التعديل. ويمكن تنفيذ ذلك من خلال طرح عدد الحد المُعطى من n. فعلى سبيل المثال، إذا أُعطي الحد a_5، فستصبح المعادلة $a_n = a_5 + (n-5)d$. أو إذا أُعطي الحد a_0، فستكون الصيغة $a_n = a_0 + nd$.

المفهوم الأساسي الحد النوني لمتتالية حسابية

الشرح الحد النوني للمتتالية الحسابية التي يكون الحد الأول بها a_1، والفرق المشترك d تحدّده الصيغة $a_n = a_1 + (n-1)d$.

مثال الحد السادس عشر في المتتالية ... ,8 ,5 ,2 هو $a_{16} = 2 + (16-1)\cdot 3$ أو 47.

4 أوجد كلاً من الصيغة الصريحة والصيغة التكرارية (الضمنية) لإيجاد الحد النوني للمتتالية الحسابية .. ,30 ,21 ,12

....

....

....

....

5 أوجد كلاً من الصيغة الصريحة والصيغة التكرارية (الضمنية) لإيجاد الحد النوني للمتتالية الحسابية ... ,11 ,23 ,35.

....

....

....

....

6 أوجد الحد الثامن والستين في المتتالية الحسابية ... ,9 ,17 ,25 .

....

....

....

....

7 أوجد الحد الأول في متتالية حسابية فيها $a_{25} = 139$ و $d = \frac{3}{4}$.

....

....

....

....

8 أوجد الحد الثامن والثلاثين في المتتالية الحسابية ... ,25 ,2− ,29−.

....

....

....

....

إذا كان هناك حدّان غير متتاليين معروفان في متتالية حسابية، يمكن حساب الحدود الموجودة بينهما. وتُسمّى هذه الحدود **بالأوساط الحسابية**. في المتتالية الموضّحة أدناه، الأعداد 17 و 27 و 37 هي الأوساط الحسابية بين العددين 7 و 47.

$-3, 7, 17, 27, 37, 47, 57$

9 اكتب متتالية حسابية بها أربعة أوساط حسابية بين 4.3 و 12.8.

....

....

....

....

....

....

10 اكتب متتالية بها ستة أوساط حسابية بين 12.4 و -24.7.

11 أوجد نموذجًا تربيعيًا للمتتالية ... ,72 ,56 ,42 ,30 ,20 ,12.

12 أوجد نموذجًا تربيعيًا للمتتالية ... ,36 ,22 ,10 ,0 ,-8 ,-14.

2 المتسلسلات الحسابية

المتسلسلة الحسابية هي المجموع المبيّن لحدود متتالية حسابية.

متسلسلة حسابية	متتالية حسابية
$-6 + (-3) + 0 + 3 + 6$	$-6, -3, 0, 3, 6$
$4.25 + 4 + 3.75 + 3.5 + 3.25$	$4.25, 4, 3.75, 3.5, 3.25$
$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$	$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$

المفهوم الأساسي مجموع متسلسلة حسابية منتهية

يمكن إيجاد مجموع متسلسلة حسابية منتهية عدد حدودها n أو المجموع الجزئي *النوني* لمتسلسلة حسابية باستخدام واحدة من الصيغتين المتصلتين.

الصيغة 1 $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

الصيغة 2 $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$

أوجد المجموع المحدّد لكل متسلسلة حسابية.

13 $-5 + 2 + 9 + \cdots + 317$

....

....

....

....

14 المجموع الجزئي الثامن والعشرون للمتسلسلة $27 + 14 + 1 + \cdots$

....

....

....

....

15 $\sum_{n=6}^{28} (5n - 17)$

....

....

....

....

17 $211 + 193 + 175 + \cdots + (-455)$

16 $\sum_{n=23}^{37} (2n + 3)$

....

....

....

....

....

....

....

18 **ألعاب الفيديو** إحدى بطولات ألعاب الفيديو- التي يتنافس فيها اللاعبون في ألعاب متعدّدة ويجمعون عددًا إجماليًا من النقاط- تدفع مبلغًا ماليًا لأعلى 20 فائزًا ينهي البطولة. يحصل المركز الأول على AED 5000، ويحصل المركز الثاني على AED 4800، ويحصل المركز الثالث على AED 4600، وهكذا. فكم يبلغ إجمالي الجائزة المالية الممنوحة؟

....

....

....

....

....

19 **ألعاب الفيديو** تلعب هدى لعبة فيديو، وستسجّل 50 نقطة إذا اجتازت المرحلة الأولى. وعلى كل مرحلة من المراحل التالية ستحصل على نقاط تزيد عن المرحلة التي تسبقها بـــ 50 نقطة. إذًا، ستسجّل 100 نقطة لاجتياز المرحلة الثانية، و 150 نقطة لاجتياز المرحلة الثالثة، وهكذا. فما العدد الإجمالي للنقاط التي ستسجّلها هدى بعد اجتيازها للمرحلة التاسعة؟

....

....

....

....

....

20 **البيسبول** **يجمع أيوب بطاقات البيسبول منذ أعطاه والده مجموعة بها 20 بطاقة. وأثناء كل شهر، يعطيه والده عددًا من البطاقات يزيد عن الشهر السابق بـــ 5 بطاقات. فكم شهرًا يحتاجه أيوب ليصل إلى 1000 بطاقة؟**

....

....

....

....

....

21 **ألعاب الفيديو** تلعب هدى لعبة فيديو، وستسجّل 50 نقطة إذا اجتازت المرحلة الأولى. وعلى كل مرحلة من المراحل التالية ستحصل على نقاط تزيد عن المرحلة التي تسبقها بـــ 50 نقطة. إذًا، ستسجّل 100 نقطة لاجتياز المرحلة الثانية، و 150 نقطة لاجتياز المرحلة الثالثة، وهكذا. فما العدد الإجمالي للنقاط التي ستسجّلها هدى بعد اجتيازها للمرحلة التاسعة؟

....

....

....

....

....

المتتاليات والمتسلسلات الهندسية

9-3

1 المتتاليات الهندسية تُسمّى المتتالية التي تكون فيها النسبة بين أي حدوين متتاليين فيها مقدارًا ثابتًا **بالمتتالية الهندسية**. ويُشار إلى النسبة الثابتة بمصطلح **النسبة المشتركة**، والتي يُرمز إليها بالرمز r. ولإيجاد النسبة المشتركة لمتتالية هندسية، اقسم أي حد تالٍ للحد الأول على الحد السابق له. وإذا أُعطيت حدًا في المتتالية، تستطيع إيجاد الحد التالي بضرب الحد المعطى في النسبة المشتركة. وفي حين أن معدل التغير في المتتالية الحسابية يكون ثابتًا، يمكن لمعدل التغير في المتتالية الهندسية إما أن يزيد أو ينقص.

حدّد النسبة المشتركة، وأوجد الحدود الثلاثة التالية في كل متتالية هندسية.

1 $8, -2, \frac{1}{2}, \ldots$

....

....

....

2 $w + 3,\ 2w + 6,\ 4w + 12, \ldots$

....

....

....

....

3 $4, 11, 30.25, \ldots$

....

....

....

....

المفهوم الأساسي الحد النوني لمتتالية هندسية

الشرح الحد *النوني* لمتتالية هندسية الحد الأول بها هو a_1 والنسبة المشتركة هي r تحدده الصيغة $a_n = a_1 r^{n-1}$.

مثال الحد التاسع في المتتالية ... ,2, 10, 50 هو $a_9 = 2 \cdot 5^{9-1}$ أو 781,250.

4 **اكتب صيغة صريحة وصيغة ضمنية لإيجاد الحد *النوني* للمتتالية الهندسية المعطاة في المثال 1a.**

....

....

5 اكتب صيغة صريحة وصيغة ضمنية لإيجاد الحد النوني في المتتالية ... ,2, 25, 312.5 .

....

....

....

....

6 أوجد الحد السابع والعشرين في المتتالية الهندسية ... ,189, 151.2, 120.96 .

....

....

....

....

أوجد الحد المذكور لكل متتالية هندسية، أو للمتتالية ذات الخصائص المعطاة.

7 a_9 من أجل $4, 14, 49, \ldots$

....

....

....

....

8 a_{12} إذا كان $a_3 = 32$ و $r = -4$

....

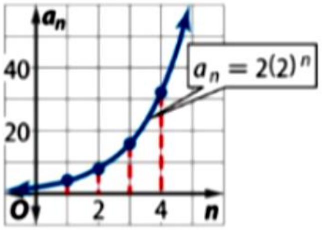
....

....

....

كما أن المتتاليات الحسابية دوال خطية مجالاتها مقيدة. فإن المتتاليات الهندسية دوال أيضًا. أمعن النظر في الدالة الأسية $f(x) = 2(2)^x$ والصيغة الصريحة للمتتالية الهندسية $a_n = 2(2)^n$.

لاحظ أن التمثيلات البيانية لحدود المتتالية الهندسية تقع على منحنى. كما هو موضّح. ويمكن تمثيل المتتالية الهندسية بدالة أسيّة مجالها مقيد بالأعداد الطبيعية.



9 **السيارات** اشترى منصور سيارة حديثة الطراز بمبلغ AED 15,000. وفي نهاية كل عام، تنخفض قيمتها بمعدل 11%.

a. اكتب صيغة صريحة لقيمة سيارة منصور بعد n من الأعوام.

....

....

....

....

b. ما قيمة سيارة منصور في نهاية العام السابع؟

....

....

....

....

10 **الزوارق** اشترى محمود زورقًا شخصيًا بمبلغ AED 9000. افترض أنه بحلول نهاية كل عام، تنخفض قيمة الزورق بمعدل 30%.

A. اكتب صيغة صريحة لإيجاد قيمة زورق محمود بعد n من الأعوام.

....

....

....

....

B. ما قيمة زورق محمود بعد 5 أعوام؟

....

....

....

....

على غرار المتتاليات الحسابية، إذا كان هناك حدّان غير متتاليين معروفان في متتالية هندسية، يمكن حساب الحدود الموجودة بينهما. وتُسمّى هذه الحدود **بالأوساط الهندسية**.

11 **اكتب متتالية بها وسطان هندسيان بين 480 و -7.5.**

....

....

....

....

....

نصيحة دراسية
الأوساط الهندسية أحيانًا، يكون من الممكن وجود أكثر من مجموعة واحدة من الأوساط الهندسية. على سبيل المثال، الأوساط الهندسية الثلاثة بين 3 و 48 يمكن أن تكون 6 و 12 و 24 أو -6 و 12 و -24.

12 أوجد الأوساط الهندسية المحددة لكل زوجٍ من الحدود غير المتعاقبة.

....

....

....

....

....

13 -4 و 13.5؛ وسيطان

....

....

....

....

....

14 10 و 3 ;0.016 أوساط

....

....

....

....

....

2 المتسلسلات الهندسية

إن **المتسلسلة الهندسية** هي مجموع حدود المتتالية الهندسية.

متتالية هندسية	متسلسلة هندسية
$2, 4, 8, 16, 32$	$2 + 4 + 8 + 16 + 32$
$27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}$	$27 + 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3}$
$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$	$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$

المفهوم الأساسي مجموع متسلسلة هندسية منتهية

يمكن إيجاد مجموع متسلسلة هندسية منتهية بها حدود n أو المجموع الجزئي النوني لمتسلسلة هندسية باستخدام واحدة من صيغتين متصلتين.

الصيغة 1 $S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$

الصيغة 2 $S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r}$

15 أوجد مجموع الحدود الستة الأولى في المتسلسلة الهندسية ... + $8 + 14 + 24.5 +$.

....

....

....

....

16 أوجد مجموع الحدود n الأولى في متسلسلة هندسية بها $a_1 = 3$، و $a_n = 768$، و $r = -2$.

....

....

....

....

17 أوجد مجموع أول 11 حدًا في المتسلسلة الهندسية ... + $7 + (-24.5) + 85.75 +$.

....

....

....

....

18 أوجد مجموع الحدود n الأولى في متسلسلة هندسية بها $a_1 = -8$، و $a_n = 131{,}072$، و $r = -4$.

....

....

....

....

19 أوجد $\sum_{n=2}^{7} 3(5)^{n-1}$.

....

....

....

....

20 $\sum_{n=16}^{31} 0.5(2)^{n-1}$

....

....

....

....

المفهوم الأساسي مجموع متسلسلة هندسية لانهائية

يُمكن إيجاد المجموع S لمتسلسلة هندسية لانهائية بها $|r| < 1$ باستخدام

$$S = \frac{a_1}{1 - r}$$

إذا كان ذلك ممكنًا، فأوجد مجموع كل متسلسلة لانهائية.

21 $9 + 3 + 1 + \ldots$

22 $0.25 + (-1.25) + 6.25 + \ldots$

23 $\sum_{n=4}^{\infty} 4(0.2)^{n-1}$

24 $10 + (-5) + 2.5 + \ldots$

25 $20 + 15 + 10 + \ldots$

26 $\sum_{n=1}^{\infty} 120(0.8)^{n-1}$

اكتب كل متسلسلة هندسية بالرمز سيجما.

27 $3 + 12 + 48 + \cdots + 3072$

28 $\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \cdots + 8$

حدّد ما إذا كانت كل متتالية مما يلي *حسابية*، أم *هندسية*، أم *غير ذلك*، ثم أوجد الحدود الثلاثة التالية في المتتالية.

29 $\frac{9}{2}, \frac{17}{4}, 4, \frac{15}{4}, \ldots$

30 $2\sqrt{3}, 2\sqrt{6}, 2\sqrt{9}, 2\sqrt{12}, \ldots$

الاستقراء الرياضي

9-4

1 الاستقراء الرياضي عند البحث عن الأنماط وإيجاد التخمينات، يغلب علينا افتراض أنه إذا كان التخمين صحيحًا في عدة حالات، فإنه سيكون صحيحًا لجميع الحالات. في الحالة المذكورة أعلاه، قد يقتنع فارس أن افتراضه صحيح بمجرد أن يثبت بأنه ينطبق على $n = 5$ لأن توصيل 5 نقاط يشكّل بالفعل 16 أو 2^4 منطقة. لكن "البرهان بالمثال" ليس طريقة صحيحة منطقيًا، لأنه لم يبين أن الافتراض صحيح مع جميع الحالات. ويمكنك في الحقيقة أن ترى أن تخمين فارس يفشل عندما تكون $n = 6$.

في حين أن المثال المضاد هو كل ما يلزمك لبرهنة خطأ التخمينات الرياضية، إلا أن برهنة صحة التخمين تتطلب طريقة أكثر تنظيمًا. وتستخدم إحدى تلك الطرق **مبدأ الاستقراء الرياضي**. تكمن الفكرة الأساسية من مبدأ الاستقراء الرياضي في أنه يمكن إثبات صحة التخمين إذا كان بإمكانك فعل ما يلي:

1. توضيح أن هناك شيئًا ينطبق على الحالة الأولى (الأساس أو **خطوة المرتكز**).
2. افتراض أن الطريقة تنطبق على أي حالة معينة (**فرضية الاستقراء**).
3. توضيح أن الطريقة تنطبق على الحالة التالية (**خطوة استقرائية**).

هذا المبدأ – الموضح بطريقة أكثر منهجية أدناه – أداة قوية في إثبات العديد من التخمينات عن الأعداد الصحيحة الموجبة.

المفهوم الأساسي مبدأ الاستقراء الرياضي

إذا كانت P_n تمثل عبارة عن عدد صحيح n، فإن P_n صحيح لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n إذا كان، وفقط إذا كان.

- P_1 صحيح، و
- لكل عدد صحيح موجب k، إذا كان P_k صحيحًا، فإن P_{k+1} صحيح.

برهنة صيغة الجمع

1 **استخدم الاستقراء الرياضي لبرهنة أن مجموع الأعداد الصحيحة الموجبة الزوجية الأولى n يساوي $n^2 + n$. وبهذا، فإن برهنة أن $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n^2 + n$ صحيحة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.**

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2 استخدم الاستقراء الرياضي لإثبات أن مجموع الأعداد الصحيحة الموجبة الزوجية الأولى n يساوي n^2.
أي أثبت أن $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ صحيحة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

برهنة قابلية القسمة

3 برهن أن $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2 لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

4 برهن أن $4^n - 1$ تقبل القسمة على 3 لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

....
....
....
....
....

....
....
....
....
....

برهنة عبارات التباين

5 برهن أن $n < 2^n$ لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

....
....
....
....
....
....
....
....
....

6 برهن أن $2n < 3^n$ لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

....
....
....
....
....
....
....
....
....

2 الاستقراء الرياضي الممتد سيطلب منك أحيانًا إثبات عبارة صحيحة لقيمة عشوائية أكبر من 1. يمكنك في هذه المواقف استخدام شكل مختلف من أشكال مبدأ الاستقراء الرياضي يُسمى **المبدأ الممتد للاستقراء الرياضي**. وبدلاً من التحقق من أن P_n صحيحة عندما $n = 1$. يمكنك بدلاً من ذلك التحقق من أن P_n صحيحة عند الحالة الممكنة الأولى.

استخدام المبدأ الممتد للاستقراء الرياضي

7 برهن أن $n! > 2^n$ لقيم الأعداد الصحيحة $n \geq 4$.

....
....
....
....
....
....
....
....

8 برهن أن $n! > 3^n$ لقيم الأعداد الصحيحة $n \geq 7$.

....
....
....
....

....
....
....
....

9 **الأموال** برهن أن جميع مضاعفات AED 10 الأكبر من AED 40 يمكن تكوينها باستخدام العملات الورقية فئة AED 20 و AED 50.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

10 **الترفيه** برهن أن جميع الألعاب في المعرض التي تتطلب أكثر من 7 تذاكر يمكن دفعها باستخدام قسائم بثلاث تذاكر وقسائم بخمس تذاكر المقدمة من المدرسة من أجل التبرعات بالمأكولات المعلبة.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

10

نظرية ذات الحدّين

9-5

1 مثلث باسكال

تذكر أن ذا الحدّين هو تعبير جبري يتضمن مجموع حدّين غير متشابهين. يتم إنتاج متسلسلة هامة من خلال تفكيك ذي حدّين تم رفعه لقوة أسية من عدد صحيح. افحص هذه السلسلة الناتجة عن تفكيك $(a+b)^n$ للعديد من القيم الصحيحة غير السالبة لـ n.

$$(a+b)^0 = 1a^0b^0$$
$$(a+b)^1 = 1a^1b^0 + 1a^0b^1$$
$$(a+b)^2 = 1a^2b^0 + 2a^1b^1 + 1a^0b^2$$
$$(a+b)^3 = 1a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1a^0b^3$$
$$(a+b)^4 = 1a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1a^0b^4$$
$$(a+b)^5 = 1a^5b^0 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + 1a^0b^5$$

لاحظ الأنماط التالية في تفكيكات $(a+b)^n$ أعلاه.

- في كل تفكيك $n+1$ حد.
- الحد الأول هو a^n، والحد الأخير هو b^n.
- في الحدود المتتابعة، يتناقص أس a بمقدار 1، ويتزايد أس b بمقدار 1.
- مجموع الأسين في كل حد هو n.
- المعاملات – الموضحة أعلاه باللون الأحمر– تتزايد ثم تتناقص وفق نمط متماثل.

إذا استُخرجت معاملات عمليات التفكيك هذه – والتي تعرف باسم **معاملات ذات الحدّين**، وتم ترتيبها وفق مصفوفة مثلثية الشكل، فستُشكّل نموذجًا يدعى **مثلث باسكال**، والذي سمي هكذا على اسم عالم الرياضيات الفرنسي بليز باسكال. يطلق على الصف العلوي في هذا المثلث اسم الصف الصفري لأنه يتوافق مع تفكيك ذي الحدّين لـ $(a+b)^0$.

الصف الصفري								1						
الصف الأول							1		1					
الصف الثاني						1		2		1				
الصف الثالث					1		3		3		1			
				1		4		6		4		1		
			1		5		10		10		5		1	
		1		6		15		20		15		6		1

لاحظ أن الأعداد الأولى والأخيرة في كل صف هي 1. ويتشكل كل عدد آخر عن طريق إضافة العددين الموجودين مباشرة فوق هذا العدد في الصف السابق. يمكن تمديد مثلث باسكال إلى ما لا نهاية باستخدام العلاقة التكرارية (الضمنية) لدرجة أنه يمكن استخدام المعامل في الصف ذو الترتيب $(n-1)$ لتحديد المعامل في الصف ذي الترتيب n.

استخدم مثلث باسكال لتفكيك كل ذي حدين مما يلي.

1 $(a+b)^7$

....

....

....

....

....

....

2 $(3x+2)^4$

....

....

....

....

....

....

3 $(2x+3y)^5$

....

....

....

....

....

....

4 استخدم مثلث باسكال لتفكيك $(x-4y)^5$.

....

....

....

....

....

....

5 $(2x-7)^3$

....

....

....

....

....

....

6 $(2x-3y)^4$

....

....

....

....

....

....

المفهوم الأساسي صيغة معاملات ذات الحدّين $(a+b)^n$

الشرح معامل ذات الحدّين للحد $a^{n-r}b^r$ في تفكيك $(a+b)^n$ محدد بالعلاقة ${}_nC_r=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$

مثال

$$(a+b)^3={}_3C_0a^3b^0+{}_3C_1a^2b^1+{}_3C_2a^1b^2+{}_3C_3a^0b^3$$

$$=\frac{3!}{(3-0)!\,0!}a^3+\frac{3!}{(3-1)!\,1!}a^2b+\frac{3!}{(3-2)!\,2!}ab^2+\frac{3!}{(3-3)!\,3!}b^3$$

$$=1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3$$

7 أوجد معامل الحد الخامس في تفكيك $(a+b)^7$.

....

....

....

....

8 الحد السادس, $(x+y)^9$

....

....

....

....

9 الحد الثالث, $(a-b)^{13}$

....

....

....

....

10 أوجد معامل الحد x^7y^2 في تفكيك $(4x-3y)^9$.

....

....

....

....

....

....

11 أوجد معامل الحد المشار إليه في كل تفكيك ذات حدّين. الحد $(2x-3y)^8, x^3y^5$

....

....

....

....

....

....

12 **كرة القاعدة** احتمال تصدي عيسى لضربة في حالة استقبال الضربات هو $\frac{1}{5}$. فما احتمال تصدي عيسى لـ 4 ضربات بالضبط خلال استقبال الـ 10 ضربات التالية؟

....

....

....

....

....

....

13 **إلقاء قطع النقد المعدنية** تم رمي قطعة نقد معدنية سليمة ومتوازنة 8 مرات. أوجد احتمال كل ناتج.

A. 3 صور بالضبط **B.** 6 أوجه كتابة بالضبط

....

....

....

....

....

....

....

....

المفهوم الأساسي نظرية ذات الحدّين

لأي عدد صحيح موجب n، تفكيك $(a + b)^n$ يُعطى بالعلاقة

$$(a+b)^n = {}_nC_0\, a^n b^0 + {}_nC_1\, a^{n-1} b^1 + {}_nC_2\, a^{n-2} b^2 + \cdots + {}_nC_r\, a^{n-r} b^r + \cdots + {}_nC_n\, a^0 b^n,$$

حيث $r = 0, 1, 2, \ldots, n$.

استخدم نظرية ذات الحدين لتفكيك كل ذات حدّين مما يلي.

14 $(3x - y)^4$

....

....

....

....

....

15 $(5m + 4)^3$

....

....

....

....

....

16 $(2p + q^2)^5$

....

17 $(8x^2 - 2y)^6$

....

لأن تفكيك ذات الحدّين هو مجموع، كثيرًا ما تتم كتابة نظرية ذات الحدّين باستخدام الرمز سيجما. بالإضافة إلى ذلك، الرمز ${}_nC_r$ يُستبدل عادة بـ $\binom{n}{r}$.

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

18 مثّل تفكيك $(5x - 7y)^{20}$ باستخدام الرمز سيجما.

....

19 مثّل تفكيك $(3a + 12b)^{30}$ باستخدام الرمز سيجما.

....

9-6 الدوال في صورة متسلسلة لانهائية

المفهوم الأساسي متسلسلة القوة

في المتسلسلة اللانهائية التي في الصورة

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots ,$$

يمكن أن نساوي x و a_n أي قيم نظرًا لأن $n = 0, 1, 2, \ldots$، وتُسمى متسلسلة قوة في x.

1 استخدم $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ لإيجاد تمثيل متسلسلة القوة $g(x) = \frac{1}{3-x}$. ووضح فترة تقارب المتسلسلة. واستخدم حاسبة التمثيل البياني للتمثيل البياني لـ $g(x)$ والمجموع الجزئي السادس من متسلسلة القوة.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2

استخدم $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ لإيجاد تمثيل متسلسلة القوة لـ $g(x)$. ووضح فترة تقارب المتسلسلة. واستخدم حاسبة التمثيل البياني للتمثيل البياني لـ $g(x)$ والمجموع الجزئي السادس من متسلسلة القوة.

$$g(x) = \frac{1}{1-2x}$$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

الدوال المتسامية في صورة متسلسلة قوة

المفهوم الأساسي المتسلسلة الأسيّة

متسلسلة القوة الأسيّة التي تمثل e^x تُسمى المتسلسلة الأسيّة وهي مقدمة بالعلاقة

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots,$$

وهي متقاربة لجميع x.

3 استخدم المجموع الجزئي الخامس للمتسلسلة الأسيّة لتقريب قيمة $e^{1.5}$.
قرب إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

....

....

....

استخدم المجموع الجزئي الخامس للمتسلسلة الأسيّة لتقريب كل قيمة إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

4 $e^{-0.75}$ $e^{0.25}$

....

....

....

....

....

....

يكون للدوال المتسامية الأخرى تمثيلات المتسلسلات الأسيّة أيضًا. وتستخدم الحاسبات وأجهزة الكمبيوتر **المتسلسلات الأسيّة** لتقريب قيم دوال cosine و sine.

المفهوم الأساسي متسلسلة القوة لكل من Cosine و Sine

يمكن الحصول على تمثيلات المتسلسلات الأسيّة لكل من $\cos x$ و $\sin x$ من خلال

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots,$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots,$$

وهي مقاربة لجميع x.

6 استخدم المجموع الجزئي الخامس لمتسلسلة القوة لـ cosine لتقريب قيمة $\cos\frac{\pi}{7}$
قرّب إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

....

....

....

....

....

....

7 استخدم المجموع الجزئي الخامس لمتسلسلة القوة لـ sine لتقريب قيمة $\sin\frac{\pi}{5}$ إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

....

....

....

....

....

....

استخدم المجموع الجزئي الخامس لمتسلسلة القوة لـ cosine أو sine لتقريب كل قيمة. قرّب إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

8 $\sin\frac{\pi}{11}$

....

....

....

....

....

....

9 $\cos\frac{2\pi}{17}$

....

....

....

....

....

....

المفهوم الأساسي صيغة أويلر

لأي عدد حقيقي θ، $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

المفهوم الأساسي الصورة الأسيّة لعدد مركب

الصورة الأسيّة لعدد مركب $a + bi$ مقدمة بالعلاقة

$$a + bi = re^{i\theta},$$

حيث $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ و $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$ إذا كان $a > 0$ و $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ إذا كان $a < 0$.

10 اكتب $-\sqrt{3} + i$ في الصورة الأسيّة.

....

....

....

....

....

اكتب كل عدد مركب بالصورة الأسّية.

11 $1 + \sqrt{3}i$

....

....

....

....

....

12 $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

....

....

....

....

....

من دراستك للوغاريتمات، تعلم أنه لا يمكن لعدد حقيقي أن يكون لوغاريتم عدد سالب. ويمكن استخدام صيغة أويلر لتوضيح أن اللوغاريتم الطبيعي لعدد سالب لا يتواجد في نظام العدد المركب.

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$	صيغة أويلر
$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi$	افترض أن $\theta = \pi$.
$e^{i\pi} = -1 + i(0)$	$\sin\pi = 0$ و $\cos\pi = -1$
$e^{i\pi} = -1$	بسّط.
$\ln e^{i\pi} = \ln(-1)$	احسب اللوغاريتم الطبيعي لكل طرف.
$i\pi = \ln(-1)$	خاصية القوى للوغاريتمات

تشير هذه النتيجة إلى أن اللوغاريتم الطبيعي لـ -1 موجود وهو العدد المركب $i\pi$. ويمكنك استخدام هذه النتيجة لإيجاد اللوغاريتم الطبيعي لأي عدد سالب $-k$. حيث $k > 0$.

$\ln(-k) = \ln[(-1)k]$	$-k = (-1)k$
$= \ln(-1) + \ln k$	خاصية ناتج الضرب للوغاريتمات
$= i\pi + \ln k$	$\ln(-1) = i\pi$
$= \ln k + i\pi$	اكتب بالصورة $a + bi$.

13 أوجد قيمة (-5) في نظام الأعداد المركبة.

....

....

أوجد قيمة كل لوغاريتم طبيعي في نظام الأعداد المركبة.

14 $\ln(-8)$

....

....

15 $\ln(-6.24)$

....

....

حل لإيجاد قيمة z عبر الأعداد المركبة. قرّب إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

16 $2e^{z} + 5 = 0$

....

....