كل ما يحتاجه الطالب في جميع الصفوف من أوراق عمل واختبارات ومذكرات، يجده هنا في الروابط التالية لأفضل مواقع تعليمي إماراتي 100 %

تطبيق المناهج الإماراتية | الاجتماعيات | الرياضيات

الصفحة الرسمية على التلغرام | الاسلامية | العلوم

الصفحة الرسمية على الفيسبوك | الانجليزية

التربية الاخلاقية لجميع الصفوف | اللغة العربية

التربية الرياضية

مجموعات التلغرام.	مجموعات الفيسبوك	قنوات تلغرام	قنوات الفيسبوك
الصف الأول	الصف الأول	الصف الأول	الصف الأول
الصف الثاني	الصف الثاني	الصف الثاني	الصف الثاني
الصف الثالث	الصف الثالث	الصف الثالث	الصف الثالث
الصف الرابع	الصف الرابع	الصف الرابع	الصف الرابع
الصف الخامس	الصف الخامس	الصف الخامس	الصف الخامس
الصف السادس	الصف السادس	الصف السادس	الصف السادس
الصف السابع	الصف السابع	الصف السابع	الصف السابع
الصف الثامن	الصف الثامن	الصف الثامن	الصف الثامن
الصف التاسع عام	الصف التاسع عام	الصف التاسع عام	الصف التاسع عام
الصف التاسع متقدم	الصف التاسع متقدم	الصف التاسع متقدم	تاسع متقدم
الصف العاشر عام	الصف العاشر عام	الصف العاشر عام	عاشر عام
الصف العاشر متقدم	الصف العاشر متقدم	الصف العاشر متقدم	عاشر متقدم
الحادي عشر عام	الحادي عشر عام	الحادي عشر عام	حادي عشر عام
الحادي عشر متقدم	الحادي عشر متقدم	الحادي عشر متقدم	حادي عشر متقدم
ثاني عشر عام	الثاني عشر عام	الثاني عشر عام	الثاني عشر عام
ثاني عشر متقدم	الثاني عشر متقدم	ثاني عشر متقدم	ثاني عشر متقدم

الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربية والتعليم

عام التسامح

نسخة المعلم

2018 - 2019

10

McGraw-Hill Education

الرياضيات

المسار المتقدّم

نسخة الإمارات العربية المتحدة

www.almanahj.com

Mc Graw Hill Education

نسخة المعلم

McGraw-Hill Education

الرياضيات

المسار المتقدّم

نسخة الإمارات العربية المتحدة

www.almanahj.com

2018 - 2019

10

Mc Graw Hill Education

Project: McGraw-Hill Education United Arab Emirates Edition Grade 10 Advanced Math Vol.3
FM. , from Integrated Math 1
9. Rational Functions and Relations, from Algebra 2 Chapter 8 © 2014
10. Trigonometric Functions, from Algebra 2 Chapter 12 © 2014
11. Trigonometric Identities and Equations, from Algebra 2 Chapter 13 © 2014
12. Sequences and Series, from Algebra 2 Chapter 10 © 2014
EM. , from Integrated Math 1

صورة الغلاف: hunthomas/Shutterstock.com

www.almanahj.com

mheducation.com/prek-12

جميع الحقوق محفوظة © للعام 2019 لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

جميع الحقوق محفوظة. لا يجوز إعادة إنتاج أي جزء من هذا المنشور أو توزيعه في أي صورة أو بأي وسيلة كانت أو تخزينه في قاعدة بيانات أو نظام استرداد من دون موافقة خطية مسبقة من McGraw-Hill Education، بما في ذلك، على سبيل المثال لا الحصر، التخزين على الشبكة أو الإرسال عبرها أو البث لأغراض التعليم عن بُعد.

الحقوق الحصرية للتصنيع والتصدير عائدة لمؤسسة McGraw-Hill Education. لا يمكن إعادة تصدير هذا الكتاب من البلد الذي باعته له McGraw-Hill Education. هذه النسخة الإقليمية غير متاحة خارج أوروبا والشرق الأوسط وإفريقيا.

طُبع في دولة الإمارات العربية المتحدة.

رقم النشر الدولي: 978-1-52-688228-8 (نسخة الطالب)
MHID: 1-52-688228-0 (نسخة الطالب)
رقم النشر الدولي: 978-1-52-688230-1 (نسخة المعلم)
MHID: 1-52-688230-2 (نسخة المعلم)

النسخة الإلكترونية

رقم النشر الدولي: 978-1-52-688232-5 (نسخة الطالب)
MHID: 1-52-688232-9 (نسخة الطالب)
رقم النشر الدولي: 978-1-52-688234-9 (نسخة المعلم)
MHID: 1-52-688234-5 (نسخة المعلم)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 XXX 22 21 20 19 18 17

الوحدة 9 الدوال والعلاقات النسبية

الاستعداد للوحدة 9 618

9-1 **ضرب التعابير النسبية وقسمتها** 621

9-2 **جمع التعابير النسبية وطرحها** 630

9-3 **تمثيل دوال المقلوب بيانياً** 637

■ **اختبار منتصف الوحدة** 644

9-4 **التمثيل البياني للدوال النسبية** 645

التوسّع: مختبر تقنية التمثيل البياني التمثيل البياني للدوال النسبية 653

9-5 **دوال التغير** 654

9-6 **حل المعادلات والمتباينات النسبية** 662

التوسّع: مختبر تقنية التمثيل البياني حل المعادلات والمتباينات النسبية 671

التقييم

■ دليل الدراسة والمراجعة 673

■ تدريب على الاختبار 677

■ التحضير للاختبارات المعيارية 678

■ تدريب على الاختبارات المعيارية 680

www.almanahj.com

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

وتيرة التقدم المقترحة			
الفترات الزمنية	شرح الدروس	المراجعة والتقييم	الإجمالي
45 دقيقة	9 أيام	يومان	11 يومًا
90 دقيقة	4 أيام	يوم واحد	5 أيام

المتوسّع 9-4 45 دقيقة: نصف يوم 90 دقيقة: نصف يوم	المدرّس 9-5 45 دقيقة: يوم واحد 90 دقيقة: نصف يوم	المدرّس 9-6 45 دقيقة: 15 يوم 90 دقيقة: نصف يوم	المتوسّع 9-6 45 دقيقة: نصف يوم 90 دقيقة: نصف يوم
مختبر تقنية التمثيل البياني: التمثيل البياني للدوال النسبية	**دوال التغير**	**حل المعادلات والمتباينات النسبية**	**مختبر تقنية التمثيل البياني: حل المعادلات والمتباينات النسبية**
■ استخدم حاسبة التمثيل البياني لاستكشاف التمثيلات البيانية للدوال النسبية.	■ التعرف على مسائل التغير الطردي والمشترك وحلها. ■ التعرف على مسائل التغير العكسي والمركب وحلها.	■ حل المعادلات النسبية. ■ حل المتباينات النسبية.	■ استخدم حاسبة التمثيل البياني لحل المعادلات النسبية من خلال التمثيل البياني أو من خلال استخدام خاصية الجدول.
	تغير طردي direct variation ثابت التغير constant of variation	معادلات نسبية rational equations متباينات نسبية rational inequalities المتوسط المرجح weighted average	
التقييم الختامي دليل الدراسة والمراجعة تدريب على الاختبار			

www.almanahj.com

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التقييم

التشخيص	سُبُل الحل
بداية الوحدة 9	
الاستعداد للوحدة 9 **كتاب الطالب**	الاستجابة للتدخل التقييمي **كتاب المعلم**
بداية كل درس	
السابق، الحالي، لماذا؟ **كتاب الطالب**	**كتاب الطالب**

التقييم التشخيصي

أثناء/بعد كل درس	
تمرين موجه **كتاب الطالب**، كل مثال التحقق من فهمك **كتاب الطالب** مسائل مهارات التفكير العليا **كتاب الطالب** مراجعة شاملة **كتاب الطالب** أمثلة إضافية **كتاب المعلم** انتبه! **كتاب المعلّم** الخطوة 4، التقييم **كتاب المعلم**	التدريس المتمايز **كتاب المعلم**
منتصف الوحدة	
اختبار منتصف الوحدة **كتاب الطالب**	
اختبار ما قبل الوحدة	
دليل الدراسة والمراجعة للوحدة **كتاب الطالب** تدريب على الاختبار **كتاب الطالب** تدريب على الاختبارات المعيارية **كتاب الطالب**	

التقييم التكويني

التقييم الختامي

www.alrianahj.com

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح McGraw-Hill Education

مطويات منظّم الدراسة

مطويات دينا زايك©

التركيز يكتب الطلاب ملاحظات عن الدوال والعلاقات النسبية في هذه الوحدة.

التدريس اطلب من الطلاب عمل المطويات وتسميتها حسبما هو موضح. ينبغي أن يستخدم الطلاب السطور المناسبة لتدوين ملاحظاتهم وأمثلتهم الخاصة بالمفاهيم في كل درس من الوحدة.

وقت الاستخدام شجّع الطلاب على إضافة المزيد إلى المطويات أثناء دراسة الوحدة وعلى استخدام تلك المطويات عند المراجعة للاستعداد لاختبار الوحدة.

البدء في هذه الوحدة

سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهارات ومفردات جديدة خلال دراستك للوحدة 9.

للاستعداد، حدد المصطلحات المهمة ونظّم مواردك.

قد ترغب بالرجوع إلى وحدات سابقة لمراجعة المهارات المطلوبة.

مطويات منظّم الدراسة

الدوال والعلاقات النسبية اصنع هذه المطوية لمساعدتك على تنظيم ملاحظاتك عن الوحدة 9 عن الدوال والعلاقات النسبية. ابدأ بورقة رسم بياني مقاس $11'' \times 8\frac{1}{2}''$.

1 **اطوها** إلى ثلاثة بالطول.

2 **اطو** الطرف العلوي للأسفل بحيث تصنع ثنيتا بالأعلى طولهما 2".

قص الثنيتين بالطول.

3 **سمِّ** الثنيتين الخارجية بالمصطلحات التعابير، والدوال، والمعادلات. استخدم الثنيتين الداخلية لكتابة التعاريف والملاحظات.

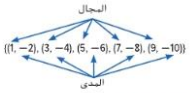
4 **اكتب** مثالاً عن كل موضوع في المساحة أسفل كل تبويب.

المفردات الجديدة

تعبير نسبي	rational expression
كسر مركب	complex fraction
دالة المقلوب	reciprocal function
قطع زائد	hyperbola
دالة نسبية	rational function
خط تقارب رأسي	vertical asymptote
خط تقارب أفقي	horizontal asymptote
خط تقارب مائل	oblique asymptote
نقطة الانفصال	point discontinuity
تغير طردي	direct variation
ثابت التغير	constant of variation
التغير المشترك	joint variation
التغير العكسي	inverse variation
التغير المتوافق	combined variation
معادلة نسبية	rational equation
المتوسط الحسابي المرجح	weighted average
متباينة نسبية	rational inequality

مراجعة المصطلحات

الدالة علاقة يكون فيها كل عنصر من المجال عنصر واحد فقط من المدى.



المضاعف المشترك الأصغر هو أصغر عدد مضاعف مشترك لعددين أو أكثر.

العدد النسبي هو عدد يتم التعبير عنه بالصورة $\frac{a}{b}$ حيث a و b عددان صحيحان و $b \neq 0$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

www.almanahj.com

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 1-9 تحليل كثيرات الحدود إلى عواملها.

الدرس 1-9 تبسيط التعابير النسبية لأبسط صورة. تحويل الكسور المركبة لأبسط صورة.

بعد الدرس 1-9 إيجاد حل المعادلات النسبية.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اسأل:

- كيف يمكن للمصطلح تعبير نسبي أن يساعدك في تحديد ما يعنيه؟ "نسبي" يشتمل على كلمة "نسبة".
- ما النسبة الموجودة في الدالة $T(d) = \frac{1700}{d-10}$؟ $\frac{1700}{d-10}$

9-1 ضرب التعابير النسبية وقسمتها

السابق
- تحليل كثيرات الحدود.

الحالي
1. تحويل التعابير النسبية لأبسط صورة.
2. تحويل الكسور المركبة لأبسط صورة.

لماذا؟
- إذا نزل غواص إلى أعماق أكبر من 10 أمتار، فإن الدالة النسبية $T(d) = \frac{1700}{d-10}$ تمثل أقصى مدة يستطيع الغواص خلالها البقاء في هذه الأعماق والصعود إلى السطح بمعدل ثابت دون توقف. تمثل $T(d)$ مدة الغطس بالدقائق، وتمثل d العمق بالمتر.

مفردات جديدة
- التعبير النسبي rational expression
- الكسر المركب complex fraction

ممارسات في الرياضيات
8 البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

1 تحويل التعابير النسبية لأبسط صورة بطابق على النسبة بين تعبيرين كثيري الحدود مثل $\frac{1700}{d-10}$ اسم **تعبير نسبي**

ونظرًا لأن المتغيرات في التجبر غالبًا ما تمثل أعدادًا حقيقية، فإن العمليات على الأعداد النسبية والتعابير النسبية متشابهة. ومثلما هو الأمر مع اختزال الكسور، فإنك تقوم بقسمة البسط والمقام على العامل المشترك الأكبر لتحويل التعبير النسبي لأبسط صورة.

$\frac{8}{12} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{2}{3}$ (العامل المشترك الأكبر = 4)

$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 6x + 5} = \frac{(x-3)(x-1)}{(x-5)(x-1)} = \frac{(x-3)}{(x-5)}$ (العامل المشترك الأكبر = $(x-1)$)

مثال 1 تحويل التعبير النسبي لأبسط صورة

a. حوّل لأبسط صورة $\frac{5x(x^2+4x+3)}{(x-6)(x^2-9)}$.

التحليل إلى عوامل البسط والمقام. $\frac{5x(x^2+4x+3)}{(x-6)(x^2-9)} = \frac{5x(x+3)(x+1)}{(x-6)(x+3)(x-3)}$

حذف العوامل المشتركة. $= \frac{5x(x+1)}{(x-6)(x-3)} \cdot \frac{(x+3)}{(x+3)}$

تبسيط. $= \frac{5x(x+1)}{(x-6)(x-3)}$

ما تحت أي ظروف يكون هذا التعبير غير معرف؟

المقام الأصلي الذي تم التحليل إلى عوامله هو $(x-6)(x+3)(x-3)$.

حدد القيم التي تجعل المقام مساويًا للصفر.

هذه القيم هي 6 أو −3 أو 3. إذًا يكون التعبير غير معرف عندما تكون $x = 6$ أو -3 أو 3.

تمرين موجّه **1A.** $\frac{4(y+4)}{(y+2)}; y \neq 0, -2, , 3$ **1B.** $\frac{2z(z+4)}{(z-1)}; z \neq 1, 2, , -5$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. تحت أي ظروف يكون التعبير غير مُعرّف؟

1A. $\frac{4y(y-3)(y+4)}{y(y^2-y-6)}$ **1B.** $\frac{2z(z+5)(z^2+2z-8)}{(z-1)(z+5)(z-2)}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

www.almanahi.com

1 تحويل التعابير النسبية لأبسط صورة

المثال 1 يوضح كيفية تحويل تعبير نسبي لأبسط صورة وتحديد القيم المستثناة. **مثال 2** يوضح كيفية استخدام الاختزال للإجابة على فقرة الاختبار. **مثال 3** يوضح كيفية تحليل 1− إلى العوامل الأولية من أجل تحويل تعبير نسبي إلى أبسط صورة. **مثال 4** يوضح كيفية ضرب التعابير النسبية وقسمتها. **مثال 5** يوضح كيفية تحويل التعبير النسبي الذي يشتمل على كثيرات الحدود لأبسط صورة.

التقييم التكويني

استخدم أسئلة "تمرين موجه" الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1. a. حوّل $\frac{3y(y+7)}{(y+7)(y^2-9)}$ إلى أبسط صورة. $\frac{3y}{y^2-9}$

b. تحت أي ظروف يكون هذا التعبير غير معرف؟ عندما يكون $y=-3$ ،$y=-7$ أو $y=3$

2. **مثال على الاختبار المعياري** بأي قيمة (قيم) تكون $\frac{p^2+2p-3}{p^2-2p-15}$ غير معرفة؟ B

A 5 C 3, −5

B −3, 5 D 5, 1, −3

3. حوّل $\frac{a^4b-2a^4}{2a^3-a^3b}$ لأبسط صورة. $-a$

مثال 2 على الاختبار المعياري استبعاد القيم التي تجعل المقدار غير مُعرّف

لأي قيم تكون $\frac{x^2(x^2-5x-14)}{4x(x^2+6x+8)}$ غير معرّفة؟

A $-2, -4$ C $0, -2, -4$

B $-2, 7$ D $0, -2, -4, 7$

قراءة فقرة الاختبار

أنت تريد تحديد قيم x التي تجعل المقام يساوي صفرًا.

حل فقرة الاختبار

يوجد $4x$ في المقام. لا يمكن أن تساوي x صفرًا. إذًا، يمكن استبعاد الخيارين A و B. بعد ذلك، حلل عوامل المقام.

$x^2+6x+8=(x+2)(x+4)$ إذًا يكون المقام $4x(x+2)(x+4)$.

نظرًا لأن المقام يساوي 0 عندما تكون $x=0, -2, -4$، فإن الإجابة هي C.

نصيحة عند حل الاختبار

استبعاد الخيارات

في بعض الأحيان، يمكنك توفير الوقت بالنظر إلى الإجابات الممكنة واستبعاد الخيارات.

تمرين موجه

2. لأي قيم x تكون $\frac{x(x^2+8x+12)}{-6(x^2-3x-10)}$ غير معرفة؟ G

F $0, 5, -2$ G $5, -2$ H $0, -2, -6$ J $5, -2, -6$

يمكنك في بعض الأحيان استبعاد 1− في البسط أو المقام للمساعدة في تحويل التعبير النسبي لأبسط صورة.

مثال 3 التحويل لأبسط صورة باستخدام 1−

حوّل لأبسط صورة $\frac{(4w^2-3wy)(w+y)}{(3y-4w)(5w+y)}$

$\frac{(4w^2-3wy)(w+y)}{(3y-4w)(5w+y)}=\frac{w(4w-3y)(w+y)}{(3y-4w)(5w+y)}$ عامل.

$=\frac{w(-1)(3y-4w)(w+y)}{(3y-4w)(5w+y)}$ $4w-3y=-1(3y-4w)$

$=\frac{(-w)(w+y)}{5w+y}$ بسّط.

تمرين موجه

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

3A. $\frac{(xz-4z)}{z^2(4-x)}$ $\frac{1}{z}$

3B. $\frac{-ab^2-5ab}{(5+b)(5-b)}$ $\frac{-ab}{(5+b)}$

تصلح الطريقة المستخدمة في ضرب الكسور وقسمتها مع التعابير النسبية أيضًا. تذكّر أنك لضرب كسرين تقوم بضرب البسطين معًا والمقامين معًا. لقسمة كسرين، فإنك تضرب في المعكوس الضربي أو مقلوب العدد المقسوم عليه.

الضرب

$\frac{2}{9}\cdot\frac{15}{4}=\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{3}}\cdot 3}\cdot\frac{\overset{1}{\cancel{3}}\cdot 5}{\underset{1}{\cancel{2}}\cdot 2}=\frac{5}{3\cdot 2}=\frac{5}{6}$

القسمة

$\frac{3}{5}\div\frac{6}{35}=\frac{3}{5}\cdot\frac{35}{6}=\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{5}}}\cdot\frac{\overset{1}{\cancel{5}}\cdot 7}{\underset{1}{\cancel{2}}\cdot\underset{1}{\cancel{3}}}=\frac{7}{2}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

انتبه!

مفاهيم خاطئة شائعة وضّح أن التعابير النسبية عادة ما تُستخدم دون استبعاد تلك القيم التي تجعل التعبير غير معرف بشكل محدد. من المعلوم أنه لم يتم تضمين تلك القيم التي تجعل للتعبير معنى.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

السبورة البيضاء التفاعلية استخدم السبورة البيضاء للمساعدة في توضيح حذف العوامل المشتركة. اشطب على العوامل المشتركة أثناء تحويل التعبير لأبسط صورة. واسحب العوامل المتبقية لتكوين تعبير مبسط.

622 | الدرس 1-9 | ضرب التعابير النسبية وقسمتها

www.almanahj.com

يلخص الجدول التالي قواعد ضرب التعابير النسبية وقسمتها.

المفهوم الأساسي

ضرب التعابير النسبية

الشرح لضرب التعابير النسبية، اضرب البسوط معًا واضرب المقامات معًا.

الرموز لجميع التعابير النسبية $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ عندما تكون $b \neq 0$ و $d \neq 0$، فإن $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

قسمة التعابير النسبية

الشرح لقسمة التعابير النسبية، اضرب في المعكوس الضربي للمقسوم عليه.

الرموز لجميع التعابير النسبية $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ عندما تكون $b \neq 0$، $c \neq 0$ و $d \neq 0$، فإن

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

نصيحة دراسية

حذف العوامل المشتركة
تأكد من حذف العوامل المشتركة من البسط والمقام.

مثال 4 ضرب التعابير النسبية وقسمتها

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

a. $\frac{6c}{5d} \cdot \frac{15cd^2}{8a}$

$\frac{6c}{5d} \cdot \frac{15cd^2}{8a} = \frac{2 \cdot 3 \cdot c \cdot 5 \cdot 3 \cdot c \cdot d \cdot d}{5 \cdot d \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a}$ عامل.

$= \frac{2 \cdot 3 \cdot c \cdot 5 \cdot 3 \cdot c \cdot d \cdot d}{5 \cdot d \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a}$ حذف العوامل المشتركة.

$= \frac{3 \cdot 3 \cdot c \cdot c \cdot d}{2 \cdot 2 \cdot a}$ بسّط.

$= \frac{9c^2d}{4a}$ بسّط.

b. $\frac{18xy^3}{7a^2b^2} \div \frac{12x^2y}{35a^2b}$

$\frac{18xy^3}{7a^2b^2} \div \frac{12x^2y}{35a^2b} = \frac{18xy^3}{7a^2b^2} \cdot \frac{35a^2b}{12x^2y}$ الضرب في المعكوس الضربي للمقسوم عليه

$= \frac{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot 5 \cdot 7 \cdot a \cdot a \cdot b}{7 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot y}$ عامل.

$= \frac{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot 5 \cdot 7 \cdot a \cdot a \cdot b}{7 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot y}$ حذف العوامل المشتركة.

$= \frac{3 \cdot 5 \cdot y \cdot y}{2 \cdot b \cdot x}$ بسّط.

$= \frac{15y^2}{2bx}$ بسّط.

تمرين موجّه

4A. $\frac{12c^3d^2}{21ab} \cdot \frac{14a^2b}{8c^2d}$ acd

4B. $\frac{6xy}{15ab^2} \cdot \frac{21a^3}{18x^3y}$ $\frac{7a^2}{15b^2x^3}$

4C. $\frac{16mt^2}{21a^4b^3} \div \frac{24m^3}{7a^2b^2}$ $\frac{2t^2}{9a^2bm^2}$

4D. $\frac{12x^4y^2}{40a^4b^4} \div \frac{6x^2y^4}{16a^2x}$ $\frac{4x^3}{5a^2b^4y^2}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التركيز على محتوى الرياضيات

تحويل التعابير النسبية لأبسط صورة المهارة الأساسية اللازمة لضرب التعابير النسبية وقسمتها هي التحويل لأبسط صورة. بعد تغيير القسمة إلى ضرب عن طريق المعكوس الضربي للمقسوم، وضرب البسوط والمقامات، أكمل المسألة من خلال القسمة على العوامل المشتركة.

مثال إضافي

4 حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

a. $\frac{8x}{21y^3} \times \frac{7y^2}{16x^3}$ $\frac{1}{6x^2y}$

b. $\frac{10mk^2}{3c^2d} \div \frac{5m^5}{6c^2d^2}$ $\frac{4dk^2}{m^4}$

نصيحة للمعلمين الجدد

الاستفادة من المعرفة السابقة لمساعدة الطلاب في فهم السبب الذي يجعل القسمة عملية تعادل الضرب في المعكوس الضربي، ناقش أمثلة بسيطة مثل هذه: قسمة 18 كرة زجاجية على شخصين يعني أن يحصل كل شخص على نصف العدد، أو 9 من الكرات الزجاجية.

التركيز على محتوى الرياضيات

القسمة على صفر بالتعريف، $\frac{a}{b} = c$ إذا كانت $a = bc$. إذا كان الطلاب يعتقدون أن $\frac{6}{0} = 0$. فاستخدم التعريف لإيضاح أن $\frac{6}{0} = 0$ إذا كانت $0 \times 0 = 6$. وهذا خطأ.

www.almanahj.com

في بعض الأحيان، يتوجب عليك تحليل البسط و/أو المقام إلى العوامل أولاً قبل أن تتمكن من تحويل ناتج ضرب أو ناتج قسمة تعبير نسبي إلى أبسط صورة.

مثال 5 كثيرات الحدود في البسط والمقام

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

a. $\frac{x^2-6x-16}{x^2-16x+64} \cdot \frac{x-8}{x^2+5x+6}$

$\frac{x^2-6x-16}{x^2-16x+64} \cdot \frac{x-8}{x^2+5x+6} = \frac{(x-8)(x+2)}{(x-8)(x-8)} \cdot \frac{x-8}{(x+3)(x+2)}$ عامل.

$= \frac{(x-8)(x+2)}{(x-8)(x-8)} \cdot \frac{x-8}{(x+3)(x+2)}$ حذف العوامل المشتركة.

$= \frac{1}{x+3}$ بسّط.

b. $\frac{x^2-16}{12y+36} \div \frac{x^2-12x+32}{y^2-3y-18}$

$\frac{x^2-16}{12y+36} \div \frac{x^2-12x+32}{y^2-3y-18} = \frac{x^2-16}{12y+36} \cdot \frac{y^2-3y-18}{x^2-12x+32}$ الضرب في المعكوس الضربي.

$= \frac{(x+4)(x-4)}{12(y+3)} \cdot \frac{(y-6)(y+3)}{(x-4)(x-8)}$ عامل.

$= \frac{(x+4)(x-4)}{12(y+3)} \cdot \frac{(y-6)(y+3)}{(x-4)(x-8)}$ حذف العوامل المشتركة.

$= \frac{(x+4)(y-6)}{12(x-8)}$ بسّط.

تمرين موجّه

5A. $\frac{8x-20}{x^2+2x-35} \cdot \frac{x^2-7x+10}{4x^2-16}$ $\frac{2x-5}{(x+2)(x+7)}$

5B. $\frac{x^2-9x+20}{x^2+10x+21} \div \frac{x^2-x-12}{6x+42}$ $\frac{6x-30}{(x+3)^2}$

نصيحة دراسية

الانتظام عند تحويل التعابير النسبية لأبسط صورة، فإن العوامل الموجودة إحدى كثيرات الحدود غالبًا ما تظهر في كثيرات الحدود الأخرى. في المثال 5a، يظهر العامل $x-8$ أربع مرات. استخدم هذه النصيحة كدليل عند تحليل عوامل كثيرات الحدود المعقدة.

2 تحويل الكسور المركبة لأبسط صورة.

الكسر المركب هو تعبير نسبي فيه بسط و/أو مقام عبارة عن تعبير نسبي أيضًا. التعابير التالية عبارة عن كسور مركبة.

$\frac{\frac{c}{6}}{5d}$ $\frac{\frac{8}{x}}{x-2}$ $\frac{\frac{x-3}{8}}{\frac{x-2}{x+4}}$ $\frac{\frac{4}{a}+6}{\frac{12}{a}-3}$

لتحويل كسر مركب إلى أبسط صورة، أعد كتابته أولاً على هيئة تعبير قسمة.

مثال 6 تحويل الكسور المركبة لأبسط صورة.

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

a. $\frac{\frac{a+b}{4}}{\frac{a^2+b^2}{4}}$

$\frac{\frac{a+b}{4}}{\frac{a^2+b^2}{4}} = \frac{a+b}{4} \div \frac{a^2+b^2}{4}$ كتابة التعبير على هيئة تعبير قسمة.

$= \frac{a+b}{4} \cdot \frac{4}{a^2+b^2}$ الضرب في المعكوس الضربي.

$= \frac{a+b}{\cancel{4}_1} \cdot \frac{\cancel{4}^1}{a^2+b^2}$ or $\frac{a+b}{a^2+b^2}$ بسّط.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال إضافي

5 حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

a. $\frac{k-3}{k+1} \times \frac{1-k^2}{k^2-4k+3}$ -1

b. $\frac{2d+6}{d^2+d-2} \div \frac{d+3}{d^2+3d+2}$ $\frac{2(d+1)}{d-1}$

تدريس الممارسات الرياضية

التوافق يلاحظ الطلاب المتفوقون في الرياضيات إذا كانت العمليات الحسابية متكررة ويبحثون عن الطرق العامة والمختصرة معًا. شجّع الطلاب على فحص كافة العوامل المتضمنة، وليس فقط العوامل الموجودة في كل تعبير بشكل منفرد.

2 تحويل الكسور المركبة لأبسط صورة.

مثال 6 يوضح كيفية تحويل كسر مركب لأبسط صورة عن طريق إعادة كتابته باعتباره تعبير قسمة.

التدريس المتمايز OL AL

إذا كان الطلاب يعانون من صعوبة في التعامل مع هذه المسائل،

إذا شجعهم على استخدام العديد من الخطوات، مع كتابة كل واحدة تحت السابقة والحفاظ على إبقاء كل خطٍ تحت الخط السابق له. نبههم إلى إجراء تغيير واحد فقط في كل خطوة.

www.almanahj.com

b. $\frac{\frac{x^2}{x^2-y^2}}{\frac{4x}{y-x}}$

$\frac{\frac{x^2}{x^2-y^2}}{\frac{4x}{y-x}} = \frac{x^2}{x^2-y^2} \div \frac{4x}{y-x}$ كتابة التعبير على هيئة تعبير قسمة.

$= \frac{x^2}{x^2-y^2} \times \frac{y-x}{4x}$ الضرب في المعكوس الضربي.

$= \frac{x \cdot x}{(x+y)(x-y)} \times \frac{(-1)(x-y)}{4x}$ عامل.

$= \frac{x \cdot \cancel{x}^{1}}{(x+y)\cancel{(x-y)}^{1}} \times \frac{(-1)\cancel{(x-y)}^{1}}{4\cancel{x}^{1}}$ حذف العوامل المشتركة.

$= \frac{-x}{4(x+y)}$ بسّط.

تمرين موجّه

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

6A. $\frac{\frac{(x-2)^2}{2(x^2-5x+4)}}{\frac{x^2-4}{4x-10}}$ $\frac{(2x-5)(x-2)}{(x+2)(x-4)(x-1)}$

6B. $\frac{\frac{x^2-y^2}{y^2-49}}{\frac{y-x}{y+7}}$ $\frac{-x-y}{y-7}$

التحقق من فهمك

مثال 1 **حوّل كل تعبير لأبسط صورة.**

1. $\frac{x^2-5x-24}{x^2-64}$ $\frac{x+3}{x+8}$

2. $\frac{c+d}{3c^2-3d^2}$ $\frac{1}{3(c-d)}$

مثال 2 3. **الاختيار من متعدد** حدد جميع قيم x التي يكون عندها $\frac{x+7}{x^2-3x-28}$ غير معرفة. D

A $-7, 4$ B $7, 4$ C $4, -7, 7$ D $-4, 7$

الأمثلة 3-6 **حوّل كل تعبير لأبسط صورة.**

4. $\frac{y^2+3y-40}{25-y^2}$ $\frac{y+8}{y+5}$

5. $\frac{a^2x-b^2x}{b-ay}$ $\frac{-x(a+b)}{y}$

6. $\frac{27r^3y^4}{16y^2r^3} \times \frac{8r}{9xy^2}$ $\frac{3x}{2r^2}$

7. $\frac{12x^2y}{13ab^2} \div \frac{36xy^2}{26a^2b}$ $\frac{2x^2}{3aby}$

8. $\frac{x^2-4x-21}{x^3-6x+8} \times \frac{x-4}{x^2-2x-35}$ $\frac{x+3}{(x-2)(x+5)}$

9. $\frac{a^2-b^2}{3a^2-6a+3} \div \frac{4a+4b}{a^3-1}$ $\frac{(a-b)(a+1)}{12(a-1)}$

10. $\frac{\frac{a^2b^3}{xy^4}}{\frac{a^2b}{x^2y}}$ $\frac{ab^2x}{y^3}$

11. $\frac{\frac{4x}{x+6}}{\frac{x^2-3x}{x^2+3x-18}}$ 4

12. **التبرير المنطقي** يمكن تمثيل حجم حاويات الشحن ذات شكل متوازي مستطيلات بكثيرة الحدود $6x^3 + 11x^2 + 4x$، حيث يكون الارتفاع x.

a. أوجد طول الحاوية وعرضها. $2x + 1, 3x + 4$

b. أوجد النسبة بين الأبعاد الثلاثة للحاوية عندما تكون $x = 2$. 2 : 5 : 10

c. هل ستكون النسبة بين الأبعاد الثلاثة واحدة لجميع قيم x؟ لا

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال إضافي

6 حوّل لأبسط صورة $\frac{\frac{x^2}{9x^2-4y^2}}{\frac{x^3}{2y-3x}}$. $\frac{-1}{3x^2+2xy}$

نصيحة للمعلمين الجدد

الاستنتاج ساعد الطلاب في فهم سبب كون ناتج قسمة كل من $(x - y)$ و $(y - x)$ يكون -1 بالإشارة إلى أن هذين التعبيرين متقابلين (أو معكوسين جمعيين). نماذ مثل 2 و -2.

تدريس الممارسات الرياضية

فهم طبيعة المسائل يبدأ الطلاب المتفوقون في الرياضيات بشرح معنى المسألة لأنفسهم والبحث عن نقاط بدء الحل. ويحللون المعطيات، والقيود والعلاقات والأهداف. ويتأكد الطلاب المتفوقون في الرياضيات من أجوبتهم عن المسائل باستخدام طريقة مختلفة. ويسألون أنفسهم باستمرار، "هل هذا جواب صحيح؟"

3 التمرين

التقييم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 12 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

www.almanahj.com

التمرين وحل المسائل

مثال 1 حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

13. $\frac{x(x-3)(x+6)}{x^2+x-12}$ $\frac{x(x+6)}{x+4}$

14. $\frac{y^2(y^2+3y+2)}{2y(y-4)(y+2)}$ $\frac{y(y+1)}{2(y-4)}$

15. $\frac{(x^2-9)(x^2-z^2)}{4(x+z)(x-3)}$ $\frac{(x+3)(x-z)}{4}$

16. $\frac{(x^2-16x+64)(x+2)}{(x^2-64)(x^2-6x-16)}$ $\frac{1}{x+8}$

17. $\frac{x^2(x+2)(x-4)}{6x(x^2+x-20)}$ $\frac{x(x+2)}{6(x+5)}$

18. $\frac{3y(y-8)(y^2+2y-24)}{15y^2(y^2-12y+32)}$ $\frac{(y+6)}{5y}$

مثال 2 19. **اختيار من متعدد** حدد جميع قيم x التي تكون عندها $\frac{(x-3)(x+6)}{(x^2-7x+12)(x^2-36)}$ غير معرفة.

F $3, -6$ G $4, 6$ H $-6, 6$ J $-6, 3, 4, 6$

مثال 3 حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

20. $\frac{x^2-5x-14}{28+3x-x^2}$ $\frac{x+2}{x+4}$

21. $\frac{x^3-9x^2}{x^2-3x-54}$ $\frac{x^2}{x+6}$

22. $\frac{(x-4)(x^2+2x-48)}{(36-x^2)(x^2+4x-32)}$ $-\frac{1}{x+6}$

23. $\frac{16-c^2}{c^2+c-20}$ $-\frac{c+4}{c+5}$

24. **الهندسة** يبلغ حجم الأسطوانة الموضحة على اليسار $(x+3)(x^2-3x-18)\pi$ سنتيمتر مكعب. أوجد ارتفاع الأسطوانة.

$x - 6$ cm

الأمثلة 4-6 حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

25. $\frac{3ac^2f^3}{8a^2bcf^4} \times \frac{12ab^2c}{18ab^3c^2f}$ $\frac{c}{4ab^2f^2}$

26. $\frac{14xy^2z^3}{21w^4x^2yz} \cdot \frac{7wxyz}{12w^2y^3z}$ $\frac{7z^2}{18w^5y}$

27. $\frac{64a^2b^5}{35b^2c^3f^4} \div \frac{12a^4b^3c}{70abcf^2}$ $\frac{32b}{3ac^2f^2}$

28. $\frac{9x^2yz}{5z^4} \div \frac{12x^6y^2}{50xy^4z^2}$ $\frac{15y^2}{2xz}$

29. $\frac{15a^2b^2}{21ac} \times \frac{14a^4c^2}{6ab^3}$ $\frac{5a^6c}{3b}$

30. $\frac{14c^2f^5}{9a^2} \div \frac{35cf^4}{18ab^3}$ $\frac{4b^3cf}{5a}$

31. $\frac{y^2+8y+15}{y-6} \times \frac{y^2-9y+18}{y^2-9}$ $y+5$

32. $\frac{c^2-6c-16}{c^2-d^2} \div \frac{c^2-8c}{c+d}$ $\frac{c+2}{c(c-d)}$

33. $\frac{x^2+9x+20}{8x+16} \times \frac{4x^2+16x+16}{x^2-25}$ $\frac{(x+4)(x+2)}{2(x-5)}$

34. $\frac{3a^2+6a+3}{a^2-3a-10} \div \frac{12a^2-12}{a^2-4}$ $\frac{(a+1)(a-2)}{4(a-5)(a-1)}$

35. $\frac{x+9}{x^2+10x+21} \cdot \frac{6x+42}{x^2-x-2}$ $\frac{6(x+3)(x+1)}{5(x+7)}$

36. $\frac{x^2}{6z^2} \cdot \frac{8}{x^2}$ $\frac{4}{3z^2}$

37. $\frac{a^2-b^2}{b^3} \cdot \frac{b^2-ab}{a^2}$ $\frac{-a^2(a+b)}{b^4}$

38. $\frac{x-y}{x^3-y^3} \cdot \frac{a+b}{b^2-a^2}$ $\frac{b-a}{x+y}$

39. **التبرير** في نهاية مسيرته من قمة كرة قدم بالمدرسة الثانوية، أحرز مجيد 33 هدفًا من 121 محاولة.

a. اكتب نسبة تعبر عن النسبة بين عدد الأهداف المحرزة إلى محاولات التسديد لمجيد في نهاية مسيرته كلاعب بالمدرسة الثانوية. $\frac{33}{121}$

b. افترض أن مجيد حاول إحراز عدد a من الأهداف ونجح في تسديد m أهداف خلال عامه الأول بالمدرسة. اكتب تعبيرًا نسبيًا يمثل النسبة بين عدد الأهداف المحرزة في مسيرته إلى عدد الأهداف التي حاول تسديدها في نهاية عامه الأول بالمدرسة. $\frac{33+m}{121+a}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريس الممارسات الرياضية

الاستنتاج يستوعب الطلاب المتفوقون في الرياضيات الكميات وعلاقاتها في المواقف المذكورة في المسائل. يستتبع التفكير الكمي عادات، مثل وضع الطالب تمثيلاً منطقيًا للمسألة التي يحلها، والتفكير في الوحدات المستخدمة في المسألة، والاهتمام بمعاني الكميات، وليس فقط بكيفية حسابها، ومعرفة الخصائص المختلفة للعمليات والأشياء واستخدامها بمرونة.

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	13-39, 59-60, 62-86	66-69, فردي 13-39	14-38, زوجي 59-60, 70-86
OL أساسي	13-39, فردي 40, 41-55 فردي 56-60, 62-86	13-39, 66-69	40-60, 62-65, 70-86
BL متقدم	40-80. (اختياري: 81-86)		

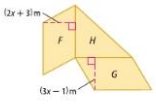
www.almanahj.com

ملاحظات لحل التمرين

القانون بالنسبة للتمرين 52، سيحتاج الطلاب لمعرفة قانون حجم منشور مستطيل، $V = Bh$، حيث إن B هي مساحة القاعدة، و h هي الارتفاع. بالنسبة للتمرين 80، سيحتاج الطلاب إلى معرفة قانون حجم منشور مستطيل، $V = \ell wh$، حيث إن ℓ هي الطول، و w هي العرض، و h هي الارتفاع.

تدريس الممارسات الرياضية

المثابرة يبدأ الطلاب المتفوقون في الرياضيات بشرح معنى المسألة لأنفسهم والبحث عن نقاط بدء الحل. فيحللون المعطيات والقيود والعلاقات والأهداف، ويبتكرون فرضيات حول شكل الحل ومعناه ويخططون مسارًا للحل بدلاً من الانتقال ببساطة إلى محاولة الحل.



40. **الهندسة** مساحة متوازي الأضلاع F تبلغ $8x^2 + 10x - 3$ متر مربع وارتفاع $2x + 3$ متر.
أما متوازي الأضلاع G فتبلغ مساحته $6x^2 + 13x - 5$ متر مربع وارتفاع $3x - 1$ متر. أوجد مساحة المثلث الأيمن H.
$\frac{1}{2}(8x^2 + 18x - 5)\ m^2$

41. **التلوث** تمثل الدالة $T(x) = \frac{0.4(x^2 - 2x)}{x^3 + x^2 - 6x}$ سَبَك تسرب نفطي من أنبوب مكسور بأحد الحفارات، حيث T هي سَبَك البقعة النفطية بالأمتار، و x هي البُعد عن مكان الكسر بالأمتار.
a. حلل الدالة لأبسط صورة. $T(x) = \frac{0.4}{x + 3}$
b. كم يبلغ سَبَك البقعة التي على بُعد 100 m من مكان الكسر؟ **حوالي 3.9 mm**

حلّل كل تعبير لأبسط صورة.

42. $\frac{x^2 - 16}{3x^3 + 18x^2 + 24x} \cdot \frac{x^3 - 4x}{2x^2 - 7x - 4}$ $\frac{x - 2}{3(2x + 1)}$

43. $\frac{3x^2 - 17x - 6}{4x^2 - 20x - 24} \div \frac{6x^2 - 7x - 3}{2x^2 - x - 3}$ $\frac{1}{4}$

44. $\frac{9 - x^2}{x^2 - 4x - 21} \cdot \left(\frac{2x^2 + 7x + 3}{2x^2 - 15x + 7}\right)^{-1}$

45. $\left(\frac{2x^2 + 2x - 12}{x^2 + 4x - 5}\right)^{-1} \cdot \frac{2x^3 - 8x}{x^2 - 2x - 35}$

46. $\left(\frac{3xy^3z}{2a^2bc^2}\right)^3 \cdot \frac{36a^4b^3c^5}{15x^2yz^3}$ $\frac{18y^8}{5a^2cx^4}$

47. $\frac{20x^2y^6z^{-2}}{3a^3c^2} \cdot \left(\frac{16x^3y^3}{9acz}\right)^{-1}$ $\frac{15y^3}{4a^3cxz}$

48. $\left(\frac{2xy}{3abc}\right)^{-2} \div \frac{6a^2b}{x^2y^4}$ $\frac{3bc^2}{8y^2}$

49. $\frac{8x^2 - 10x - 3}{10x^2 + 35x - 20} \div \frac{2x^3 + x - 6}{4x^2 + 18x + 8}$ $\frac{2x + 1}{-9x(x + 2)}$

50. $\frac{2x^2 + 7x - 30}{-6x^2 + 13x + 5} \cdot \frac{4x^2 + 12x - 72}{3x^2 - 11x - 4}$ $\frac{x - 4}{-4(x - 3)}$

51. $\frac{4x^2 - 1}{3x^3 - 6x^2 - 24x} \div \frac{12x^2 + 12x - 9}{-2x^2 + 5x + 12}$ $\frac{25}{27}$:56b

52. **الهندسة** تبلغ مساحة قاعدة متوازي المستطيلات الموجود على اليسار 20 سنتيمترًا مربعًا.
a. أوجد طول $\overline{BC}$ بدلالة x. $\frac{20}{x}$
b. إذا كان DC = 3BC؛ فحدد مساحة المنطقة المظللة بدلالة x. $\frac{1200}{x}$
c. حدد حجم المتوازي بدلالة x.

الإجابة النموذجية: تقطع الطائرة الثانية مسافة أكبر قليلاً عن الطائرة الأولى.

حلّل كل تعبير لأبسط صورة.

53. $\frac{x^2 + 4x - 32}{2x^2 + 9x - 5} \cdot \frac{3x^2 - 75}{3x^2 - 11x - 4} \div \frac{6x^2 - 18x - 60}{x^3 - 4x}$ $\frac{x(x - 2)(x + 8)}{2(2x - 1)(3x + 1)}$

54. $\frac{8x^2 + 10x - 3}{3x^2 - 12x - 36} \div \frac{2x^2 - 5x - 12}{3x^2 - 17x - 6} \cdot \frac{4x^2 + 3x}{4x^2 - 40x + 24}$ $\frac{(4x - 1)^2(3x + 1)(x + 1)}{12(x + 2)(x - 4)(x^2 - 10x + 6)}$

55. $\frac{4x^2 - 9x - 9}{3x^2 + 6x - 15} \div \frac{-2x^2 + 5x + 3}{x^2 + 4x + 32} \div \frac{8x^2 - 10x + 3}{x^2 - 6x + 12}$ $\frac{-2(x - 8)(x + 4)(x - 2)(x + 1)}{(2x + 1)^2(x^2 + 2x - 6)}$

56. **المثابرة** استخدم الصيغة $d = rt$ والمعلومات التالية.
تسافر طائرة ببعدل r من 500 كيلومتر في الساعة لمدة t من $(x + 6)$ ساعات.
وتسافر طائرة أخرى ببعدل r من $(540 + 90x)$ كيلومتر في الساعة لمدة t من 6 ساعات.
a. اكتب تعبيرًا نسبيًا يمثل النسبة بين المسافة المخطوعة d للطائرة الأولى والمسافة المخطوعة d للطائرة الثانية.
b. حلّل التعبير النسبي لأبسط صورة. ما الذي يخبرك به هذا التعبير عن المسافتين المخطوعتين لكلتا الطائرتين؟
c. تحت أي ظرف يكون التعبير النسبي غير معرف؟ صف ما يخبرك به هذا الظرف عن الطائرتين. $\frac{(500)(6 + x)}{(540 + 90x)(6)}$

الإجابة النموذجية: عندما تكون $x = -6$. فسوف تسافر الطائرة الأولى لمدة 0 ساعة وسوف تسافر الطائرة الثانية بمعدل 0 كيلومتر في الساعة.

© McGraw-Hill Education جميع الحقوق محفوظة.

www.almanahj.com

تدريس الممارسات الرياضية

النقد يُمكن للطلاب المتفوقين في مادة الرياضيات أيضًا المقارنة بين فعالية فرضيتين مقبولتين والتفريق بين المنطق السليم أو القويم وبين المنطق الخاطئ، وفي حالة وجود خطأ في فرضية ما. يستطيعون توضيح ماهية هذا الخطأ.

57. **القطارات** في محاولة للوصول إلى ساحة القطارات بإحدى الأمسيات، كانت جميع القطارات متوقفة في صف فيسافة 2 mi على طول نظام الخطوط. افترض أن كل عربة تشغل مساحة متوسطها 75 ft من الخط وأن ساحة القطارات تضم 5 خطوط.

a. اكتب تعبيرًا يمكن استخدامه لتحديد عدد عربات القطار الموجودة في صف التخزين.

57a. $\frac{\text{2 mi}}{\text{مسار واحد}} \cdot \frac{\text{5280 ft}}{\text{1 mi}} \cdot \frac{\text{1 سيارة}}{\text{75 ft}}$ مسارات

b. كم عدد عربات القطار الموجودة في صف التخزين؟ 704

c. افترض أن هناك 8 مراقبين يقومون على إجراء فحوصات السلامة لكل عربة وأن فحص كل عربة يستغرق متوسط x 45. فكم عدد الساعات بالتقريب التي سيستغرقها فحص جميع العربات في الصف حتى يتم إجراؤها؟ 70.4 h

58. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سنستكشف تمثيل الدالة النسبية بيانيًا. **b, d. انظر الهامش.**

a. **جبريًا** حول لأبسط صورة $\frac{x^2 - 5x + 4}{x - 4}$.

b. **جدوليًا** افرض أن $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 4}$. استخدم التعبير الذي كتبته في الجزء a لكتابة الدالة ذات الصلة $g(x)$. استخدم حاسبة التمثيل البياني لعمل جدول تمثلان الدالتين عندما يكون $0 \le x \le 10$.

58c. **تتسبب الدالة f(4) في حدوث خطأ لأن الدالة غير معرفة عندما تكون x = 4. g(4) = 3**

c. **تحليليًا** ما $f(4)$ و $g(4)$؟ اشرح أهمية هذه القيم.

d. **بيانيًا** مثّل بيانيًا الدالتين على حاسبة التمثيل البياني. استخدم وظيفة TRACE لاستكشاف كل تمثيل بياني مستخدمًا المفتاحين ▲ و ▼ للتنقل بين التمثيلات البيانية. قارن بين التمثيلات البيانية وبيّن الفرق بينها.

e. **لفظيًا** ما الذي يمكنك استنتاجه عن التعابير والدوال؟
التعابير والدوال متكافئة ما عدا عندما تكون x = 4.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

59. **التبرير** قارن بين $\frac{(x-6)(x+2)(x+3)}{x+3}$ و $(x-6)(x+2)$ ووضح الفرق بينهما.

59. **الإجابة النموذجية: التعبيران متكافئان عدا أن التعبير النسبي يكون غير معرّف عندما تكون x = 3.**

60. **التفكير النقدي** يقوم حميد وحماد بتحويل $\frac{x+y}{x-y} \div \frac{4}{y-x}$ لأبسط صورة. فهل أيّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

حميد

$$\frac{x+y}{x-y} \div \frac{4}{y-x} = \frac{x-y}{x+y} \cdot \frac{4}{y-x} = \frac{-4}{x+y}$$

حماد

$$\frac{x+y}{x-y} \div \frac{4}{y-x} = \frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{y-x}{4} = -\frac{x+y}{4}$$

61. **التحدي** أوجد التعبير الذي يجعل العبارة التالية حقيقية. $x^2 + x - 6$

$$\frac{x-6}{x+3} \cdot \frac{\quad}{x-6} = x - 2$$

62. **أي مما يأتي لا ينتمي للمجموعة؟** حدد التعبير الذي لا ينتمي إلى المجموعة الثلاثة الأخرى. اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

$\frac{1}{x-1}$ $\quad$ $\frac{x^2+3x+2}{x-5}$ $\quad$ $\frac{x+1}{\sqrt{x+3}}$ $\quad$ $\frac{x^2+1}{3}$

60. **الإجابة النموذجية: حماد؛ كان خطأ حميد في المعكوس الضربي للمقسوم بدلاً من المقسوم عليه.**

63. **التبرير** حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة أحيانًا أم صحيحة دائمًا أم غير صحيحة على الإطلاق. اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

تكون الدالة النسبية التي تحتوي على متغير في المقام ممثلة لجميع قيم x الحقيقية.

64. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب تعبيرًا نسبيًا ليصبح $\frac{x-1}{x+4}$ بعد تحويله لأبسط صورة. **الإجابة النموذجية:** $\frac{x^2-1}{x^2+5x+4}$

65. **الكتابة في الرياضيات** تم تحويل التعبير النسبي $\frac{x^2+3x}{4x}$ لأبسط صورة فأصبح $\frac{x+3}{4}$. اشرح لماذا يكون التعبير الجديد غير معرّف لجميع قيم x. **انظر الهامش.**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

www.almanahj.com

تدريب على الاختبارات المعيارية

66. SAT/ACT ترغب عائلة فهد في قطع مسافة متوسطها 250 km في اليوم أثناء إجازتهم.

في أول خمسة أيام، قطعوا 220 km، و 300 km، و 210 km، و 275 كيلومتر. و 240 km. فكم عدد الكيلومترات التي يجب عليهم قطعها في اليوم السادس لتحقيق هدفهم؟ C

A 235 km
B 251 km
C 255 km
D 275 km
E 315 km

67. أي من المعادلات التالية يعبر عن العلاقة بين N و T في الجدول؟ J

N	1	2	3	4	5	6
T	1	4	7	10	13	16

F $T = 2 - N$
G $T = 4 - 3N$
H $T = 3N + 1$
J $T = 3N - 2$

68. تبلغ تكلفة خطة الهاتف البيحمول الشهرية AED 39.99 مقابل 300 دقيقة و 20 فلسًا لكل دقيقة بعد ذلك. أي مما يلي يمثل إجمالي الفاتورة الشهرية (بالدرهم) عند التحدث لمدة x دقيقة إذا كانت x أكبر من 300؟ B

A $39.99 + 0.20(300 - x)$
B $39.99 + 0.20(x - 300)$
C $39.99 + 0.20x$
D $39.99 + 20x$

69. **إجابة مختصرة** يتم منبر مربع تتجاوز مساحة دائرة يبلغ قطرها 6 أمتار المساحة المجتمعة لدائرة قطرها 4 أمتار ودائرة قطرها 2 متر معًا؟ 4π

مراجعة شاملة

70. **أنثروبولوجيا** وجد أحد علماء الأنثروبولوجيا الدارسين لعظام الإنسان الأول أن هناك كمية ضئيلة جدًا من (الكربون– 14) متبقية في العظام بحيث لا تستطيع الأدوات قياسها. وهذا يعني أن هناك أقل من 5.0% من كمية (الكربون– 14) التي احتوت عليها العظام عندما كان الإنسان على قيد الحياة. إذا كان عمر النصف (للكربون– 14) هو 5760 عامًا. فمنذ متى توفي ذلك الإنسان؟ **منذ أكثر من 44.000 عام**

حُلّ كل من المعادلات التالية. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

71. $3e^x + 1 = 5$ **0.2877**
72. $2e^x - 1 = 0$ **−0.6931**
73. $-3e^{4x} + 11 = 2$ **0.2747**
74. $8 + 3e^{3x} = 26$ **0.5973**

75. **قانون الضوضاء** تم اقتراح قانون للمدينة يجرم إصدار صوت في منطقة سكنية بشدة تتجاوز 72 ديسيبل خلال النهار و 55 خلال الليل. بكم ضعف تزيد شدة مستوى الضوضاء المسموح به خلال النهار عن الليل؟ $10^{1.7}$ **أو حوالي 50 ضعفًا**

حوّل لأبسط صورة.

76. $\sqrt{50x^5}$ **$5x^2\sqrt{2}$**
77. $\sqrt[3]{16y^3}$ **$2y\sqrt[3]{2}$**
78. $\sqrt{18x^2y^3}$ **$3|x|y\sqrt{2y}$**
79. $\sqrt{40a^3b^4}$ **$2ab^2\sqrt{10a}$**

80. **السيارات** طول مساحة الشحن في سيارة رياضية متعددة الأغراض أكبر من ارتفاع تلك المساحة بـ 10.2 cm، ويقل عرض المساحة عن طولي الارتفاع بـ 40.6 cm. إذا كان الحجم الإجمالي لمساحة الشحن 906,139.1 cm^3

a. **$V = 2h^3 - 8h^2 - 64h$**
a. اكتب دالة كثيرة الحدود تمثل حجم مساحة الشحن.
b. هل ستتسع مساحة الشحن لوضع صندوق طوله 86.4 cm وعرضه 111.8 cm وارتفاعه 86.4 cm؟ اشرح. **لا؛ أبعاد المساحة هي $\ell = 91.5$ cm، $w = 81.3$ cm، لذا سيكون الصندوق عاليًا جدًا ليتناسب معها.**

مراجعة المهارات

حوّل لأبسط صورة.

81. $(2a + 3b) + (8a - 5b)$ **$10a - 2b$**
82. $(x^2 - 4x + 3) - (4x^2 + 3x - 5)$ **$-3x^2 - 7x + 8$**
83. $(5y + 3y^2) + (-8y - 6y^2)$ **$-3y - 3y^2$**
84. $2x(3y + 9)$ **$6xy + 18x$**
85. $(x + 6)(x + 3)$ **$x^2 + 9x + 18$**
86. $(x + 1)(x^2 - 2x + 3)$ **$x^3 - x^2 + x + 3$**

Macmillan-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

التدريس المتمايز BL OL

التوسع لإعداد الطلاب للدرس التالي وبناء قاعدة قوية للعمل المستقبلي مع التعابير النسبية، أعطهم تعبيرًا مثل $\frac{5x^2(x^2+3)}{5x(x+3)}$. اطلب منهم الشرح بالتفصيل ونقل أساسيات الحساب، ولماذا يمكن قسمة الخمسات وليس الثلاثات. وأيضًا وضح لماذا يمكن قسمة أول x^2 و x على x للتحويل لأبسط صورة، ولكن ليس تلك الموجودة بين قوسين. ينبغي أن تذكر تفسيرات الطلاب أنه يمكن قسمة العوامل المشتركة في كل من البسط والمقام، ولكن ليس المصطلحات التي تعتبر أجزاء من كثيرات الحدود. استبدال عدد مثل 2 بالرمز x قد يساعد بعض الطلاب في الوصول إلى هذا الفهم.

4 التقييم

الكرة البلورية اطلب من الطلاب وصف كيف يعتقدون أن ممارستهم لضرب التعابير النسبية وتحويلها لأبسط صورة ستساعدهم عند جمع أو طرح التعابير النسبية.

إجابات إضافية

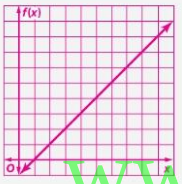
58b.

x	0	1	2	3
f(x)	−1	0	1	2
g(x)	−1	0	1	2

x	4	5	6	7
f(x)	ERR	4	5	6
g(x)	3	4	5	6

x	8	9	10
f(x)	7	8	9
g(x)	7	8	9

58d.



تبدو التمثيلات البيانية متشابهة على حاسبة التمثيل البياني. لكن $f(x)$ غير معرفة لكل من $f(4)$ و $g(4) = 3$.

62. $\frac{x+1}{\sqrt{x+3}}$ لا تنتمي للثلاثة الأخرى. التعابير الثلاثة الأخرى تعابير نسبية.

بما أن مقام $\frac{x+1}{\sqrt{x+3}}$ ليس كثيرة حدود، لا يعتبر تعبير نسبي.

63. الإجابة النموذجية: أحيانًا، مع مقام مثل $x^2 + 2$، حيث لا يساوي المقام 0. يمكن تعريف التعبير النسبي لكافة قيم x.

65. الإجابة النموذجية: عندما يكون التعبير الأصلي مُحولًا لأبسط صورة، يتم الحصول على العامل x من المقام. إذا كانت x تساوي 0، فعندئذ سيكون التعبير غير معرف. وبالتالي، فإن التعبير المحول لأبسط صورة يعتبر أيضًا غير معرف لـ x.

www.almanahj.com

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 2-9 جمع التعابير كثيرة الحدود وطرحها.

الدرس 2-9 تحديد المضاعف المشترك الأصغر لكثيرات الحدود. جمع التعابير النسبية وطرحها.

بعد الدرس 2-9 حل المعادلات والمتباينات النسبية.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اسأل:

- هل يمكن التحليل إلى عوامل $\frac{s_0}{s_0 - v}$ إلى $s_0\left(\frac{1}{1 - v}\right)$ ؟ اشرح. لا؛ s_0 ليس مضاعف مشترك.
- لضرب P_0 مرات في $\frac{s_0}{s_0 - v}$ ، هل تحتاج إلى مقام مشترك؟ لا

1 المضاعف المشترك الأصغر لكثيرات الحدود

المثال 1 يوضح كيفية إيجاد المضاعف المشترك الأصغر لمجموعة من كثيرات الحدود.

9-2 جمع التعابير النسبية وطرحها

السابق جمع وطرح التعابير كثيرة الحدود.

الحالي
1 تحديد المضاعف المشترك الأصغر للدوال كثيرة الحدود.
2 جمع التعابير النسبية وطرحها.

لماذا؟ بينما تتحرك سيارة إطفاء تجاه شخص، فإن حدة صوت الصافرة تكون أعلى إلى ذلك الشخص عما تكون عليه عندما تكون السيارة ساكنة. وهذا يرجع إلى أن الموجات الصوتية تتضاغط مقترة من بعضها البعض. وهو ما يشار إليه باسم تأثير دوبلر. يمكن تمثيل تأثير دوبلر بالتعبير النسبي $P_0\left(\frac{s_0}{s_0 - v}\right)$ حيث P_0 هو حدة الصوت الفعلية للصافرة، و s_0 هو سرعة سيارة الإطفاء، و s_0 هو سرعة الصوت في الهواء.

ممارسات في الرياضيات
3 بناء فرضيات سليمة والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

1 المضاعف المشترك الأصغر لكثيرات الحدود مثلما هو الحال مع الأعداد النسبية التي لها شكل كسري، يجب إيجاد المقام المشترك الأصغر لجمع أو طرح تعبيرين نسبيين لهما مقامان مختلفان. والمقام المشترك الأصغر هو المضاعف المشترك الأصغر للمقامات.

عند إيجاد المضاعف المشترك الأصغر لعددين أو أكثر أو لكثيرات الحدود، فحللها إلى عواملها. يحتوي المضاعف المشترك الأصغر على كل عامل بأكبر عدد مرات يمكن أن تظهر فيها كعامل.

أعداد	كثيرات الحدود
$\frac{5}{6} + \frac{4}{9}$	$\frac{3}{x^2 - 3x + 2} + \frac{5}{2x^2 - 2}$
المضاعف المشترك الأصغر لـ 6 و 9	المضاعف المشترك الأصغر لـ $2x^2 - 2$ و $x^2 - 3x + 2$
$6 = 2 \times 3$	$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$
$9 = 3 \times 3$	$2x^2 - 2 = 2 \times (x - 1)(x + 1)$
المضاعف المشترك الأصغر $= 2 \times 3 \times 3 = 18$	المضاعف المشترك الأصغر $= 2(x - 1)(x - 2)(x + 1)$

مثال 1 المضاعف المشترك الأصغر لأحاديات الحدود وكثيرات الحدود

أوجد المضاعف المشترك الأصغر لكل مجموعة من كثيرات الحدود.

a. $6xy$ و $15x^2$ و $9xy^4$

التحليل إلى عوامل أحادية الحدود الأولى.
$6xy = 2 \times 3 \times x \times y$
التحليل إلى عوامل أحادية الحدود الثانية.
$15x^2 = 3 \times 5 \times x^2$
التحليل إلى عوامل أحادية الحدود الثالثة.
$9xy^4 = 3 \times 3 \times x \times y^4$
استخدم كل عامل بأكبر عدد مرات تظهر به.
ثم بسّط.
المضاعف المشترك الأصغر $= x^2 \times y^4 \times 5 \times 3 \times 3 \times 2$
$= 90x^2y^4$

b. $y^4 + 8y^3 + 15y^2$ و $y^2 - 3y - 40$

التحليل إلى عوامل كثيرة الحدود الأولى.
$y^4 + 8y^3 + 15y^2 = y^2(y + 5)(y + 3)$
التحليل إلى عوامل كثيرة الحدود الثانية.
$y^2 - 3y - 40 = (y + 5)(y - 8)$
استخدم كل عامل أكبر عدد مرات يظهر به.
المضاعف المشترك الأصغر $= y^2(y + 5)(y + 3)(y - 8)$

تمرين موجّه $4a(a - 4)(a - 5)(a + 1)$

1A. $12a^2b$, $15abc$, $8b^3c^4$ $120a^2b^3c^4$

1B. $4a^2 - 12a - 16$ و $a^3 - 9a^2 + 20a$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

www.almanahj.com

التقييم التكويني

استخدم أسئلة "تمرين موجه" الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 أوجد المضاعف المشترك الأصغر لكل مجموعة من كثيرات الحدود.

a. $15a^2bc^3$ و $16b^5c^2$
$240a^3b^5c^6$

b. $x^3 - x^2 - 2x$ و $x^2 - 4x + 4$
$x(x+1)(x-2)^2$

2 جمع التعابير النسبية وطرحها

المثال 2 يوضح كيفية جمع تعبيرين نسبيين مع مقامات أحادية الحد. **المثال 3** يوضح كيفية طرح تعبيرين نسبيين مع مقامات كثيرة الحدود. **المثال 4 والمثال 5** يوضحان كيفية تحويل الكسور المركبة لأبسط صورة.

أمثلة إضافية

2 حوّل $\frac{5a^2}{6b} + \frac{9}{14a^2b^2}$ لأبسط صورة.
$\frac{35a^4b + 27}{42a^2b^2}$

3 حوّل $\frac{x+10}{3x-15} - \frac{3x+15}{6x-30}$ لأبسط صورة.
$-\frac{1}{6}$

2 جمع التعابير النسبية وطرحها

مثلما هو الحال مع الكسور، يجب أن يكون للتعابير النسبية مقامات مشتركة لكي يمكن جمعها أو طرحها.

المفهوم الأساسي

جمع التعابير النسبية

الشرح لجمع التعابير النسبية، أوجد المقام المشترك الأصغر. أعد كتابة كل تعبير باستخدام المقام المشترك الأصغر. ثم أجر عملية الجمع.

الرموز لجمع $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$، حيث $b \neq 0$ و $d \neq 0$، $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$.

طرح التعابير النسبية

الشرح لطرح التعابير النسبية، أوجد المقام المشترك الأصغر. أعد كتابة كل تعبير باستخدام المقام المشترك الأصغر. ثم أجر عملية الطرح.

الرموز لطرح $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$، حيث $b \neq 0$ و $d \neq 0$. $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad-bc}{bd}$

مثال 2 المقامات أحادية الحدود

حوّل لأبسط صورة $\frac{3y}{2x^3} + \frac{5z}{8xy^2}$.

المقام المشترك الأصغر $8x^3y^2$.

$$\frac{3y}{2x^3} + \frac{5z}{8xy^2} = \frac{3y}{2x^3} \times \frac{4y^2}{4y^2} + \frac{5z}{8xy^2} \times \frac{x^2}{x^2}$$

ضرب الكسور.

$$= \frac{12y^3}{8x^3y^2} + \frac{5x^2z}{8x^3y^2}$$

جمع البسوط.

$$= \frac{12y^3 + 5x^2z}{8x^3y^2}$$

تمرين موجه

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

2A. $\frac{4}{5a^3b^2} + \frac{9c}{10ab}$ $\frac{8 + 9a^2bc}{10a^3b^2}$

2B. $\frac{3a^2}{16b^2} - \frac{8x}{5a^3b}$ $\frac{15a^5 - 128bx}{80a^3b^2}$

ويستخدم أيضًا المقام المشترك الأصغر لدمج تعابير نسبية ذات مقامات كثيرة الحدود.

مثال 3 المقامات كثيرة الحدود

حوّل لأبسط صورة $\frac{5}{6x-18} - \frac{x-1}{4x^2-14x+6}$.

التحليل إلى عوامل المقامات.

$$\frac{5}{6x-18} - \frac{x-1}{4x^2-14x+6} = \frac{5}{6(x-3)} - \frac{x-1}{2(2x-1)(x-3)}$$

الضرب في العوامل المفقودة.

$$= \frac{5(2x-1)}{6(x-3)(2x-1)} - \frac{(x-1)(3)}{2(2x-1)(x-3)(3)}$$

طرح البسوط.

$$= \frac{10x-5-3x+3}{6(x-3)(2x-1)}$$

بسّط.

$$= \frac{7x-2}{6(x-3)(2x-1)}$$

تمرين موجه

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

3A. $\frac{x-1}{x^2-x-6} - \frac{4}{5x+10}$ $\frac{x+7}{5(x+2)(x-3)}$

3B. $\frac{x-8}{4x^2+21x+5} + \frac{6}{12x+3}$ $\frac{3x+2}{(4x+1)(x+5)}$

نصيحة دراسية
تبسيط التعابير النسبية بعد جمع أو طرح تعابير نسبية، قد يكون تبسيط التعبير الناتج أمرًا ممكنًا.

حقوق الطبع والتأليف © مختص لصالح Glencoe/McGraw-Hill

التدريس باستخدام التكنولوجيا

كاميرا المستندات اختر العديد من الطلاب للعمل على أمثلة أمام الصف الدراسي. تأكد من شرحهم لكيفية إيجاد المضاعف المشترك الأصغر بوضوح.

انتبه!

تجنّب الأخطاء اطلب من الطلاب مناقشة الفروق بين إجراءات جمع وضرب الكسور. من الضروري أن يتعرفوا لماذا تكون المقامات المشتركة مطلوبة للجمع ولكن ليس للضرب.

www.almanahj.com

أمثلة إضافية

4 حوّل $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{b}-1}$ لأبسط صورة.

$\dfrac{a+b}{a-ab}$ أو $\dfrac{a+b}{a(1-b)}$

5 حوّل $\dfrac{\frac{2}{x}-1}{\frac{1}{y}-\frac{3}{x}}$ لأبسط صورة. $\dfrac{2y-xy}{x-3y}$

التركيز على محتوى الرياضيات

التعابير المكافئة عندما تحصل التعابير النسبية على نفس المقامات استعدادًا للجمع أو الطرح، فإنها تكون مكافئة للتعابير الأصلية. ضرب تعبير نسبي في صيغة من صيغ 1 مثل $\frac{6x}{6x}$ أو $\frac{y-3}{y-3}$ لا يغير من قيمة التعبير.

إحدى طرق تحويل الكسر المركب إلى أبسط صورة هي تبسيط كل من البسط والمقام على حدة، ثم تبسيط التعابير الناتجة.

مثال 4 الكسور المركبة ذات مقامات مشتركة صغرى مختلفة

حوّل لأبسط صورة $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{x}{y}}$

$\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{x}{y}} = \dfrac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{y}{y}-\frac{x}{y}}$ المقام المشترك الأصغر للبسط هو x. المقام المشترك الأصغر للمقام هو y.

$= \dfrac{\frac{x+1}{x}}{\frac{y-x}{y}}$ تحويل البسط والمقام لأبسط صورة.

$= \dfrac{x+1}{x} \div \dfrac{y-x}{y}$ الكتابة على هيئة تعبير قسمة.

$= \dfrac{x+1}{x} \times \dfrac{y}{y-x}$ الضرب في المعكوس الضربي للمقسوم عليه.

$= \dfrac{xy+y}{xy-x^2}$ بسّط.

نصيحة دراسية
حدود غير معرّفة تذكر أن هناك قيودًا على المتغيرات الموجودة في المقام.

تمرين موجّه

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

4A. $\dfrac{1-\frac{y}{x}}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}$ $\dfrac{xy-y^2}{x+y}$

4B. $\dfrac{\frac{c}{d}-\frac{d}{c}}{\frac{d}{c}+2}$ $\dfrac{c^2-d^2}{d^2+2cd}$

طريقة أخرى لتحويل الكسر المركب إلى أبسط صورة هي إيجاد المقام المشترك الأصغر لجميع المقامات. وبعد ذلك، يتم اختزال جميع المقامات بضربها في المقام المشترك الأصغر.

مثال 5 الكسور المركبة ذات مقامات مشتركة صغرى متماثلة

حوّل لأبسط صورة $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{x}{y}}$

$\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{x}{y}} = \dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{xy}{xy}}{\left(1-\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{xy}{xy}}$ المقام المشترك الأصغر لجميع المقامات هو xy. بالضرب في $\frac{xy}{xy}$.

$= \dfrac{xy+y}{xy-x^2}$ بسّط.

لاحظ أن المسألتين ذاتيهما قد حُلّتا في المثالين 4 و5 باستخدام طرق مختلفة، وكلاهما نتجت عنه الإجابة نفسها. وبالتالي، فإن طريقة حل المسائل المشابهة لتلك متروكة لاختيارك.

تمرين موجّه

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

5A. $\dfrac{1+\frac{2}{y}}{\frac{3}{y}-\frac{4}{x}}$ $\dfrac{xy+2y}{3x-4y}$

5B. $\dfrac{\frac{1}{d}-\frac{d}{c}}{\frac{1}{c}+6}$ $\dfrac{c-d^2}{d+6cd}$

5C. $\dfrac{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}$ $\dfrac{x+y}{x-y}$

5D. $\dfrac{\frac{a}{b}+1}{1-\frac{b}{a}}$ $\dfrac{a(a+b)}{b(a-b)}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التدريس المتمايز OL AL

إذا كان الطلاب يعانون من صعوبة في جمع التعابير النسبية وطرحها.

إذا اطلب من الطلاب العمل مع زميل، واحد في دور المدرب والآخر في دور الرياضي. يعمل الرياضي على مسألة ما باستخدام الخطوات ويشرح طريقة التفكير، فيما يستمع المدرب ويترقب الأخطاء، ويصححها متى أمكن. ثم يقوم الزميلان بتبادل الأدوار.

632 | الدرس 2-9 | جمع التعابير النسبية وطرحها

www.almanahj.com

التحقق من فهمك

مثال 1 أوجد المضاعف المشترك الأصغر لكل مجموعة من كثيرات الحدود.

1. $16x, 8x^2y^3, 5x^3y$ $80x^3y^3$
2. $7a^2, 9ab^3, 21abc^4$ $63a^2b^3c^4$
3. $3y^2 - 9y, y^2 - 8y + 15$ $3y(y-3)(y-5)$
4. $x^3 - 6x^2 - 16x, x^2 - 4$ $x(x+2)(x-2)(x-8)$

المثالان 2–3 حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

5. $\frac{12y}{5x} + \frac{5x}{4y^3}$ $\frac{48y^4 + 25x^2}{20xy^3}$
6. $\frac{5}{6ab} + \frac{3b^2}{14a^3}$ $\frac{35a^2 + 9b^3}{42a^3b}$
7. $\frac{7b}{12a} - \frac{1}{18ab^3}$ $\frac{21b^4 - 2}{36ab^3}$
8. $\frac{y^2}{8c^2d^2} - \frac{3x}{14c^4d}$ $\frac{7c^2y^2 - 12dx}{56c^4d^2}$
9. $\frac{4x}{x^2 + 9x + 18} + \frac{5}{x+6}$ $\frac{9x+15}{(x+3)(x+6)}$
10. $\frac{8}{y-3} + \frac{2y-5}{y^2 - 12y + 27}$ $\frac{10y-77}{(y-3)(y-9)}$
11. $\frac{4}{3x+6} - \frac{x+1}{x^2-4}$ $\frac{x-11}{3(x+2)(x-2)}$
12. $\frac{3a+2}{a^2-16} - \frac{7}{6a+24}$ $\frac{11a+40}{6(a+4)(a-4)}$

13. **هندسة** أوجد محيط المستطيل. $\frac{14x-10}{(x+1)(x-2)}$ $\frac{3}{x-2}$ $\frac{4}{x+1}$

المثالان 4–5 حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

14. $\frac{4 + \frac{2}{x}}{3 - \frac{2}{x}}$ $\frac{4x+2}{3x-2}$
15. $\frac{6 + \frac{4}{y}}{2 + \frac{6}{y}}$ $\frac{3y+2}{y+3}$
16. $\frac{\frac{3}{x} + \frac{2}{y}}{1 + \frac{4}{y}}$ $\frac{3y+2x}{xy+4x}$
17. $\frac{\frac{2}{b} + \frac{5}{a}}{\frac{3}{a} - \frac{8}{b}}$ $\frac{2a+5b}{3b-8a}$

تمرين وحل المسائل

20. $(x-4)(x-5)(x+6)$ 21. $6(x+4)(2x-1)(2x+3)$

مثال 1 أوجد المضاعف المشترك الأصغر لكل مجموعة من كثيرات الحدود.

18. $24cd, 40a^2c^3d^4, 15abd^3$ $120a^2bc^3d^4$
19. $4x^2y^3, 18xy^4, 10xz^2$ $180x^2y^4z^2$
20. $x^2 - 9x + 20, x^2 + x - 30$
21. $6x^2 + 21x - 12, 4x^2 + 22x + 24$
28. $\frac{17x+58}{(x-8)(x+2)(x+5)}$

المثالان 2–3 المتابرة حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

22. $\frac{5a}{24cf^4} + \frac{a}{36bc^4f^3}$ $\frac{15abc^3 + 2af}{72bc^4f^4}$
23. $\frac{4b}{15x^2y^2} - \frac{3b}{35x^2y^4z}$ $\frac{28by^2z - 9bx}{105x^2y^4z}$
24. $\frac{5b}{6a} + \frac{3b}{10a^2} + \frac{2}{ab^2}$ $\frac{25ab^3 + 9b^3 + 60a}{30a^2b^2}$
25. $\frac{4}{3x} + \frac{8}{x^2} + \frac{2}{5xy}$ $\frac{20x^2y + 120y + 6x^2}{15x^2y}$
26. $\frac{8}{3y} + \frac{2}{9} - \frac{7}{10y^2}$ $\frac{240y + 20y^2 - 27}{90y^2}$
27. $\frac{3}{16a} + \frac{5}{12b} - \frac{9}{10b^3}$ $\frac{15b^3 + 100ab^3 - 216a}{240ab^3}$
28. $\frac{8}{x^2 - 6x - 16} + \frac{9}{x^2 - 3x - 40}$
29. $\frac{4}{y^2 - 2y - 35} + \frac{6}{y^2 + 9y + 20}$ $\frac{10y+4}{(y-7)(y+5)(y+4)}$
30. $\frac{12}{3y^2 - 10y - 8} - \frac{3}{y^2 - 6y + 8}$
31. $\frac{6}{2x^2 + 11x - 6} - \frac{8}{x^2 + 3x - 18}$ $\frac{-10x-10}{(2x-1)(x+6)(x-3)}$
32. $\frac{2x}{4x^2 + 9x + 2} + \frac{3}{2x^2 - 8x - 24}$
33. $\frac{4x}{3x^2 + 3x - 18} - \frac{2x}{2x^2 + 11x + 15}$ $\frac{2x^2 + 32x}{3(x-2)(x+3)(2x+5)}$

34. **علم الأحياء** بعدما يتناول الشخص شيئًا ما، فإن الرقم الهيدروجيني أو مستوى الحامض A في الفم يمكن تحديده بالصيغة $A = \frac{20.4t}{t^2 + 36} + 6.5$، حيث t هو عدد الدقائق المنصرمة منذ أن تناول الطعام.

a. حوّل المعادلة لأبسط صورة. $A = \frac{6.5t^2 + 20.4t + 234}{t^2 + 36}$

b. ماذا سيكون مستوى الحامض بعد 30 دقيقة؟ ≈ 7.2

633

3 تمرين

التقييم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 17 للتحقق من الاستيعاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس الممارسات الرياضية

المتابرة يبدأ الطلاب المتفوقون في الرياضيات بشرح معنى المسألة لأنفسهم والبحث عن نقاط بدء الحل. فيحللون المعطيات والقيود والعلاقات والأهداف. ويبتكرون فرضيات حول شكل الحل ومعناه ويخططون مسارًا للحل بدلاً من الانتقال ببساطة إلى محاولة الحل.

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	18–39, 64–90	19–39 ,فردي 67–70	18–38 ,زوجي 64–66, 71–90
OL أساسي	19–39 ,فردي 40–57 ,فردي 59–62, 64–90	18–39, 67–70	40–62, 64–66, 71–90
BL متقدم	40–84, (اختياري 85–90)		

www.arinanhj.com

ملاحظات لحل التمرين

القوانين بالنسبة للتمرين 35، سيحتاج الطلاب إلى معرفة قانون مساحة المثلث، $A = \frac{1}{2}bh$.

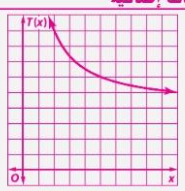
ورق مربعات بالنسبة للتمارين 75 إلى 80 و 85 إلى 90، سيحتاج الطلاب إلى ورق مربعات.

تدريس الممارسات الرياضية

استخدام النماذج يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات تطبيق الرياضيات التي يعرفونها لحل المسائل الناشئة في الحياة اليومية. وتحليل العلاقات من منطلق الرياضيات لاستخلاص الاستنتاجات، وتفسير نتائج الرياضيات في سياق الحال.

إجابات إضافية

62b.

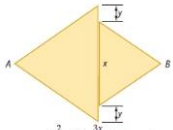


62c.

x	T(x)
20	4.5
50	4.2
100	4.1
200	4.05
400	4.025

64. الإجابة النموذجية: تكون مجموعة التعابير النسبية مغلقة في ظل كافة هذه العمليات لأن مجموع وفرق وناتج ضرب وناتج قسمة تعبيرين نسبيين هو تعبير نسبي.

66. الإجابة النموذجية: أولاً، قم بالتحليل إلى العوامل المقامات لكافة التعابير. أوجد المضاعف المشترك الأصغر للمقامات. حوّل كل تعبير بحيث يكون له مضاعف مشترك أصغر. اجمع أو اطرح البسطين. ثم حوّل لأبسط صورة، هو نفسه.



35. **الهندسة** كلا المثلثين في الشكل الموجود بالميسار متساوي الأضلاع. إذا كانت مساحة المثلث الأصغر $200\ cm^2$ وكانت مساحة المثلث الأكبر $300\ cm^2$. فأوجد أدنى مسافة من A إلى B بدلالة x و y وحوّل لأبسط صورة. $\frac{1000x + 800y}{x(x + 2y)}$

التمارين 4-5 **حوّل كل تعبير لأبسط صورة.**

36. $\frac{\frac{2}{x-3} + \frac{3x}{x^2-9}}{\frac{3}{x+3} - \frac{4x}{x^2-9}}$ $\frac{5x+6}{-x-9}$

37. $\frac{\frac{4}{x+5} + \frac{9}{x-6}}{\frac{5}{x-6} - \frac{8}{x+5}}$ $\frac{13x+21}{-3x+73}$

38. $\frac{\frac{5}{x+6} - \frac{2x}{2x-1}}{\frac{x}{2x-1} + \frac{4}{x+6}}$ $\frac{-2x^2-2x-5}{x^2+14x-4}$

39. $\frac{\frac{8}{x-9} - \frac{x}{3x+2}}{\frac{3}{3x+2} + \frac{4x}{x-9}}$ $\frac{-x^2+33x+16}{12x^2+11x-27}$

40. **إنتاج النفط** قدّر مديرو إحدى شركات النفط بأنه سيتم ضخ النفط من بئر معينة بمعدل يستند إلى القدّاحة $R(x)$ حيث $R(x) = \frac{20}{x} + \frac{200x}{3x^2+20}$ هو معدل الإنتاج بآلاف البراميل في أيام بعد مرور x أعوام من بدء الضخ.

a. حوّل $R(x)$ لأبسط صورة. $R(x) = \frac{260x^2+400}{3x^3+20x}$

b. ما معدل ضخ النفط من البئر بعد 50 عامًا؟ **حوالي 1730 برميلاً/عام**

أوجد المضاعف المشترك الأصغر لكل مجموعة من كثيرات الحدود.

41. $12xy^4, 14x^4y^2, 5xyz^3, 15x^5y^3$ $420x^5y^4z^3$

42. $-6ahc^2, 18a^2b^2, 15a^4c, 8b^3$ $-360a^4b^3c^2$

43. $x^2 - 3x - 28, 2x^2 + 9x + 4, x^2 - 16$ $(x+4)(x-4)(2x+1)(x-7)$

44. $x^2 - 5x - 24, x^2 - 9, 3x^2 + 8x - 3$ $(x+3)(x-3)(x-8)(3x-1)$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

45. $\frac{1}{12a} + 6 - \frac{3}{5a^2}$ $\frac{360a^2+5a-36}{60a^2}$

46. $\frac{5}{16y^2} - 4 - \frac{8}{3x^2y}$ $\frac{15x^2-192x^3y^2-128y}{48x^2y^2}$

47. $\frac{5}{6x^2+46x-16} + \frac{2}{6x^2+57x+72}$

48. $\frac{1}{8x^2-20x-12} + \frac{4}{6x^2+27x+12}$

49. $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{y}{x+y} - \frac{x}{x-y}$ 0

50. $\frac{x^2+x}{x^2-9x+8} + \frac{4}{x-1} - \frac{3}{x-8}$ $\frac{x^2+2x-29}{x^2-9x+8}$

51. $\frac{2}{a-1} + \frac{3}{a-4}$ $\frac{5a-11}{6}$

52. $\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)(x+y)}$ $\frac{1}{y-x}$

47. $\frac{42x+41}{6(3x-1)(x+8)(2x+3)}$

48. $\frac{19x-36}{12(2x+1)(x-3)(x+4)}$

53. **الهندسة** التعبير الذي يمثل طول أحد المستطيلات هو $\frac{x^2-9}{x-2}$ ويعبّر عن طول مستطيل مشابه بالتعبير $\frac{x+3}{x^2-4}$. فما عامل قياس طولي المستطيلين؟ اكتبه في أبسط صورة. $(x-3)(x+2)$

54. **التمثيل بالنماذج** ذهب سعيد في رحلة لتجديد مسافتها 20 km. قطع نصف المسافة بمعدل ما، وقطع المسافة المتبقية بمعدل أسرع بمقدار 2 km/h.

a. إذا كانت x تمثل السرعة الأسرع بالكيلومتر في الساعة، فاكتب تعبيرًا يمثل الزمن المستغرق بالساعة للرحلة. $\frac{10}{x}$

b. اكتب تعبيرًا يمثل مقدار الوقت المستغرق بالساعة للأبطأ. $\frac{10}{x-2}$

c. اكتب تعبيرًا يمثل مقدار الزمن الذي يحتاجه سعيد لإكمال رحلته. $\frac{20(x-1)}{x(x-2)}$

أوجد كيلومتر الخط المار بكل زوج من النقاط.

55. $A\left(\frac{2}{p}, \frac{1}{2}\right)$ و $B\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{p}\right)$ $-\frac{3}{2}$

56. $C\left(\frac{1}{4}, \frac{4}{q}\right)$ و $D\left(\frac{5}{q}, \frac{1}{5}\right)$ $-\frac{4}{5}$

57. $E\left(\frac{7}{w}, \frac{1}{7}\right)$ و $F\left(\frac{1}{7}, \frac{7}{w}\right)$ -1

58. $G\left(\frac{6}{n}, \frac{1}{6}\right)$ و $H\left(\frac{1}{6}, \frac{6}{n}\right)$ -1

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التدريس المتمايز BL

التوسع يُعد تحليل *الكسور الجزئية* مهارة من المهارات الجبرية المفيدة في مناهج الرياضيات المتقدمة، بما في ذلك حساب التفاضل والتكامل. أعط الطلاب تعبيرًا نسبيًا مثل $\frac{5x+3}{x(x+1)}$ واسألهم ما أنواع الكسور الأبسط التي يمكن جمعها للحصول على هذا التعبير. إذا كان يمكنهم تحديد x و $x + 1$ باعتبارها مقامات لمثل هذه "الكسور الجزئية"، فاطلب منهم أن يحاولوا إيجاد قيم A و B التي ستجعل المعادلة $\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{5x+3}{x(x+1)}$ عبارة حقيقية لأي قيمة x. $A = 3$ و $B = 2$

www.almanahj.com

59. **التصوير الفوتوغرافي** يحدد العلول البؤري لعدسة مجال رؤية الكاميرا. فكلما قصر العلول البؤري، كان مجال الرؤية أكبر. فالتركيز بكاميرا لها طول بؤري ثابت 70 mm على جسم يبعد x mm من العدسة. يجب وضع الفيلم على مسافة y من العدسة. ويمثل ذلك بالمعادلة $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{70}$

a. عبّر عن y كدالة في x. $y=\frac{70x}{x-70}$

b. ماذا يحدث لمسافة التركيز عندما يكون الجسم على بُعد 70 mm؟ **الإجابة النموذجية: عندما يكون الجسم على بُعد 70 mm، يتعين أن تكون y تساوي 0، وهو أمر مستحيل.**

60. **الصيدلة** يتناول أحد المرضى عقارين. يعبر عن تركيزات كل عقار في مجرى الدم بالدالتين $f(t)=\frac{2t}{3t^2+9t+6}$ و $g(t)=\frac{3t}{2t^2+6t+4}$ حيث أن t تمثل الوقت المنقضي بالساعات بعد تناول العقارين.

a. اجمع الدالتين معًا لتحديد دالة تعبر عن التركيز الكلي للعقارين في مجرى الدم للمريض. $h(t)=\frac{13t}{6t^2+18t+12}$

b. ما تركيز العقارين بعد مرور 8 ساعات؟ **حوالي 0.19**

61. **تأثير دوبلر** راجع التطبيق في بداية الدرس. يقف أحمد على مسافة متساوية من سيارتي إطفاء تتحركان في اتجاهه من اتجاهين معاكسين.

a. لنفترض أن x هي سرعة سيارة الإطفاء الأسرع، و y هي سرعة سيارة الإطفاء الأبطأ. اكتب تعبيرًا نسبيًا يمثل اختلاف حدة الصوت بين صافرتي السيارتين بالنسبة لأحمد وحوّله لأبسط صورة. **61a.** $\frac{P_0v_sx-P_0v_sy}{(v_0-x)(v_0-y)}$

b. إذا كانت إحدى السيارتين تسير بسرعة 45 مترًا في الثانية، والأخرى تسير بسرعة 70 m/s. فما الاختلاف بين حدة الصوتين بالنسبة لأحمد؟ علمًا بأن سرعة الصوت في الهواء 332 m/s، وكلتا السيارتين لها صافرة بحدة 500 Hz. **حوالي 55.2 Hz**

62. **بحث** أجرى طالب يدرس سلوكيات التعلم تجربة أرسل خلالها فأرًا إلى متاهة عدة مرات. ثم تحديد الوقت الذي استغرقه الفأر لإكمال المتاهة بالدالة النسبية $T(x)=4+\frac{30}{x}$، حيث x تمثل عدد مرات المحاولة. **انظر الهامش.** b, c

a. ما مجال الدالة؟ $x\neq 0$

b. مثل الدالة بيانيًا حيث $0\leq x\leq 10$.

c. اصنع جدولاً للدالة حيث $x=20$ و 50 و 100 و 200 و 400.

d. لو كان إجراء عدد لا نهائي من المحاولات أمرًا ممكنًا، ففي رأيك ماذا سيكون الوقت الأمثل للفأر؟ اشرح استنتاجك.

الإجابة النموذجية: 4؛ يقترب الكسر من 0 مع اقتراب x من اللانهائية؛ $4+0=4$.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

63. **التحدي** حوّل لأبسط صورة $\frac{5x^{-2}-\frac{x+1}{x}}{\frac{4}{3-x^{-1}}+6x^{-1}}$ $\frac{-3x^3-2x^2+16x-5}{4x^3+18x^2-6x}$

64. **فرضيات** مجموع أي عددين نسبيين سالبين هو دائمًا عدد نسبي. لماذا يحال إن مجموعة الأعداد النسبية مغلقة في الجمع حدد ما إذا كانت مجموعة الأعداد النسبية مغلقة في عمليات الطرح والضرب والقسمة على تبرير تخمينك بمثال مضاد أو برهان على استنتاجك. **انظر الهامش.**

65. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب ثلاثة أحاديات الحدود يضاعف مشترك أصغر $180\alpha^4\beta^6c$. $20a^4b^2c$, $15ab^4$, $9abc$:الإجابة النموذجية

66. **الكتابة في الرياضيات** اكتب دليلاً يشرح طريقة جمع المقادير النسبية ذات المقامات المختلفة. وكيف تقارن ذلك بجمع الأعداد النسبية؟ **انظر الهامش.**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريس الممارسات الرياضية

الفرضيات يبقدور الطلاب المتفوقين في الرياضيات فهم واستخدام الفرضيات والتعريفات والنتائج المثبتة سابقًا في إنشاء الفرضيات. ويضعون فرضيات ويبنون تقدمًا منطقيًا للمسائل لاستكشاف حقيقة تقديراتهم. كما يُمكنهم تحليل المواقف بتقسيمها إلى حالات، ويمكنهم التعرف على الأمثلة المضادة واستخدامها.

635

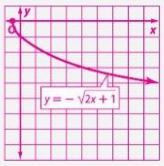
www.almanahj.com

4 التقييم

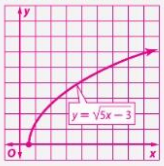
حصاد الأمس اطلب من الطلاب وصف كيف ساعدهم درس الأمس حول ضرب وقسمة التعابير النسبية في الاستعداد لدرس اليوم حول جمع التعابير النسبية وطرحها.

إجابات إضافية

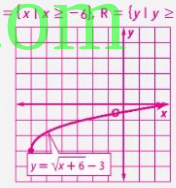
75. D = {x | x ≥ −0.5}, R = {y | y ≤ 0}



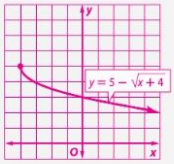
76. D = {x | x ≥ 0.6}, R = {y | y ≥ 0}



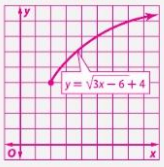
77. D = {x | x ≥ −6}, R = {y | y ≥ −3}



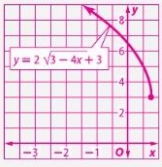
78. D = {x | x ≥ −4}, R = {y | y ≤ 5}



79. D = {x | x ≥ 2}, R = {y | y ≥ 4}



80. D = {x | x ≤ 0.75}, R = {y | y ≥ 3}



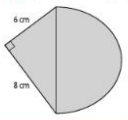
تدريب على الاختبارات المعيارية

67. **الاحتمال** سيتم إقامة سحب لاختيار الفائز بدراجة جديدة. يوجد 100 من طلاب الصف الثالث الثانوي و150 من طلاب الصف الأول الثانوي و200 من طلاب الصف الثاني الثانوي لديهم إدخالات صحيحة. سيحتوي السحب على 3 تذاكر لكل اسم من طلاب الصف الثالث. وتذكرتين لكل طالب بالصف الأول. وتذكرة لكل طالب بالصف الثاني. فما احتمالية اختيار تذكرة طالب من طلاب الصف الثالث؟ D

A $\frac{1}{8}$ C $\frac{2}{7}$

B $\frac{2}{9}$ D $\frac{3}{8}$

68. **إجابة مختصرة** أوجد مساحة الشكل. $5\pi \text{ cm}^2$, $12 + 24$



69. SAT/ACT إذا حصل ناصر على عدد b من الكتب بالإضافة إلى عدد الكتب التي لديه بالفعل، فسيكون لديه t أضعاف العدد الذي لديه في الأساس. بدلالة b و t، كم عدد الكتب التي كانت مع ناصر في البداية؟ F

F $\frac{b}{t-1}$ J $\frac{b}{t}$

G $\frac{b}{t+1}$ K $\frac{t}{b}$

H $\frac{t+1}{b}$

70. إذا كان $\frac{2a}{a} + \frac{1}{a} = 4$، فإن $a =$ ___ B

A 2 C $\frac{1}{8}$

B $\frac{1}{2}$ D $-\frac{1}{8}$

مراجعة شاملة

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (الدرس 1-9)

71. $\frac{-4ab}{21c} \cdot \frac{14c^2}{22a^2}$ $-\frac{4bc}{33a}$

72. $\frac{x^2 - y^2}{6y} \div \frac{x + y}{36y^2}$ $6y(x - y)$

73. $\frac{n^2 - n - 12}{n + 2} \div \frac{n - 4}{n^2 - 4n - 12}$ $(n + 3)(n - 6)$

74. **علم الأحياء** تتكاثر الجراثيم عادة بعملية تعرف باسم الانقسام الثنائي. في هذا النوع من التكاثر، تنقسم الجرثومة الواحدة مكوّنة جرثومتين. في ظل الظروف المثالية، تتكاثر بعض الجراثيم كل 20 دقيقة.

a. أوجد الثابت k لهذا النوع من الجراثيم في ظل الظروف المثالية. حوالي 0.0347

b. اكتب معادلة تمثل نموذجًا للنمو الأسي لهذه الجراثيم. $y = ae^{0.0347t}$

مثّل كل دالة بيانيًا. حدد المجال والمدى لكل دالة. 75–80. انظر الهامش.

75. $y = -\sqrt{2x + 1}$

76. $y = \sqrt{5x - 3}$

77. $y = \sqrt{x + 6} - 3$

78. $y = 5 - \sqrt{x + 4}$

79. $y = \sqrt{3x - 6} + 4$

80. $y = 2\sqrt{3 - 4x} + 3$

حُلّ كل من المعادلات التالية. اذكر عدد الجذور ونوعها 82. $\frac{5 \pm i\sqrt{71}}{4}$: 2 تخيلي

81. $3x + 8 = 0$

82. $2x^2 - 5x + 12 = 0$

83. $x^3 + 9x = 0$

84. $x^4 - 81 = 0$

83. 0, $3i$, $-3i$؛ 1 حقيقي، 2 تخيلي 84. 3، و-3، و$3i$، و$-3i$؛ 2 حقيقي، 2 تخيلي

حقيقي $\frac{8}{3}$؛ 1

مراجعة المهارات

مثّل كل دالة بيانيًا. 85–90. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

85. $y = 4(x + 3)^2 + 1$

86. $y = -(x - 5)^2 - 3$

87. $y = \frac{1}{4}(x - 2)^2 + 4$

88. $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 - 5$

89. $y = x^2 + 6x + 2$

90. $y = x^2 - 8x + 18$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

www.almanahj.com

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 3-9 تمثيل الدوال النسبية بيانيًا.

الدرس 3-9 تحديد خواص دوال المقلوب. التمثيل البياني لتحويلات دوال المقلوب.

بعد الدرس 3-9 التمثيل البياني للدوال النسبية باستخدام خطوط التقارب.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اسأل:

- على أي شيء يعتمد عدد قطع الحلوى التي على كل طالب بيعها؟ عدد الطلاب المشاركين
- ماذا يحدث لقيمة c مع زيادة قيمة n ؟ تنخفض
- ما العدد الكلي الذي يجب أن يكون المتغير n أكبر منه أو مساويًا له؟ 1
- ما العدد الكلي الذي يجب أن يكون المتغير n أقل منه أو مساويًا له؟ عدد الطلاب في الكورال

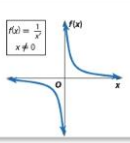
9-3 تمثيل دوال المقلوب بيانيًا

السابق	الحالي	لماذا
● قمت بتمثيل الدوال كثيرة الحدود بيانيًا.	1 تحديد خصائص دوال المقلوب. 2 تمثيل تحويلات دوال المقلوب بيانيًا.	● يود فريق إنشاء مدرسة الخالدية الثانوية جمع AED 5000 لتمويل رحلة إلى المسابقة الوطنية في دبي. وقد قرروا بيع قطع الحلوى. سيحقق الفريق أرباحًا بمقدار AED 1 لكل قطعة حلوى يبيعونها. ولذا سيحتاجون إلى بيع 5000 قطعة حلوى. فإذا كانت c تمثل عدد قطع الحلوى التي ينبغي على الطلاب بيعها و n تمثل عدد الطلاب. فإن $c = \frac{5000}{n}$.

1 خطوط التقارب الرأسية والأفقية

تعتبر الدالة $c = \frac{5000}{n}$ دالة مقلوب. وتضع **دالة المقلوب** معادلة لها الصيغة $f(x) = \frac{1}{a(x)}$. حيث $a(x)$ دالة خطية و $a(x) \neq 0$.

المفهوم الأساسي الدالة الرئيسية لدوال المقلوب



الدالة الرئيسية:	$f(x) = \frac{1}{x}$
نوع التمثيل البياني:	قطع زائد
المجال والمدى:	جميع الأعداد الحقيقية غير الصفرية
خطوط التقارب:	$x = 0$ و $f(x) = 0$
نقاط التقاطع:	لا يوجد
غير معرّفة:	$x = 0$

يتقيد مجال دالة المقلوب بالقيم التي تكون الدالة عندها معرّفة.

الدوال: $f(x) = \frac{-3}{x+2}$ $g(x) = \frac{4}{x-5}$ $h(x) = \frac{3}{x}$

غير معرّفة عند: $x = -2$ $x = 5$ $x = 0$

مثال 1 القيود على المجال

حدد قيمة x التي تكون عندها $f(x) = \frac{3}{2x+5}$ غير معرّفة.

أوجد القيمة التي تجعل مقام التعبير يساوي 0.

$\frac{3}{2x+5} \rightarrow 2x + 5 = 0$

$x = -\frac{5}{2}$ $x = -\frac{5}{2}$ الدالة غير معرّفة عندما تكون.

تمرين موجّه

حدد قيمة x التي تجعل كل دالة غير معرّفة.

1A. $f(x) = \frac{2}{x-1}$ $x = 1$

1B. $f(x) = \frac{7}{3x+2}$ $x = -\frac{2}{3}$

637

مفردات جديدة

دالة المقلوب reciprocal function

قطع زائد hyperbola

ممارسات في الرياضيات

2 التفكير بطريقة تجريدية وكمية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

www.almanahj.com

1 خطوط التقارب الأفقية والرأسية

المثال 1 يوضح كيفية إيجاد الحدود على مجال دالة نسبية. **المثال 2** يوضح كيفية تحديد خواص دوال المقلوب.

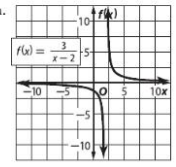
التقييم التكويني

استخدم أسئلة "تمرين موجه" الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

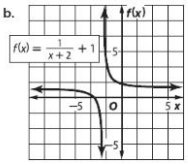
أمثلة إضافية

1 حدد قيم x والتي تكون عندها $f(x) = \frac{2}{x^2 + 5x - 24}$ غير معرفة. $x = -8$ و $x = 3$

2 حدّد خطوط التقارب والمجال والمدى لكل دالة.

a. 

خطوط التقارب: $x = 2$ و $y = 0$؛ المجال: كافة الأعداد الحقيقية غير المساوية للعدد 2؛ المدى: كافة الأعداد الحقيقية غير المساوية للعدد 0

b. 

خطوط التقارب: $x = -2$ و $f(x) = 1$؛ المجال: كافة الأعداد الحقيقية غير المساوية للعدد -2؛ المدى: كافة الأعداد الحقيقية غير المساوية للعدد 1

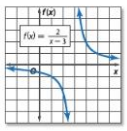
قد يحتوي التمثيل البياني لدالة المقلوب على انقطاعات في الاستمرارية فلفهم الميستشاة، وقد يحتوي البعض على خط تقارب، وهو الميستفيع الذي يقترب منه التمثيل البياني للدالة.

مثال 2 تحديد خصائص دوال المقلوب

حدّد خطوط التقارب والمجال والمدى لكل دالة.

نصيحة دراسية

البنية توضح خطوط التقارب الرأسية متى تكون الدالة غير معرّفة. بينما توضح خطوط التقارب الأفقية السلوك الطرفي للتمثيل البياني.

a. 

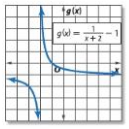
حدد قيم x التي تكون فيها $f(x)$ غير معرّفة.

$x - 3 = 0$
$x = 3$

تكون الدالة $f(x)$ غير معرفة إذا كانت $x = 3$. إذًا، يوجد خط تقارب عند $x = 3$.

من $x = 3$، مع تناقص قيم x، تقترب قيم $f(x)$ من 0. ومع تزايد قيم x، تقترب قيم $f(x)$ من 0. إذًا، يوجد خط تقارب عند $f(x) = 0$.

المجال هو كافة الأعداد الحقيقية غير المساوية للعدد 3 والمدى هو كافة الأعداد الحقيقية غير المساوية للعدد 0.

b. 

حدد قيم x التي تكون فيها $g(x)$ غير معرّفة.

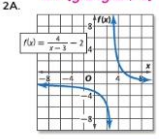
$x + 2 = 0$
$x = -2$

تكون الدالة $g(x)$ غير معرفة إذا كانت $x = -2$. إذًا، يوجد خط تقارب عند $x = -2$.

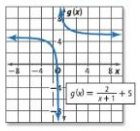
من $x = -2$، بينما تتناقص قيم x، تقترب قيم $g(x)$ من -1. وبينما تتزايد قيم x، تقترب قيم $g(x)$ من -1. إذًا، يوجد خط تقارب عند $g(x) = -1$.

المجال هو كافة الأعداد الحقيقية غير المساوية للعدد -2 والمدى هو كافة الأعداد الحقيقية غير المساوية للعدد -1.

تمرين موجه

2A. 

$x = -1$, $g(x) = 5$;
$D = \{x \mid x \neq -1\}$;
$R = \{g(x) \mid g(x) \neq 5\}$

2B. 

$x = 3$, $f(x) = -2$;
$D = \{x \mid x \neq 3\}$;
$R = \{f(x) \mid f(x) \neq -2\}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التدريس المتمايز OL BL

التوسع أخبر الطلاب بالتالي:

- يُطلق على الدالة **زوجية** إذا كانت $f(-x) = f(x)$ لكافة قيم x في مجالها. يكون التمثيل البياني لدالة زوجية *متماثلاً* بالنسبة إلى المحور y.
- يُطلق على الدالة **فردية** إذا كانت $f(-x) = -f(x)$ لكافة قيم x في مجالها. يكون التمثيل البياني لدالة فردية *متماثلاً* بالنسبة لنقطة الأصل.

اسأل الطلاب ما إذا كانت $f(x) = \frac{1}{x}$ دالة فردية أم زوجية. فردية

www.almanahj.com

2 تحويلات دوال المقلوب

يمكن تطبيق الأساليب ذاتها المستخدمة في تحويل التمثيل البياني لدوال الأخرى التي درستها على التمثيلات البيانية لدوال المقلوب. في المثال 2، لاحظ أن الخط المتقارب تم تحريكه مع التمثيل البياني للدوال.

المفهوم الأساسي تحويلات دوال المقلوب

$$f(x) = \frac{a}{x-h} + k$$

h – الإزاحة الأفقية	k – الإزاحة الرأسية
h وحدات جهة اليمين إذا كانت h موجبة	k وحدات لأعلى إذا كانت k موجبة
$\|h\|$ وحدات جهة اليسار إذا كانت h سالبة	$\|k\|$ وحدات لأسفل إذا كانت k سالبة
يوجد خط تقارب رأسي عند $x = h$	يوجد خط تقارب أفقي عند $f(x) = k$

(a) الاتجاه والشكل

إذا كانت $a < 0$ فإن التمثيل البياني ينعكس حول المحور x.

إذا كانت $|a| > 1$ فإن التمثيل البياني يمتد رأسيًا. إذا كانت $|a| < 1$ و $0 < a$، فإن التمثيل البياني ينضغط رأسيًا.

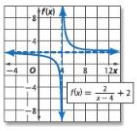
نصيحة دراسية

خطوط التقارب تتحرك خطوط التقارب لدالة المقلوب مع التمثيل البياني لدالة وتتقاطع عند النقطة (h, k).

مثال 3 التمثيل البياني للتحويلات

مثّل كل دالة بيانيًا. واذكر المجال والمدى.

a. $f(x) = \frac{2}{x-4} + 2$



يمثل هذا تحويلاً للتمثيل البياني لـ $f(x) = \frac{1}{x}$.

$a = 2$: يمتد التمثيل البياني رأسيًا.

$h = 4$: تنتج إزاحة التمثيل البياني 4 وحدات لليمين. يوجد خط تقارب عند $x = 4$.

$k = 2$: تنتج إزاحة التمثيل البياني وحدتين لأعلى. يوجد خط تقارب عند $f(x) = 2$.

المجال: $\{x | x \neq 4\}$ المدى: $\{f(x) | f(x) \neq 2\}$

b. $f(x) = \frac{-3}{x+1} - 4$

يمثل هذا تحويلاً للتمثيل البياني لـ $f(x) = \frac{-3}{x}$.

$a = -3$: يمتد التمثيل البياني رأسيًا وينعكس على المحور x.

$h = -1$: تنتج إزاحة التمثيل البياني وحدة واحدة لليسار. يوجد خط تقارب عند $x = -1$.

$k = -4$: تنتج إزاحة الرسم البياني 4 وحدات لأسفل. يوجد خط تقارب عند $f(x) = -4$.

المجال: $\{x | x \neq -1\}$ المدى: $\{f(x) | f(x) \neq -4\}$

تمرين موجّه 3A, 3B. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

3A. $f(x) = \frac{-2}{x+4} + 1$

3B. $g(x) = \frac{1}{3(x-1)} - 2$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريس الممارسات الرياضية

البنية يدقّق الطلاب المتفوقون في مادة الرياضيات لتمييز نمط أو بنية. شجع الطلاب على مقارنة معادلات خطوط التقارب بالاتصال وسلوك الدالة.

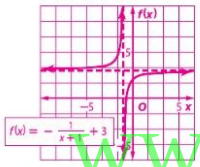
2 تحويلات دوال المقلوب

المثال 3 يوضح تحولات التمثيل البياني. **المثال 4** عبارة عن مسألة من الحياة اليومية توضح أنه عندما يتم استخدام دالة لتمثيل موقف حقيقي، فإن مجالها ذو المعنى قد يكون أصغر من مجال الرياضيات.

مثال إضافي

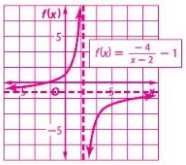
3 مثّل كل دالة بيانيًا. واذكر المجال والمدى.

a. $f(x) = -\frac{1}{x+1} + 3$



$D = \{x | x \neq -1\}$;
$R = \{f(x) | f(x) \neq 3\}$

b. $f(x) = \frac{-4}{x-2} - 1$



$D = \{x | x \neq 2\}$;
$R = \{f(x) | f(x) \neq -1\}$

التدريس باستخدام التكنولوجيا

السبورة البيضاء التفاعلية استخدم برنامج تمثيل بياني لعرض شبكة إحداثيات الدالة $f(x)$ وتمثيلها البياني. اختر العديد من الطلاب للتوجه للوحة البيضاء ورسم الشكل الذي يتوقعونه للتمثيل البياني للدالة $\frac{1}{f(x)}$. ثم استخدم برنامج التمثيل البياني لعرض التمثيل البياني للدالة $\frac{1}{f(x)}$ وقارنه بالتمثيلات البيانية للطلاب.

انتبه!

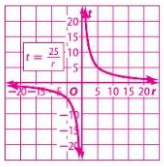
تجنب الأخطاء اقترح على الطلاب اختيار وحدة كبيرة على ورق المربعات وتقدير إحداثيات النقطة لأقرب عشرة. وضّح أنهم قد لا يتمكنون من رؤية شكل التمثيل البياني ككل ما لم يقوموا باستخدام حاسبة التمثيل البياني أو برنامج حاسب آلي.

www.almanahi.com

مثال إضافي

4 **التنقل اليومي** يقدم قطار المسافرين يوميًا خدمة لا تتوقف من مدينة إلى أخرى، لمسافة تبلغ حوالي 25 km.

a. اكتب معادلة لتمثل وقت السفر بين هاتين المدينتين باعتبارها دالة لسرعة القطار، ثم مثّل المعادلة بيانيًا. $t = \frac{25}{r}$



b. اشرح أي حدود للمجال والمدى في هذا الموقف. يكون المجال والمدى محددين لكافة الأعداد الحقيقية التي تزيد عن 0 لأن القيم السالبة ليس لها معنى. ستكون هناك المزيد من القيود على المجال لأن القطار له حد أقصى وحد أدنى للسرعات التي يمكنه السفر بها.

3 تمرين

التقييم التكويني

استخدم التمارين 1-6 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

التدريس المتمايز

OL AL

المتعلمون أصحاب النمط البصري/المكاني اطلب من الطلاب التمثيل بيانيًا لواحدة من الدوال من الدرس على ورقة كبيرة من لوحة الملصقات ليشرحوا بوضوح كيف يقترب التمثيل البياني من خط التقارب ولكنه لا يصل له مطلقًا. شجع الطلاب على استخدام مجموعة متنوعة من أقلام التحديد الملونة؟

تدريس الممارسات الرياضية

فهم طبيعة المسائل يبدأ الطلاب المتموقون في الرياضيات بشرح معنى المسألة لأنفسهم والبحث عن نقاط بدء الحل، ويحللون المعطيات، والقيود والعلاقات والأهداف، ويتأكد الطلاب المتموقون في الرياضيات من أجوبتهم عن المسائل باستخدام طريقة مختلفة، ويسألون أنفسهم باستمرار، "هل هذا جواب صحيح؟"

مثال 4 من الحياة اليومية كتابة المعادلات

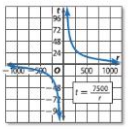
السفر لدى أحد خطوط الطيران رحلة يومية دون توقف بين وكاليفورنيا وأستراليا. وتبلغ مسافة رحلة الذهاب فقط نحو 7500 km.

a. اكتب معادلة لتمثل وقت السفر كدالة لسرعة الرحلة الجوية، ثم مثل المعادلة بيانيًا.

أوجد حل $rt = d$ لإيجاد قيمة t.

$rt = d$	المعادلة الأصلية
$t = \frac{d}{r}$	اقسم كل طرف على r.
$t = \frac{7500}{r}$	$d = 7500$

مثل $t = \frac{7500}{r}$ بيانيًا.



b. اشرح أي حدود على المجال أو المدى في هذا الموقف.

في هذا الموقف، يكون المجال والمدى محددين بكافة الأعداد الحقيقية التي تزيد عن صفر لأن القيم السالبة ليس لها معنى. سيكون هناك المزيد من القيود على المجال لأن القطار له حد أقصى وحد أدنى للسرعات التي يمكنها السفر بها.

تمرين موجّه 4. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

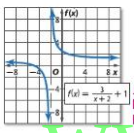
4. **التخرج** يمول مسؤولو الصمين الأول والثالث الثانوي حفل تخرج. وتبلغ التكلفة الإجمالية للمراقبة والطعام 45 AED للشخص بالإضافة إلى 2500 AED كمبلغ تأميني. اكتب معادلة تمثل متوسط التكلفة للشخص الواحد ومثلها بيانيًا. ثم اشرح أي حدود على المجال والمدى.

مهنة من الحياة اليومية

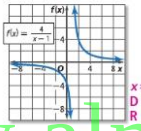
وكيل الرحلات يقدم وكلاء الرحلات احتياجات الشركات والأفراد ليساعدوهم على تنظيم أفضل ترتيبات سفر ممكنة. وقد تتنوع تخصصاتهم بحسب نوع السفر مثل السفر بغرض الترفيه أو العمل أو بحسب الوجهة مثل أوروبا وإفريقيا. يتطلب العمل شهادة مدرسة ثانوية. ويفضل الحصول على تدريب مهني.

التحقق من فهمك

المثالان 1-2 حدّد خطوط التقارب والمجال والمدى لكل دالة.

1. 

$x = -2$, $f(x) = 1$;
$D = \{x | x \neq -2\}$;
$R = \{f(x) | f(x) \neq 1\}$

2. 

$x = 1$, $f(x) = 0$;
$D = \{x | x \neq 1\}$;
$R = \{f(x) | f(x) \neq 0\}$

مثال 3 مثل كل دالة بيانيًا، واذكر المجال والمدى. 3–5 انظر الهامش

3. $f(x) = \frac{5}{x}$

4. $f(x) = \frac{2}{x+3}$

5. $f(x) = \frac{1}{x-2} + 4$

مثال 4 6. **التبرير المنطقي** تخطط مجموعة من الأصدقاء لتقديم قسيمة هدية لمحلات المجموعة الشبابية لقضاء يوم في منتجع صحي. تبلغ تكلفة القسيمة 150 AED.

a. إذا كانت c تمثل التكلفة على كل صديق وكانت f تمثل عدد الأصدقاء، فاكتب معادلة لتمثيل التكلفة على كل صديق كدالة لعدد الأصدقاء الذين قدموا المال. $c = \frac{150}{f}$

b. مثل الدالة بيانيًا. انظر الهامش.

c. وضح أي قيود على المجال أو المدى في هذا الموقف. c. في هذا الموقف، يكون المجال والمدى محددين بكافة الأعداد الحقيقية التي تزيد عن صفر لأن القيم السالبة ليس لها معنى.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

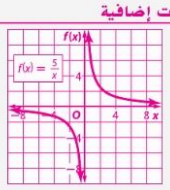
www.almanahj.com

ملاحظات لحل التمرين

ورق المربعات بالنسبة للتمارين من 3 إلى 6 ومن 11 إلى 39 و41 ومن 52 إلى 55 ومن 60 إلى 61. سيحتاج الطلاب إلى ورق مربعات.

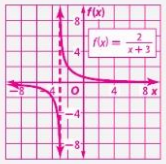
إجابات إضافية

3.



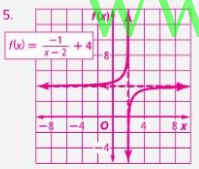
$D = \{x \mid x \neq 0\}$,
$R = \{f(x) \mid f(x) \neq 0\}$

4.



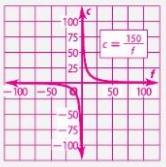
$D = \{x \mid x \neq -3\}$;
$R = \{f(x) \mid f(x) \neq 0\}$

5.



$D = \{x \mid x \neq 2\}$;
$R = \{f(x) \mid f(x) \neq 4\}$

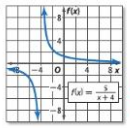
6b.



تمرين وحل المسائل

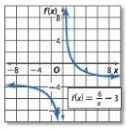
المثالان 1-2 حدّد خطوط التقارب والمجال والمدى لكل دالة.

7.



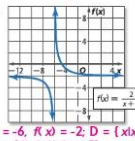
$x = -4$, $f(x) = 0$;
$D = \{x \mid x \neq -4\}$;
$R = \{f(x) \mid f(x) \neq 0\}$

8.



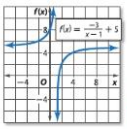
$x = 0$, $f(x) = -3$;
$D = \{x \mid x \neq 0\}$;
$R = \{f(x) \mid f(x) \neq -3\}$

9.



$x = -6$, $f(x) = -2$; $D = \{x \mid x \neq -6\}$;
$R = \{f(x) \mid f(x) \neq -2\}$

10.



$x = 1$, $f(x) = 5$;
$D = \{x \mid x \neq 1\}$;
$R = \{f(x) \mid f(x) \neq 5\}$

مثال 3 مثّل كل دالة بيانيًا، واذكر المجال والمدى. **11–22. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

11. $f(x) = \frac{3}{x}$
12. $f(x) = \frac{-4}{x+2}$
13. $f(x) = \frac{-2}{x-6}$
14. $f(x) = \frac{6}{x} - 5$
15. $f(x) = \frac{2}{x} + 3$
16. $f(x) = \frac{8}{x}$
17. $f(x) = \frac{-2}{x-5}$
18. $f(x) = \frac{3}{x-7} - 8$
19. $f(x) = \frac{9}{x+3} + 6$
20. $f(x) = \frac{8}{x+3}$
21. $f(x) = \frac{-6}{x+4} - 2$
22. $f(x) = \frac{-5}{x-2} + 2$

مثال 4 23. **قيادة الدراجات** اتخذ منير قرارًا بالقيام المجديد أن يقود دراجته 5000 km.

a. إذا كانت m تمثل عدد الكيلومترات التي يقودها منير يوميًا وتمثل d عدد الأيام، فاكتب معادلة تمثل عدد الكيلو مترات يوميًا كدالة لعدد الأيام التي يقود فيها.
$\mathbf{m = \frac{5000}{d}}$

b. مثل الدالة بيانيًا. **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

c. إذا قاد منير دراجته في كل يوم من العام، فكم عدد الكيلومترات التي ينبغي عليه أن يقطعه كل يوم لتحقيق هدفه؟ **13.7 km**

24. **التمثيل بالنماذج** لدى منير 200 g من سائل مجهول. يستعين بمساعده مدرسة الكثافة على اكتشاف ماهية السائل.

a. يتم إيجاد كثافة أي سائل من خلال قسمة الكتلة على الحجم. اكتب معادلة تمثل كثافة هذا السائل المجهول كدالة لحجمه.
$\mathbf{d = \frac{200}{v}}$

b. مثل الدالة بيانيًا. **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

c. من التمثيل البياني، حدد خطوط التقارب ومجال ومدى الدالة. $v = 0$, $d = 0$; $D = \{v \mid v \neq 0\}$; $R = \{d \mid d \neq 0\}$

مثّل كل دالة بيانيًا، واذكر المجال والمدى. 25–28. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

25. $f(x) = \frac{3}{2x-4}$
26. $f(x) = \frac{5}{3x}$
27. $f(x) = \frac{2}{4x+1}$
28. $f(x) = \frac{1}{2x+3}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	7-24, 38-40, 42-61	7-23 ,فردي, 43-47	8-24 ,زوجي, 38-40, 42, 48-61
OL أساسي	7-35 ,فردي, 36-40, 42-61	7-24, 43-47	25-40, 42, 48-61
BL متقدم	25-59, (اختياري 60-61)		

www.almanahj.com

تدريس الممارسات الرياضية

الفرضيات يقدر الطلاب المتفوقين في الرياضيات فهم واستخدام الفرضيات والتعريفات والنتائج المثبتة سابقًا في إنشاء الفرضيات. ويضعون فرضيات ويبنون نقدمًا منطقيًا للمسائل لاستكشاف حقيقة تقديراتهم. كما يُمكنهم تحليل المواقف بتقسيمها إلى حالات. ويمكنهم التعرف على الأمثلة المضادة واستخدامها.

29. **البيسبول** تبلغ المسافة بين مكان الرامي والقاعدة الرئيسية 18.4 m.
a. إذا كانت r تمثل سرعة الرمي وكانت t تمثل الزمن الذي تستغرقه الكرة للوصول إلى القاعدة. فاكتب معادلة لتمثيل السرعة كدالة للزمن. $r = \frac{60.5}{t}$
b. مثل الدالة بيانيًا. **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**
c. إذا وصلت كرة بيسبول مضروبة بطريقة الإصبعين في 0.48 s فبماذا كانت سرعتها؟ 126 m/s

مثّل كل دالة بيانيًا. اذكر المجال والمدى وحدد خطوط التقارب. 35-30. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

30. $f(x) = \frac{-3}{x+7} - 1$
31. $f(x) = \frac{-4}{x+2} - 5$
32. $f(x) = \frac{-6}{x-1} + 2$
33. $f(x) = \frac{2}{x-4} + 3$
34. $f(x) = \frac{-7}{x-8} - 9$
35. $f(x) = \frac{-6}{x-7} - 8$

36. **المعرفة المالية** انطلقت سيارة تيسلا 708 km مستهلكة خزانًا واحدًا من الوقود.
a. إذا كانت g تمثل عدد الكيلومترات بالنسبة إلى الغالون الذي استهلكته السيارة وكانت t تمثل حجم خزان الوقود. فاكتب معادلة لتمثيل النسبة بين الكيلومترات والغالونات كدالة لحجم الخزان. $g = \frac{708}{t}$
b. مثل الدالة بيانيًا. a **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**
c. كم عدد الكيلومترات التي تقطعها السيارة لكل لتر إذا كان بها خزان وقود بسعة 15 L؟ 12.4 km/L

37. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة ستستكشف أوجه التشابه والاختلاف بين الدوال الأسية ذات الأسس السالبة والموجبة. **a–f. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**
a. **الجدولة** ضع جدولًا يقيم كلًا من $a(x) = x^{-2}$ و $b(x) = x^{-3}$ و $c(x) = x^3$ و $d(x) = x^2$.
b. **التمثيل البياني** مثل $a(x)$ و $b(x)$ بيانيًا على نفس المستوى الإحداثي.
c. **الصيغ اللفظية** قارن بين المجال والمدى والسلوك الطرفي والسلوك عندما تكون $x = 0$ لكل من $a(x)$ و $b(x)$.
d. **التمثيل البياني** مثل $c(x)$ و $d(x)$ بيانيًا على نفس المستوى الإحداثي.
e. **الصيغ اللفظية** قارن بين المجال والمدى والسلوك الطرفي والسلوك عندما تكون $x = 0$ لكل من $c(x)$ و $d(x)$.
f. **التحليلات** ما الاستنتاجات التي توصلت إليها بشأن أوجه التشابه والاختلاف بين الدوال الأسية ذات الأسس السالبة والموجبة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

38. **مسألة غير محددة** الإجابة اكتب دالة مطلوب يحتوي تمثيلها البياني على خط تقارب رأسي عند $x = -4$ وخط التقارب الأفقي عند $f(x) = 6$. **الإجابة النموذجية:** $f(x) = \frac{1}{x+4} + 6$

39. **التبرير** قارن وبين الفرق بين التمثيل البياني لكل زوجين من المعادلات.
a. $y = \frac{1}{x}$ ، $y - 7 = \frac{1}{x}$
b. $y = \frac{1}{x}$ ، $y = 4\left(\frac{1}{x}\right)$
c. $y = \frac{1}{x}$ ، $y = \frac{-1}{x-5}$
d. بدون وضع جدول بالقيم. استخدم ما تعلمته في الأجزاء a–c لرسم تمثيل بياني لـ $y - 7 = 4\left(\frac{-1}{x+5}\right)$. **a–d. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

40. **الفرضيات** أوجد الدالة التي لا تنتمي للمجموعة. اشرح:

$f(x) = \frac{3}{x+1}$ | $g(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$ | $h(x) = \frac{5}{x^2+2x+1}$ | $j(x) = \frac{20}{x-7}$

الإجابة النموذجية: $g(x)$؛ جميع الخيارات الأخرى تحتوي على قيم مجهولة في المقام فقط.

41. **التحدي** اكتب دالتي مطلوب مختلفتين بحيث يحتوي تمثيلهما البياني على نفس خطوط التقارب الرأسية والأفقية. ثم مثّل الدالتين بيانيًا. **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

42. **الكتابة في الرياضيات** راجع بداية الدرس. اشرح كيفية استخدام الدوال النسبية في جميع الأحوال. اشرح السبب وراء كون جزء واحد من التمثيل البياني ذا معنى في سياق المسألة. **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

www.almanahj.com

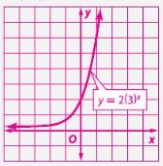
642 | الدرس 3-9 | تمثيل دوال المطلوب بيانيًا

4 التقييم

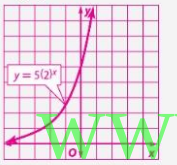
الكرة البلورية اطلب من الطلاب وصف كيف يعتقدون أن ممارستهم لضرب التعابير النسبية وتحويلها لأبسط صورة ستساعدهم عند جمع أو طرح التعابير النسبية.

إجابات إضافية

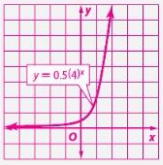
52. D = {كافة الأعداد الحقيقية}, R = {$y \mid y > 0$}



53. D = {كافة الأعداد الحقيقية}, R = {$y \mid y > 0$}



54. D = {كافة الأعداد الحقيقية}, R = {$y \mid y > 0$}



تدريب على الاختبارات المعيارية

43. **إجابة مختصرة** ما قيمة $(x + y)(x + y)$ إذا كانت $xy = -3$ و $x^2 + y^2 = 10$؟ 4

44. **إجابة شبكية** إذا كانت $x = 2y$ و $y = 4z$ و $2z = w$، فإن $\frac{x}{w} =$ ___. 4

45. إذا كانت $c = 1 + \frac{1}{d}$ و $d > 1$، فإن c قد تساوي ___. B

A $\frac{5}{7}$ C $\frac{15}{7}$
B $\frac{9}{7}$ D $\frac{19}{7}$

46. *SAT/ACT* تتحرك سيارة مسافة m كيلومتر بمعدل t كيلومتر في الساعة. فكم عدد الساعات التي تستغرقها الرحلة؟ F

F $\frac{m}{t}$ J $\frac{t}{m}$
G $m - t$ K $t - m$
H mt

47. إذا كانت $-1 < a < b < 0$. فأي مما يلي هو الضعف الأكبر؟ B

A $a - b$ C $a + b$
B $b - a$ D $2b - a$

مراجعة شاملة

48. **الأعمال التجارية** قررت شركة صغيرة تقسيم 8% من أرباحها على مديريها الستة. يوجد في الشركة مديرا مبيعات وأربعة مديرين آخرين. سيتم تقسيم الحصص بالمساواة على المديرين الستة. بينما سيتم تقسيم الـ 50% الأخرى على المديرين الأربعة الذين لا يعملون في المبيعات. افترض أن p تمثل الأرباح. (الدرس 9-2)

a. اكتب تعبيرا لتمثيل حصة الأرباح التي سيتلقاها كل مدير لا يعمل في المبيعات. $\frac{0.5(0.08p)}{6} + \frac{0.5(0.08p)}{4}$

b. حوّل التعبير لأبسط صورة. $\frac{0.05p}{3}$

c. اكتب تعبيرا في أبسط صورة لتمثيل حصة الأرباح التي سيتلقاها كل مدير مبيعات. $\frac{0.02p}{3}$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (الدرس 1-9)

49. $\frac{\frac{p^3}{2n}}{\frac{p^2}{4n}}$ $-2p$

50. $\frac{\frac{m+q}{5}}{\frac{m^2+q^2}{5}}$ $\frac{m+q}{m^2+q^2}$

51. $\frac{\frac{x+y}{2x-y}}{\frac{x+y}{2x+y}}$ $\frac{2x+y}{2x-y}$

مثّل كل دالة بيانيًا، واذكر المجال والمدى. 52-55. **انظر الهامش.**

52. $y = 2(3)^x$
53. $y = 5(2)^x$
54. $y = 0.5(4)^x$
55. $y = 4\left(\frac{1}{3}\right)^x$

أوجد قيمة $(f + g)(x)$، و $(f - g)(x)$، و $(f \times g)(x)$، و $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ **لكل من** $f(x)$ **و** $g(x)$. 56-58. **انظر الهامش.**

56. $f(x) = x + 9$, $g(x) = x - 9$
57. $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = 4x + 9$
58. $f(x) = 2x^2$, $g(x) = 8 - x$

59. **الهندسة** يبلغ عرض متوازي المستطيلات w cm. ويقل ارتفاعه عن عرضه بـ 2 cm، ويزيد طوله عن عرضه بـ 4 cm. إذا كان حجم المتوازي يساوي 8 أمثال قياس محيطه، فأوجد أبعاد المتوازي.

$w = 4$ cm, $\ell = 8$ cm, $h = 2$ cm

مراجعة المهارات

مثل بيانيًا كل دالة كثيرة الحدود. قدّر إحداثيات المحور الأفقي x التي تحدث عندها المقبيتان النسبيتان المحلي والصغرى. حدد المجال والمدى لكل من الدوال التالية. 60, 61. **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

60 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 5$
61. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 10$

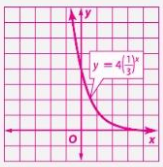
حقوق الطبع والتأليف © مجموعة ماكجروهيل للتعليم، مؤسسة McGraw-Hill Education

56. $(f + g)(x) = 2x$; $(f - g)(x) = 18$; $(f \times g)(x) = x^2 - 81$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x+9}{x-9}$, $x \neq 9$

57. $(f + g)(x) = 6x + 6$; $(f - g)(x) = -2x - 12$; $(f \times g)(x) = 8x^2 + 6x - 27$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x-3}{4x+9}$, $x \neq -\frac{9}{4}$

58. $(f + g)(x) = 2x^2 - x + 8$; $(f - g)(x) = 2x^2 + x - 8$; $(f \times g)(x) = -2x^3 + 16x^2$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x^2}{8-x}$, $x \neq 8$

55. D = {كافة الأعداد الحقيقية}, R = {$y \mid y > 0$}



www.almanahj.com

التقييم التكويني

استخدم اختبار منتصف الوحدة لتقويم تقدم الطلاب في النصف الأول من الوحدة.

بالنسبة للمسائل المجاب عنها بشكل خاطئ، اطلب من الطلاب مراجعة الدروس المشار إليها في الأقواس.

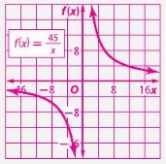
مطويات منظّم الدراسة

مطويات دينا زايك©

قبل أن ينتهي الطلاب من اختبار منتصف الوحدة، شجعهم على مراجعة معلومات الدروس من 9-1 إلى 9-3 المكتوبة في مطوياتهم.

إجابة إضافية

25b.



الوحدة 9

اختبار منتصف الوحدة

الدروس من 9-1 إلى 9-3

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (الدرس 9-1)

1. $\frac{2x^2y^5}{7x^3yz} \cdot \frac{14xyz^2}{18x^4y}$ — $\frac{2y^4z}{9x^4}$
2. $\frac{24a^4b^6}{35ab^3} \div \frac{12abc}{7a^2c}$ — $\frac{2a^4b^2}{5}$
3. $\frac{3x-3}{x^2+x-2} \cdot \frac{4x+8}{6x+18}$ — $\frac{2}{x+3}$
4. $\frac{m^2+3m+2}{9} \div \frac{m+1}{3m+15}$
5. $\frac{\frac{r^2+3r}{r+1}}{\frac{3r}{3r+3}}$ — $r+3$
6. $\frac{\frac{2y}{y^2-4}}{\frac{3}{y^2-4y+4}}$ — $\frac{2y(y-2)}{3(y+2)}$
7. **الاختيار من متعدد** لجميع قيم $r \neq \pm 2$، $\frac{r^2+6r+8}{r^2-4} =$ ___. (الدرس 9-1) B

A $\frac{r-2}{r+4}$ C $\frac{r+2}{r-4}$

B $\frac{r+4}{r-2}$ D $\frac{r+4}{r+2}$

8. **الاختيار من متعدد** حدد جميع قيم x التي تكون عندها $\frac{x^2-16}{(x^2-6x-27)(x+1)}$ غير معرفة. (الدرس 9-1) H

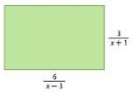
F $-3, -1$ H $-3, -1, 9$

G $3, 1, -9$ J -1

9. ما المضاعف المشترك الأصغر لكل من $3x - 3$ و $x^2 - x$؟ (الدرس 9-2) $-3x(x-1)$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (الدرس 9-2)

10. $\frac{2x}{4x^2y} + \frac{x}{3xy^3}$ — $\frac{6xy^2+4x^2}{12x^2y^3}$
11. $\frac{3}{4m} + \frac{2}{3mn^2} - \frac{4}{n^2}$ — $\frac{9n^2+8-48mn}{12mn^2}$
12. $\frac{6}{r^2-3r-18} - \frac{1}{r^2+r-6}$ — $\frac{5r-6}{(r-6)(r+3)(r-2)}$
13. $\frac{3x+6}{x+y} + \frac{6}{-x-y}$ — $\frac{3x}{x+y}$
14. $\frac{x-4}{x^2-3x-4} + \frac{x+1}{2x-8}$ — $\frac{x^2+4x-7}{2(x-4)(x+1)}$
15. حدد محيط المستطيل. (الدرس 9-2) $\frac{18x-6}{(x-3)(x+1)}$



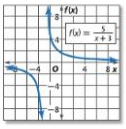
16. **السفر** تذهب وفاء إلى شاطئ يبعد 100 km. قطعت نصف المسافة بمعدل ما، وقطعت المسافة المتبقية بمعدل أبطأ بمقدار 15 km/h. (الدرس 9-2) a. $\frac{50}{x}$ h

a. إذا كانت x تمثل السرعة الأسرع بالكيلومتر في الساعة، فاكتب تعبيرًا يمثل الزمن المنقضي بهذه السرعة.

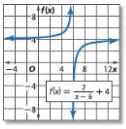
b. اكتب تعبيرًا يمثل مقدار الزمن المنقضي بالسرعة الأبطأ. $\frac{50}{x-15}$ h

c. اكتب تعبيرًا يمثل مقدار الزمن الذي تحتاجه وفاء لإكمال رحلتها. $\frac{100(x-7.5)}{x(x-15)}$

حدّد خطوط التقارب والمجال والمدى لكل دالة. (الدرس 9-3)

17. 

$x = -3$; $f(x) = 0$;
$D = \{x \mid x \neq -3\}$,
$R = \{f(x) \mid f(x) \neq 0\}$

18. 

$x = 6$; $f(x) = 4$;
$D = \{x \mid x \neq 6\}$,
$R = \{f(x) \mid f(x) \neq 4\}$

مثل بيانيًا كل دالة مقلوب. واذكر المجال والمدى. (الدرس 9-3) 19-24. **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

19. $f(x) = \frac{4}{x}$
20. $f(x) = \frac{1}{3x}$
21. $f(x) = \frac{6}{x-1}$
22. $f(x) = \frac{-2}{x} + 4$
23. $f(x) = \frac{3}{x+2} - 5$
24. $f(x) = -\frac{1}{x-3} + 2$

25. **الشطائر** تصنع مجموعة 45 شطيرة لتتناولها في نزهة. يعتمد عدد الشطائر التي يستطيع كل فرد تناولها على عدد الأشخاص المشاركين في الرحلة. (الدرس 9-3) $f(x) = \frac{45}{x}$

a. اكتب دالة تمثيل هذه المجاعة.

b. مثّل الدالة بيانيًا. **انظر الهامش.**

McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف محفوظة لصالح مؤسسة

www.almanahj.com

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 4-9 تمثيل دوال المطلوب بيانيًا.

الدرس 4-9 التمثيل البياني للدوال النسبية ذات خطوط التقارب الأفقية والرأسية. التمثيل البياني للدوال النسبية ذات خط التقارب المائل ونقطة الانفصال.

بعد الدرس 4-9 حل المعادلات النسبية باستخدام التمثيل البياني.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اسأل:

- على ماذا يعتمد متوسط تكلفة طباعة الصور؟ عدد الصور المطبوعة
- ماذا يحدث لقيمة $C(p)$ مع زيادة قيمة p ؟ تنخفض.
- هل يمكن أن تكون $p = 0$؟ لا
- هل يمكن $C(p)$ أن تساوي 0؟ نعم.

تشتمل الدالة على صفر عند $p = -\frac{350}{0.47}$، أو حوالي -744.68. مع ذلك، لا تكون القيم السالبة واقعية لسياق الموقف.

9-4 التمثيل البياني للدوال النسبية

السابق

- قمت بتمثيل الدوال النسبية بيانيًا.

الحالي

1 تمثيل الدوال النسبية ذات خطوط تقارب الأفقية والرأسية بيانيًا.

2 تمثيل الدوال النسبية ذات خط التقارب المائل ونقطة الانفصال بيانيًا.

لماذا؟

- اشترت رنا آلة تصوير ذات عدسة أحادية عاكسة وطابعة صور مقابل 350 AED. ويزعم البائع أن الحبر وورقة الصورة تكلف 0.47 AED للصورة الواحدة. ويمكن استخدام الدالة النسبية $C(p) = \frac{0.47p + 350}{p}$ لتحديد متوسط التكلفة $C(p)$ لطباعة p صورة.

مفردات جديدة

- **دالة نسبية** rational function
- **خط تقارب رأسي** vertical asymptote
- **خط تقارب أفقي** horizontal asymptote
- **خط تقارب مائل** oblique asymptote
- **نقطة الانفصال (عدم الاتصال)** point discontinuity

ممارسات في الرياضيات

7. محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

1 خطوط التقارب الأفقية والرأسية

لإحدى **الدوال النسبية** معادلة في الصيغ $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$، حيث إن $a(x)$ و $b(x)$ دالتان كثيرتا الحدود و $b(x) \neq 0$.

وتمثيل دالة نسبية بيانيًا قبل التمثيل تحديد موقع الأصفار وخطوط التقارب.

يقع صفر الدالة النسبية $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ عند أي قيمة لـ x يكون فيها $a(x) = 0$.

المفهوم الأساسي خطوط التقارب الأفقية والرأسية

الشرح

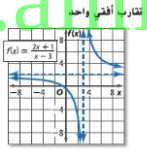
إذا كانت $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$، وكان $a(x)$ و $b(x)$ دالتين كثيرتي الحدود ليس بينهما أي عوامل مشتركة سوى 1، وكان $b(x) \neq 0$، فإن:

- $f(x)$ لها **خط تقارب رأسي** عندما تكون $b(x) = 0$.
- $f(x)$ لها **خط تقارب أفقي** واحد على الأكثر.
  - إذا كانت درجة $a(x)$ أكبر من درجة $b(x)$، فلا يوجد خط تقارب أفقي.
  - إذا كانت درجة $a(x)$ أقل من درجة $b(x)$، فسيكون خط التقارب الأفقي هو الخط $y = 0$.
  - إذا كانت درجة $a(x)$ تساوي درجة $b(x)$، فسيكون خط التقارب

$$\text{الخط الأفقي هو } y = \frac{\text{المعامل الرئيسي لـ } a(x)}{\text{المعامل الرئيسي لـ } b(x)}$$

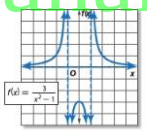
أمثلة

1 يوجد خط تقارب أفقي واحد



خط التقارب الرأسي: $x = 3$

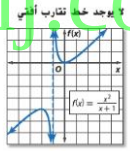
خط التقارب الأفقي: $f(x) = 2$



خطوط التقارب الرأسية: $x = -1, x = 1$

خط التقارب الأفقي: $f(x) = 0$

لا يوجد خط تقارب أفقي



خط التقارب الرأسي: $x = -1$

حقوق الطبع والتأليف © ماكجروهيل للتعليم، مؤسسة مملوكة لشركة McGraw-Hill Education

www.almanahj.com

1 خطوط التقارب الأفقية والرأسية

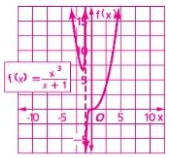
المثال 1 يوضح كيفية تحديد وتمثيل الدوال النسبية بيانيًا التي ليس لها خطوط تقارب أفقية. **المثال 2** عبارة عن مسألة من الحياة اليومية توضح أنه عندما يتم استخدام دالة لتمثيل موقف حقيقي، فإن مجالها ذو المعنى قد يكون أصغر من مجال الرياضيات.

التقييم التكويني

استخدم أسئلة "تمرين موجه" الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

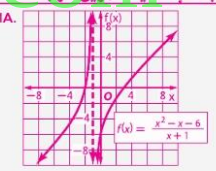
مثال إضافي

1 مثّل $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$ بيانيًا.

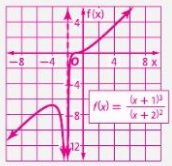


إجابات إضافية (تمرين موجه)

1A.



1B.



التدريس باستخدام التكنولوجيا

تسجيل الفيديو اطلب من الطلاب عمل تسجيلات فيديو توضح كيفية تمثيل دالة نسبية بيانيًا. اطلب من الطلاب وصف كيفية إيجاد خطوط التقارب الأفقية والرأسية، ومن ثم استخدم جدول قيم لرسم التمثيل البياني.

يمكن استخدام خط التقارب للدالة النسبية لرسم التمثيل البياني للدالة. إضافة إلى ذلك، يمكن استخدام خطوط التقارب لقسمة التمثيل البياني إلى مناطق لإيجاد الأزواج المرتبة على التمثيل البياني.

انتبه!

الأصفار مقابل خطوط التقارب الرأسية تنتج أصفار الدالة النسبية عند القيم التي تجعل البسط مساويًا للصفر. وتنتج الخطوط المتقاربة الرأسية عند القيم التي تجعل المقام مساويًا للصفر.

مثال 1 التمثيل البياني بدون خط تقارب أفقي

مثّل $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$ بيانيًا.

الخطوة 1 أوجد الأصفار.

$x^3 = 0$ اجعل $f(x) = 0$.

$x = 0$ بأخذ الجذر التكعيبي لكل طرف.

يوجد صفر عند $x = 0$.

الخطوة 2 ارسم خط التقارب.

أوجد خط التقارب الرأسي.

$x - 1 = 0$ افترض أن $f(x) = 0$.

$x = 1$ اجمع 1 إلى كل طرف.

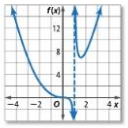
يوجد خط تقارب رأسي عند $x = 1$.

حيث إن درجة البسط أكبر من درجة المقام، إذًا، لا يوجد خط تقارب أفقي.

الخطوة 3 ارسم التمثيل البياني.

استخدم الجدول لإيجاد الأزواج المرتبة على التمثيل البياني. ثم صل النقاط ببعضها البعض.

x	f(x)
−3	6.75
−2	2.67
−1	0.5
0	0
0.5	−0.25
1.5	6.75
2	8
3	13.5



نصيحة دراسية

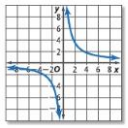
حاسبة التمثيل البياني يمكن استخدام خاصية TABLE في حاسبة التمثيل البياني لحساب قيم الكسور العشرية لكل من x و y.

تمرين موجه

مثّل كل دالة بيانيًا. 1A، 1B. انظر الهامش.

1A. $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x+1}$

1B. $f(x) = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^2}$



وفي الحياة اليومية، في بعض الأحيان تكون القيم الموجودة على التمثيل البياني لدالة نسبية غير ذات معنى. في التمثيل البياني الموجود على اليسار، لا يمكن أن تكون قيم x مثل الأوقات والمسافة وعدد الأشخاص سالبة في سياق المسألة. لذا لن تحتاج إلى اعتبار هذا الجزء من التمثيل البياني.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

www.almanahj.com

مهنة من الحياة اليومية

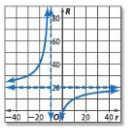
رفيق رئيس بحارة حرس السواحل الأمريكي تعتبر أكثر أعضاء فريق عمليات حرس السواحل الأمريكي تنوعًا في المهام. ويستطيع رفقاء رؤساء بحارة حرس السواحل الأمريكي القيام بأي مهمة مطلوبة. ويتم التدرب لمهنة رفيق رئيس بحارة حرس السواحل الأمريكي من خلال 12 أسبوعًا من التدريب المكثف.

مثال 2 من الحياة اليومية استخدام التمثيل البياني للدوال النسبية

متوسط السرعة تحرك قارب عكس التيار على سرعة r_1 كيلومتر في الساعة. أثناء رحلة العودة إلى نقطة البدء الأصلية، تحرك القارب بسرعة r_2 كيلومتر في الساعة. وتقدم متوسط السرعة للرحلة كاملة R من خلال القانون $R = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2}$.

a. افترض أن r_1 هو المتغير المستقل وافترض أن R هو المتغير التابع. ارسم التمثيل البياني إذا كان $r_2 = 10$ أميال في الساعة.

تكون الدالة $R = \frac{2r_1(10)}{r_1 + (10)}$ أو $R = \frac{20r_1}{r_1 + 10}$.
ويكون خط التقارب الرأسي $r_1 = -10$.
مثل خط التقارب الرأسي والدالة بيانيًا.
لاحظ أن خط التقارب الأفقي $R = 20$.



b. ما تقاطع R للتمثيل البياني؟

التقاطع مع R هو 0.

c. ما قيم المجال والمدى التي لها معنى في سياق المسألة؟

في سياق المسألة، قيم المسرعات غير سالبة. وبالتالي تكون جميع قيم r_1 الأكبر من أو تساوي 0 وقيم R التي تقع بين العددين 0 و 20 ذات معنى.

تمرين موجّه

2. **الرواتب** تستخدم إحدى الشركات القانون $S(x) = \frac{45x + 25}{x + 1}$ لتحديد الراتب السنوي بآلاف الدراهم للموظف أثناء عامه الـ x. مثل $S(x)$ بيانيًا. ما قيم المجال والمدى التي لها معنى في سياق المسألة؟ وما معنى خط التقارب الأفقي للتمثيل البياني؟ **انظر الهامش.**

2 خطوط التقارب المائلة ونقطة عدم الاتصال

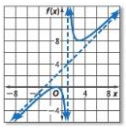
في بعض الأحيان خط التقارب المنحدر خطًا ليس بأفقي ولا رأسي. يعتبر **خط التقارب المائل** والذي يطلق عليه

المفهوم الأساسي خط التقارب المائل

الشرح إذا كان $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$، وكان $a(x)$ و $b(x)$ دالتين كثيرتي الحدود ليس بينهما أي عوامل مشتركة سوى 1 وكانت $b(x) \neq 0$، فإن $f(x)$ لها خط تقارب مائل إذا كانت درجة $a(x)$ مطروحًا منها درجة $b(x)$ تساوي 1. وتكون معادلة خط التقارب هي $y = \frac{a(x)}{b(x)}$ بدون باقي.

مثال $f(x) = \frac{x^4 + 3x^3}{x^3 - 1}$

خط التقارب الرأسي: $x = 1$
خط التقارب المائل: $f(x) = x + 3$



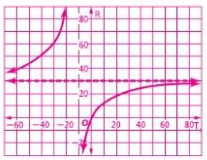
www.almanahj.com

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال إضافي

2 متوسط السرعة استخدم الموقف والصيغة المقدمة في المثال 2.

a. ارسم التمثيل البياني إذا كان $r_2 = 15$ كيلو مترًا في الساعة.



b. ما تقاطع R للتمثيل البياني؟ التقاطع R هو 0.

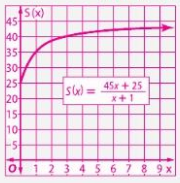
c. ما قيم المجال والمدى التي لها معنى في سياق المسألة؟ تكون قيم r_1 أكبر من أو مساوية للعدد 0 وقيم R بين 0 و 30 تكون ذات معنى.

2 خطوط التقارب المائلة ونقطة الانفصال

المثال 3 يوضح كيفية تمثيل دالة بيانيًا مع خطوط تقارب مائلة. **المثال 4** يوضح تمثيل بياني مع نقطة انفصال.

إجابات إضافية (تمرين موجه)

2. يجب أن يكون عدد سنوات العمل أكبر من أو مساويًا للعدد 0. ويجب أن تكون قيم الراتب بين 25 و 45. يمثل خط تقارب سقف راتب AED 45,000.

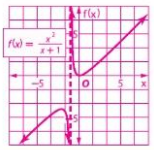


التدريس المتمايز BL

التوسع تحدى الطلاب لشرح قواعد إيجاد خطوط التقارب الأفقية والمائلة. على الرغم من توضيح الوحدة للطلاب كيفية إيجادها، يمكن ترك شرح سبب عمل القواعد للطلاب الأكثر قدرة. ادعم مجهودات الطلاب عن طريق الطلب منهم بأن يفحصوا تمثيلات بيانية ذات درجات متفاوتة في البسط والمقام والبحث عن أنماط عامة في خطوط التقارب.

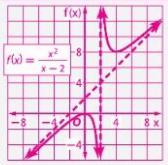
مثال إضافي

3 مثّل $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ بيانيًا.

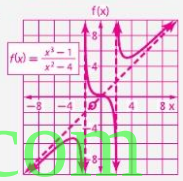


إجابات إضافية (تمرين موجه)

3A.



3B.



نصيحة دراسية

خط التقارب المائل يمنع خط التقارب المائل في الدوال النسبية التي تشتمل على بسط كثير الحدود أعلى درجة واحدة من مقام كثير الحدود.

مثال 3 حدد خط التقارب المائل

مثّل $f(x) = \frac{x^2+4x+4}{2x-1}$ بيانيًا.

الخطوة 1 أوجد الأصفار.

$x^2 + 4x + 4 = 0$ اجعل $g(x) = 0$.

$(x+2)^2 = 0$ عامل.

$x + 2 = 0$ بأخذ الجذر التربيعي لكل طرف.

$x = -2$ اطرح 2 من كل طرف.

يوجد صفر عند $x = -2$.

الخطوة 2 أوجد خط التقارب.

$2x - 1 = 0$ اجعل $h(x) = 0$.

$2x = 1$ اجمع 1 إلى كل طرف.

$x = \frac{1}{2}$ اقسم كل طرف على 2.

يوجد خط تقارب رأسي عند $x = \frac{1}{2}$.

حيث إن درجة البسط أكبر من درجة المقام، إذًا يوجد خط تقارب أفقي.

حيث إن الفارق بين درجة البسط ودرجة المقام يساوي 1، إذًا يوجد خط تقارب مائل.

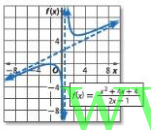
اقسم البسط على المقام لتحدد معادلة خط التقارب المائل.

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}x + \frac{9}{4} \\ 2x-1\overline{)\,x^2+4x+4} \\ (-)x^2 - \frac{1}{2}x \\ \hline \frac{9}{2}x + 4 \\ (-)\frac{9}{2}x - \frac{9}{4} \\ \hline \frac{25}{4} \end{array}$$

إن معادلة خط التقارب هي ناتج القسمة باستثناء أي باقٍ.

وبالتالي، فإن خط التقارب المائل هو الخط $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{9}{4}$.

الخطوة 3 ارسم خط التقارب. ثم استخدم قيم الجدول لتمثيل الدالة بيانيًا.



تمرين موجه

مثّل كل دالة بيانيًا. 3A، 3B. **انظر الهامش.**

3A. $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$

3B. $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-4}$

وفي بعض الحالات، قد يحتوي التمثيل البياني للدوال النسبية على **نقطة انفصال**، والتي تشبه الفجوة في التمثيل البياني. ويرجع ذلك إلى أن الدالة تكون غير محددة في هذه النقطة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التدريس المتمايز OL

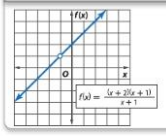
المتعلمون أصحاب النمط اللفظي/اللغوي اطلب من الطلاب كتابة قائمة بالنصائح لمساعدة شخص ما في رسم التمثيلات البيانية لدوال نسبية.

www.almanahj.com

المفهوم الأساسي نقطة الانفصال

الشرح إذا كانت $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$، $b(x) \neq 0$ عوامل $x - c$ لكل من $a(x)$ و $b(x)$، فسيوجد نقطة انفصال عند $x = c$.

مثال
$$f(x) = \frac{(x+2)(x+1)}{x+1}$$
$$= x + 2; x \neq -1$$

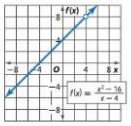


مثال 4 مثّل بيانيًا مع نقطة الانفصال

مثّل $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ بيانيًا.

لاحظ أن $\frac{x^2 - 16}{x - 4} = \frac{(x+4)(x-4)}{x-4} = x + 4$

وبالتالي، فإن التمثيل البياني لـ $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ هو التمثيل البياني لـ $f(x) = x + 4$ مع فجوة عند $x = 4$.



انتبه!
الفجوات تذكر أن العامل المشترك بين البسط والمقام يمكن أن يشير لوجود فجوة.

تمرين موجّه 4A، 4B. انظر الهامش.

مثّل كل دالة بيانيًا.

4A. $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 5}{x + 5}$

4B. $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 9x - 18}{x^2 - 9}$

التحقق من فهمك

مثال 1 مثّل كل دالة بيانيًا. 2، 1. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

1. $f(x) = \frac{x^4 - 2}{x^2 - 1}$

2. $f(x) = \frac{x^3}{x + 2}$

مثال 2 3. التدريب يتابع حسن موقع المهاجم بفريق كرة القدم لمدرسته الثانوية. وفي هذا الموسم حقق حتى الآن 7 من 11 هدفًا ويود تحسين نسبة الأهداف الخاصة به. فإذا كان بإمكانه تحقيق 4 أهداف متتابعة فسيكون تحديد نسبة أهدافه باستخدام الدالة $P(x) = \frac{7 + x}{11 + x}$.

a. مثّل الدالة بيانيًا. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

b. أي جزء من التمثيل البياني يعتبر ذي معنى في سياق المسألة؟ الجزء الموجود في الربع الأول

c. اذكر معنى تقاطع التمثيل البياني مع المحور الرأسي. 3c. يمثل نسبة أهدافه الأصلية في الملعب وهي 63.6%

d. ما معادلة خط التقارب الأفقي؟ اشرح معناها فيما يتعلق بنسبة أهداف حسن. $y = 1$؛ ويمثل هذا نسبة 100% والتي يتعذر عليه تحقيقها نظرًا لتنويته 4 أهداف بالفعل.

الأمثلة 3–4 مثّل كل دالة بيانيًا. 7–4. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

4. $f(x) = \frac{6x^2 - 3x + 2}{x}$

5. $f(x) = \frac{x^2 + 8x + 20}{x + 2}$

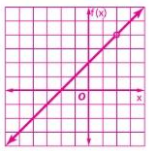
6. $f(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{x + 1}$

7. $f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x + 4}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال إضافي

4 مثّل $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ بيانيًا.



3 التمرين

التقييم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 7 للتحقّق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس الممارسات الرياضية

الاستنتاج يستوعب الطلاب المتفوقون في الرياضيات الكميات وعلاقاتها في المواقف المذكورة في المسائل. يستتبع التفكير الكمي عادات، مثل وضع الطالب تمثيلاً منطقيًا للمسألة التي يحلها؛ والتفكير في الوحدات المستخدمة في المسألة؛ والاهتمام بمعاني الكميات، وليس فقط بكيفية حسابها؛ ومعرفة الخصائص المختلفة للعمليات والأشياء واستخدامها بمرونة.

ملاحظات لحل التمرين

ورق مربعات بالنسبة للتمارين 1 إلى 42 و 51 إلى 53 سيحتاج الطلاب إلى ورق مربعات.

المتابعة

لقد استكشف الطلاب التعابير والدوال النسبية.

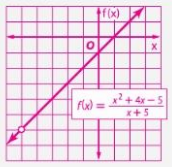
اسأل:

- كيف تنعكس خواص دالة نسبية في تمثيلها البياني؟

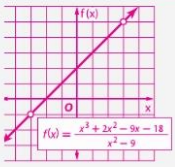
الإجابة النموذجية: تحدث خطوط التقارب الرأسية عند القيم التي تجعل المقام 0؛ وتحدث خطوط التقارب الأفقية عندما تكون درجة البسط أقل من أو مساوية لدرجة المقام؛ وتحدث خطوط التقارب المائلة عندما تختلف درجات البسط والمقام بعدد 1؛ وتحدث الفجوات عندما يتشارك البسط والمقام في عامل ذو حدين.

إجابات إضافية (تمرين موجه)

4A.



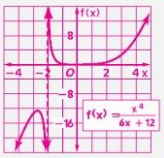
4B.



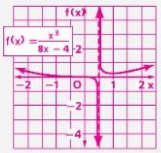
www.almanahj.com

إجابات إضافية

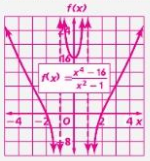
8.



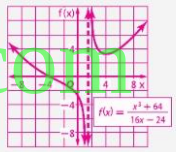
9.



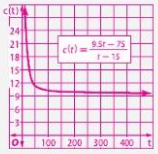
10.



11.



12a.



43. أوجه التشابه: يشتمل كلاهما على خطوط تقارب رأسية عند $x = 0$. يقترب كلاهما من 0 حيث تقترب x من $-\infty$ وتقترب من 0 حيث تقترب x من ∞. أوجه الاختلاف: $f(x)$ لديها فجوات عند $x = 1$ و $x = -1$ بينما $g(x)$ تشتمل على خطوط تقارب رأسية عند $x = \sqrt{2}$ و $x = -\sqrt{2}$ و $f(x)$ تشتمل على أصفار، ولكن $g(x)$ تشتمل على أصفار عند $x = 1$ و $x = -1$.

تمرين وحل المسائل

مثال 1

مثّل كل دالة بيانيًا. 11–8. انظر الهامش.

8. $f(x) = \frac{x^4}{6x+12}$

9. $f(x) = \frac{x^3}{8x-4}$

10. $f(x) = \frac{x^4-16}{x^2-1}$

11. $f(x) = \frac{x^3+64}{16x-24}$

12a. $c(t) = \frac{9.5t-75}{t-15}$

انظر إلى الهامش للاطلاع على التمثيل البياني.

مثال 2

12. **الروح المدرسية** يصممها رئيسة فيحلس الطلاب. أمرت بدرية بصنع قمصان لتشجيع طلاب تشجيعي. ويكلف كل قميص AED 9.50. كما يوجد رسوم إدارية بمبلغ AED 75. ويخطط مجلس الطلاب لبيع القمصان. ولكن سيحصل كل من أعضاء مجلس الطلاب الباقي عددهم 15 طالبًا على قميص مجانًا.

a. اكتب دالة لمتوسط تكلفة القميص الذي سيباع. مثّل الدالة بيانيًا.

b. ما متوسط التكلفة إذا تم طلب 200 قميص؟ وإذا تم طلب 500 قميص؟ **AED 10.68؛ AED 9.59**

c. كم عدد القمصان التي يجب طلبها ليصبح متوسط التكلفة أقل من AED 9.75؟ **أكثر من 885**

الأمثلة 2-3

مثّل كل دالة بيانيًا. 26–13. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

13. $f(x) = \frac{x}{x+2}$

14. $f(x) = \frac{5}{(x-1)(x+4)}$

15. $f(x) = \frac{4}{(x-2)^2}$

16. $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$

17. $f(x) = \frac{1}{(x+4)^2}$

18. $f(x) = \frac{2x}{(x+2)(x-5)}$

19. $f(x) = \frac{(x-4)^2}{x+2}$

20. $f(x) = \frac{(x+3)^2}{x-5}$

21. $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-4}$

22. $f(x) = \frac{4x^3}{2x^2+x-1}$

23. $f(x) = \frac{3x^2+8}{2x-1}$

24. $f(x) = \frac{2x^2+5}{3x+4}$

25. $f(x) = \frac{x^4-2x^2+1}{x^3+2}$

26. $f(x) = \frac{x^4-x^2-12}{x^3-6}$

27. **المقاومة** يوضح اختبار بالأمبير في دائرة كهربائية بها ثلاثة أجهزة مقاومة موصولين على التوالي من خلال المعادلة $I = \frac{V}{R_1+R_2+R_3}$، حيث إن V هو الجهد بالفولت في الدائرة وكل من R_1 و R_2 و R_3 هي مقاومات أجهزة المقاومة الثلاثة بالأوم.

a. افترض أن R_1 هو المتغير المستقل واكتب صيغة I هو المتغير التابع. مثّل الدالة بيانيًا إذا كان فولت $V = 120$، و $R_2 = 25$ أوم، و $R_3 = 75$ أوم. **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

b. اذكر معادلة خط التقارب الرأسي ونطاق R_1 و I للتمثيل البياني. **$R_1 = -100$؛ لا يوجد تقاطع لـ R_1؛ 1.2**

c. أوجد قيمة I عندما تكون قيمة R_1 140 أوم. **0.5 أمبير**

d. ما قيم المجال والمدى التي لها معنى في سياق المسألة؟ **$0 < I \leq 1.2$ و $R_1 \geq 0$**

مثال 4

مثّل كل دالة بيانيًا. 35–28. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

28. $f(x) = \frac{x^2-2x-8}{x-4}$

29. $f(x) = \frac{x^2+4x-12}{x-2}$

30. $f(x) = \frac{x^2-25}{x+5}$

31. $f(x) = \frac{x^2-64}{x-8}$

32. $f(x) = \frac{(x-4)(x^2-4)}{x^2-6x+8}$

33. $f(x) = \frac{(x+5)(x^2+2x-3)}{x^2+8x+15}$

34. $f(x) = \frac{3x^4+6x^3+3x^2}{x^2+2x+1}$

35. $f(x) = \frac{2x^4+10x^3+12x^2}{x^2+5x+6}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	8–35, 42, 44–61, 62	47–50, فردي 9–35	42, 51–62, زوجي 8–34
OL أساسي	36–39, 41–42, 44–62, فردي 9–35	8–35, 47–50	36–42, 44–46, 51–62
BL متقدم	36–61, (62, اختياري)		

www.almanahj.com

36. **الأعمال التجارية** اشترى علي كاسحة ثلوج مقابل AED 4500 ويعمل على إزالة الثلوج من مواقف السيارات للشركات المحلية. وفي كل مرة يزيل الثلوج من موقف سيارات، يتكبد تكلفة قدرها AED 50 للبنزين والصيانة.

a. اكتب الدالة التكسيرية التي تمثّلها متوسط التكلفة لكل عميل كدالة لعدد مواقف السيارات ثم مثلها بيانيًا. **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

b. ما خط التقارب للتمثيل البياني؟ $x = 0$ و $f(x) = 50$

c. لماذا يعتبر الربع الأول من التمثيل البياني هو الربع الوحيد ذا الصلة؟

d. كم عدد إجمالي مواقف السيارات التي يحتاج علي إلى إزالة الثلج منها ليصبح متوسط تكلفة موقف السيارات أقل من AED 80؟ 150

36c. الإجابة النموذجية: لا يمكن أن يكون عدد مواقف السيارات سالبًا.

37. **المعرفة المالية** اشترت هنا هاتفًا خلويًا جديدًا يتوفر فيه الوصول إلى الإنترنت. وقد كانت تكلفة الهاتف AED 150. وقد كانت تكلفة الاستخدام الشهرية AED 30 بالإضافة إلى AED 10 تكلفة الوصول إلى الإنترنت.

a. اكتب الدالة التكسيرية التي تمثل متوسط التكلفة الشهرية كدالة لعدد الشهور التي استخدمت فيها هنا الهاتف ثم مثّلها بيانيًا. **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

b. ما خط التقارب للتمثيل البياني؟ $x = 0$ و $f(x) = 40$

c. لماذا يعتبر الربع الأول من التمثيل البياني هو الربع الوحيد ذا الصلة؟

d. كم عدد الشهور التي سيصبح بعدها متوسط التكلفة الشهرية 45 AED؟ 30

37c. الإجابة النموذجية: لا يمكن أن يكون عدد الشهور أو متوسط التكلفة قيمة سالبة.

38. **التبرير المنطقي** تلعب سائي رياضة الكرة اللينة لمدرسة الفرسان الثانوية. وأثناء هذا الموسم حققت حتى الآن 4 ضربات من 12 من موقع الضارب. وهي عازمة على تحسين متوسط ضرباتها. فإذا كان بإمكانها الحصول على x ضربة متتالية، يمكن تحديد متوسط ضرباتها باستخدام $B(x) = \frac{4 + x}{12 + x}$. c. **تمثّل متوسط ضربات الأصلي لها وهي .333**

a. مثّل الدالة بيانيًا. **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

b. أي جزء من التمثيل البياني يعتبر ذا معنى في سياق المسألة؟ **الجزء الموجود في الربع الأول**

c. اذكر معنى تقاطع المحور الرأسي.

d. ما معادلة خط التقارب الأفقي؟ اشرح معناها فيما يتعلق بنسبة ضربات سائي.

38d. $y = 1$؛ يمثل هذا 100% وهي نسبة لا يمكنها تحقيقها حيث إنها أضاعت فرصة تحقيق ضربات 8 مرات.

مثّل كل دالة بيانيًا. 41-39. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

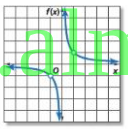
39. $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 6x + 5}$

40. $f(x) = \frac{x^2 - 10x - 24}{x + 2}$

41. $f(x) = \frac{6x^2 + 4x + 2}{x + 2}$

مسائل مهارات التفكير العليا — استخدام مهارات التفكير العليا

42. **مسألة غير محددة الإجابة** ارسم التمثيل البياني لدالة تكسيرية بخط تقارب أفقي $y = 1$ وخط تقارب رأسي $x = -2$. **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**



43. **التحدي** قارن بين الفرق بين $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x(x^2 - 2)}$ و $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x(x^2 - 2)}$ الموضحة إلى اليسار. **انظر الهامش.**

44. **التبرير** ما الفرق بين التمثيلين البيانيين لدالة $f(x) = x - 2$، $g(x) = \frac{(x + 3)(x - 2)}{x + 3}$؟

45. **الإثبات** دالة نسبية تضمن بالصيغة $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$. حيث إن $a(x)$ و $b(x)$ دالتان كثيرتا الحدود و $b(x) \neq 0$. برهن أن $f(x) = \frac{x}{a - b} + c$ دالة نسبية. $f(x) = \frac{x}{a - b} + \frac{c(a - b)}{(a - b)} \rightarrow \frac{x + ca - cb}{a - b}$ **45.**

46. **الكتابة في الرياضيات** كيف يمكن استخدام التحليل إلى العوامل لتحديد خط التقارب الرأسي أو نقطة الانفصال لدالة التكسيرية؟ **انظر الهامش.**

حقوق الطبع والتأليف © ماكجروهيل للتعليم مؤسسة McGraw-Hill Education

إجابة إضافية

46. الإجابة النموذجية: يمكنك تحديد خطوط التقارب لدالة نسبية من خلال التحليل إلى العوامل مقام دالة نسبية وتحديد القيم التي تجعل كل عامل مساوي لصفر. بعد التحليل إلى العوامل كل من بسط ومقام دالة نسبية، في حال وجود عامل مشترك $x - c$، إذًا توجد نقطة انفصال عند $x = c$.

651

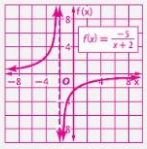
www.almanahj.com

4 التقييم

تعيين مصطلح الرياضيات اطلب من الطلاب كتابة الأمثلة الخاصة بهم للدوال النسبية وتمثيلها بيانيًا، مع توضيح أي خطوط تقارب أو نقاط انفصال.

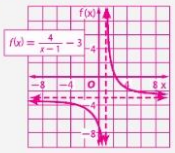
إجابات إضافية

51.



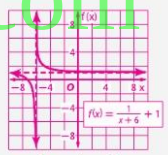
$D = \{x \mid x \neq -2\}$,
$R = \{f(x) \mid f(x) \neq 0\}$

52.



$D = \{x \mid x \neq 1\}$,
$R = \{f(x) \mid f(x) \neq -3\}$

53.



$D = \{x \mid x \neq -6\}$,
$R = \{f(x) \mid f(x) \neq 1\}$

تدريب على الاختبارات المعيارية

47. **الاحتمالات** من بين الدورات الست التي يقدمها قسم الجيولوجيا في مدرسة خولة، يجب أن تختار خولة اثنتين بالضبط منها. كم عدد التواقيع المحتملة للدورتين التي ستختارهما خولة إذا لم يكن هناك قيود على الدورات التي يمكنها اختيارها؟ C

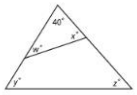
A 48
B 18
C 15
D 12

48. يتم تقديم المبيعات المتوقعة للعبة من خلال المعادلة $S(p) = \frac{3000}{2p + a}$. حيث إن $S(p)$ هو عدد اللعب المبيعة بالآلاف، و p هو سعر اللعبة بالدراهم و a هو ثابت. إذا تم بيع 100,000 لعبة مقابل AED 10 للعبة، فكم عدد اللعب التي سيتم بيعها بمقابل AED 20 للعبة؟ H

F 20,000
G 50,000
H 60,000
J 150,000

49. **إجابة شبكية** تمع خمس نقاط مختلفة في مستوى بحيث كان 3 من النقاط على المستقيم ℓ و 3 من النقاط على مستقيم آخر m. ما إجمالي عدد المستقيمات التي يمكن رسمها بحيث يمر كل مستقيم بنقطتين من النقاط على الأقل؟ 4

50. **الهندسة** في الشكل أدناه، ما قيمة $w + x + y + z$؟ B



A 140
B 280
C 320
D 360

مراجعة شاملة

مثّل كل دالة بيانيًا. واذكر المجال والمدى. (الدرس 3-9) **51-53. انظر الهامش.**

51. $f(x) = \frac{-5}{x+2}$
52. $f(x) = \frac{4}{x-1} - 3$
53. $f(x) = \frac{1}{x+6} + 1$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (الدرس 2-9)

54. $\frac{m}{m^2-4} + \frac{2}{3m+6}$ $\frac{5m-4}{3(m+2)(m-2)}$
55. $\frac{y}{y+3} - \frac{6y}{y^2-9}$ $\frac{y(y-9)}{(y+3)(y-3)}$
56. $\frac{5}{x^2-3x-28} + \frac{7}{2x-14}$ $\frac{7x+38}{2(x-7)(x+4)}$
57. $\frac{d-4}{d^2+2d-8} - \frac{d+2}{d^2-16}$ $\frac{-8d+20}{(d-4)(d+4)(d-2)}$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

58. $y^{\frac{5}{3}} \cdot y^{\frac{7}{3}}$ y^4
59. $x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{5}{4}}$ x^2
60. $\left(b^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{5}}$ $b^{\frac{1}{5}}$
61. $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$ $a^{\frac{1}{3}}$

مراجعة المهارات

62. **الانتقال** يأخذ كل من المسيد فهد وحرمه ابنتهم إلى المكتبة. يوضح الجدول مسافتهم من المنزل بعد أزمنة مختلفة.

الزمن (h)	المسافة (km)
0	0
1	55
2	110
3	165
4	165
5	225

a. أوجد متوسط معدل التغيير في مسافتهم من المنزل بين ساعة واحدة إلى 3 ساعات بعد مغادرة المنزل. 55 km/h

b. أوجد متوسط معدل التغيير في مسافتهم من المنزل بين 0 ساعة واحدة إلى 5 ساعات بعد مغادرة المنزل. 45 km/h

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التدريس المتمايز OL BL

التوسع ارسم خطًا مستقيمًا على اللوحة، ولكن اترك فجوة في المستقيم لبعض القيم الحقيقية للرمز x. على سبيل المثال، ارسم المستقيم ليمثل $y = x - 2$، ولكن اترك الفجوة عند النقطة (1, -1). اطلب من الطلاب كتابة دوال نسبية محتملة يمكن وصفها من خلال التمثيل البياني. توجد عدة إجابات ممكنة. طالما $x = 1$ تعتبر قيمة مستبعدة وتكون الصيغة المجولة لأبسط صورة للدالة هي $f(x) = x - 2$.

الإجابة النموذجية $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ أو $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1}$.

652 | الدرس 4-9 | التمثيل البياني للدوال النسبية

www.almanahj.com

9-4 التمثيل البياني للدوال النسبية

مختبر تقنية التمثيل البياني

يمكن استخدام حاسبة التمثيل البياني لاستكشاف التمثيل البياني للدوال النسبية.
تحتوي هذه التمثيلات البيانية على بعض الخواص التي لا تظهر بطلقا على التمثيل البياني للدوال كثيرات الحدود.

نشاط 1 مثّل بيانيًا مع خطوط التقارب

مثل $y = \frac{8x - 5}{2x}$ بيانيًا في نافذة العرض القياسية. أوجد معادلات أي خطوط تقارب. اذكر المجال والمدى للدالة.

الخطوة 1 أدخل المعادلة في القائمة Y= ثم مثّل بيانيًا.

خطوات العملية على الحاسبة: Y= (8 X,T,θ,n) − 5 ÷ (2 X,T,θ,n) ZOOM 6

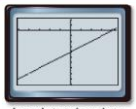
[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

الخطوة 2 تفحص التمثيل البياني.

بالنظر إلى المعادلة، يمكننا تحديد ما إذا كان $x = 0$. فإن الدالة غير محددة. تكون معادلة خط التقارب الرأسي هي $x = 0$. لاحظ ما يحدث لقيم y بينما تزيد x. وبينما تقل x، تقترب قيمة y من 4. إذا، فمعادلة خط التقارب الأفقي هي $y = 4$. يساوي المجال $\{x \mid x \neq 0\}$. ويساوي المدى جميع الأعداد الحقيقية.

النشاط 2 مثّل بيانيًا مع نقطة الانفصال

مثل $y = \frac{x^2 - 16}{x + 4}$ بيانيًا في النافذة [−5, 4.4] في [−10, 2] بعوامل قياس 1.


[−5, 4.4] scl: 1 by [−20, 2] scl: 1

الخطوة 1 حيث إن الدالة غير متصلة، ضع الحاسبة على النمط DOT.

خطوات العملية على الحاسبة: MODE ▼ ▼ ▼ ▼ ▶ ENTER

الخطوة 2 تفحص التمثيل البياني.

يبدو هذا التمثيل البياني كمستقيم بدون فجوة في الاتصال $x = -4$. ويحدث ذلك لأن انفصام يكون 0 عندما يكون $x = -4$. وبالتالي، تكون الدالة غير محددة عندما يكون $x = -4$.

إذا **تتبعت** التمثيل البياني، عندما تصل إلى $x = -4$، فستجد أنه لا يوجد قيمة مطابقة لـ y.

تمارين

استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل كل دالة بيانيًا. اكتب الإحداثي x لأي نقاط انفصال و/أو معادلات لأي خط تقارب. اذكر المجال والمدى.

1. $f(x) = \frac{1}{x}$ $x = 0, y = 0; D = \{x \mid x \neq 0\}, R = \{y \mid y \neq 0\}$
2. $f(x) = \frac{x}{x + 2}$ $x = -2, y = 1; D = \{x \mid x \neq -2\}, R = \{y \mid y \neq 1\}$
3. $f(x) = \frac{-2}{x - 4}$ $x = 4, y = 0; D = \{x \mid x \neq 4\}, R = \{y \mid y \neq 0\}$
4. $f(x) = \frac{2x}{3x - 6}$ $x = 2, y = \frac{2}{3}; D = \{x \mid x \neq 2\}, R = \left\{y \mid y \neq \frac{2}{3}\right\}$
5. $f(x) = \frac{4x + 2}{x - 1}$ $x = 1, y = 4; D = \{x \mid x \neq 1\}, R = \{y \mid y \neq 4\}$
6. $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ نقطة الانقطاع عند $x = -3$؛ $D = \{x \mid x \neq -3\}$، $R =$ {جميع الأعداد الحقيقية}

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

من الملموس إلى المجرد

تمرين 5 اطلب من الطلاب تطبيق استنتاجاتهم لرسم التمثيل البياني لدالة نسبية عامة.

توسيع المفهوم

عند الإعداد لدراسة تغير عكسي، اطلب من الطلاب تمثيل بياني بيانيًا لـ $y = \frac{1}{x}$ و $y = \frac{2}{x}$ و $y = \frac{3}{x}$. و $y = \frac{4}{x}$ على نفس الشاشة وصف التشابهات بينهما. تعتبر محاور الإحداثي خطوط تقارب للتمثيلات البيانية لكافة الدوال الأربع.

1 التركيز

الهدف استخدام حاسبة التمثيل البياني لاستكشاف التمثيلات البيانية للدوال النسبية.

المواد الخاصة لكل مجموعة

- حاسبة التمثيل البياني

نصيحة للتدريس

قد يجد الطلاب أنه من الضروري أن يجربوا من خلال خاصية نمط التمثيل البياني الموجودة على يسار المعادلة في محرر الدالة (قائمة Y=). يمكنهم البدء باستخدام النمط المستقيم المعتاد، الموضح بواسطة رمز الخط المائل العكسي. يبطئ نمط المسار التمثيل البياني وبالتالي يمكن للطلاب تتبعه بشكل أكثر سهولة. فالرمز الخاص به عبارة عن خط للآلة الحاسبة، علامة سالب تلمس الصفر.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

اطلب من الطلاب العمل في مجموعات ثنائية لإكمال النشاطين 1 و 2.

- قد يحتاج الطلاب إلى تتبع تمثيل بياني أعلى من النافذة الحالية من أجل تحديد خطوط التقارب بالتحديد.
- التمثيل البياني بواسطة الآلة الحاسبة في وضع المتصل قد يبدو وكأنه يرسم تمثيلاً بيانيًا لخط تقارب رأسي عندما يقوم بمجرد وصل بيكسلين متسلسلين على تمثيل بياني. والتحول لوضع التنقيط سيزيل هذه الإمكانية.

تمرين اطلب من الطلاب إتمام التمارين من 1 إلى 6.

3 التمرين

التقييم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 3 لتقويم ما إذا كان يمكن للطلاب استخدام حاسبة التمثيل البياني في التمثيل البياني لدوال الجذر النوني.

www.almanahj.com

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 5-9 كتابة ورسم تمثيل بياني لمعادلات خطية

الدرس 5-9 التعرف على مسائل التغير الطردي والمشترك وحلها. التعرف على مسائل التغير العكسي والمركّب وحلها.

بعد الدرس 5-9 تمثيل الدوال الزائدية بيانيًا.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اسأل:

- إذا كان ارتفاع منحدر النزلج يزيد، فماذا يحدث لطول قمة منحدر النزلج؟ يزيد.
- إذا كانت h تنقص، فماذا يحدث لـ $\frac{\ell}{h}$؟ تنقص.
- أي قيمة تظل ثابتة؟ النسبة $\frac{\ell}{h}$ التي تساوي 1.5

الدرس 5-9

5-9 دوال التغير

السابق	الحالي	لماذا؟
• كتبت ومثّلت المعادلات الخطية بيانيًا.	1 التعرف على مسائل التغير الطردي والمشترك وحلها.	• عند بناء منحدرات التزلج، حدد مازن أن أفضل المنحدرات كانت التي زاد فيها طول أعلى المنحدر عن ارتفاع المنحدر بـ 1.5 ضعف.
	2 التعرف على مسائل التغير العكسي والمركب وحلها.	وكما هو موضح في الجدول، فإن طول أعلى المنحدر يعتمد على ارتفاع المنحدر. ويزيد الطول كلما زاد الارتفاع. ولكن تظل النسبة كما هي أي تكون ثابتة.

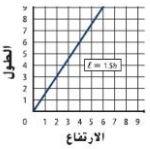
الطول (ℓ)	الارتفاع (h)	النسبة $\frac{\ell}{h}$
3	2	1.5
6	4	1.5
9	6	1.5
12	8	1.5

ويمكن كتابة المعادلة $\frac{\ell}{h} = 1.5$ في الصورة $\ell = 1.5h$

وبالتالي فإن الطول يتغير طرديًا مع ارتفاع المنحدر.

1 التغير الطردي والمشترك تعتبر العلاقة الممثلة بـ $\ell = 1.5h$ مثالاً على التغير الطردي. يمكن التعبير عن **التغير الطردي** في الصورة $y = kx$.

وفي هذه المعادلة، يطلق على k **ثابت التغير**.



لاحظ أن التمثيل البياني لـ $\ell = 1.5h$ هو خط مستقيم يمر بنقطة الأصل. يعتبر التغير الطردي حالة خاصة لمعادلة مكتوبة في صيغة الميل والمقطع $y = mx + b$. عندما يكون $m = k$ و $b = 0$، فإن $y = mx + b$ تصبح $y = kx$. إذا، فإن ميل معادلة التغير الطردي هو ثابت التغير الخاص بها.

وللتعبير عن التغير الطردي، نقول إن y تتغير طرديًا مع x. بعبارة أخرى، عندما تزيد x، تزيد y أو تنقص بمعدل ثابت.

مفردات جديدة

- **التغير الطردي** direct variation
- **ثابت التغير** constant of variation
- **التغير المشترك** joint variation
- **التغير العكسي** inverse variation
- **التغير المركب** combined variation

ممارسات في الرياضيات

1 فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
4 استخدام النماذج الرياضية.

المفهوم الأساسي التغير الطردي

الشرح إذا كان y تتغير طرديًا مع x، فإن هناك ثابت تغير صفري k بحيث يكون $y = kx$. ويطلق عليها غالبًا ثابت التغير.

مثال إذا كان $x = 7$ و $y = 3x$، فإن $y = 3(7)$ أو 21.

إذا عرفت أن y تتغير طرديًا مع x ومجموعة واحدة من القيم. يمكنك استخدام التناسب لإيجاد المجموعة الأخرى من القيم المقابلة.

$$y_1 = kx_1 \quad \text{و} \quad y_2 = kx_2$$

$$\frac{y_2}{x_2} = k$$

بالتالي $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$

باستخدام خواص المساواة، يمكنك إيجاد العديد من علاقات التناسب الأخرى التي تربط بين نفس قيم x و y.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

www.almanahj.com

1 التغير الطردي والتغير المشترك

المثال 1 يوضح كيفية استخدام التناسب لتحليل تغير طردي بسيط. **المثال 2** يوضح كيفية حل معادلة تغير مشترك.

التقييم التكويني

استخدم أسئلة "تمرين موجه" الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1. إذا كان y يتغير طرديًا مع x و $y = -15$ حيث يكون $x = 5$، فأوجد y حيث يكون $x = 3$. -9
2. افترض أن y يتغير بشكل مشترك مع x و z. أوجد y حيث تكون $x = 10$ و $z = 5$، إذا كانت $y = 12$ حيث تكون $z = 8$ و $x = 23$ 52

انتبه!

تجنب الأخطاء ناقش مع الطلاب كيفية كتابة معادلات التغير التي تشتمل على ثابت للتغير.

التركيز على محتوى الرياضيات

التغير الطردي والعكسي يمكن في بعض الأحيان تحديد نوع التغير الموجود من جدول القيم للحصول على x و y. إذا كان لناتج القسمة $\frac{y}{x}$ قيمة ثابتة، فإن y يتغير طرديًا مع x. إذا كان لناتج الضرب xy قيمة ثابتة، فإن y ينغير عكسيًا مع x.

مثال 1 التغير الطردي

إذا تغيرت y طرديًا مع x و $y = 15$ عندما يكون $x = -5$، أوجد y عندما يكون $x = 7$.

استخدم التناسب الذي يربط هذه القيم ببعضها البعض.

التغير الطردي

$y_1 = 15,\ x_1 = -5,\ x_2 = 7$

اضرب ضربًا تقاطعيًا.

بسّط.

اقسم كل طرف على (-5).

تمرين موجه

1. إذا كان r تتغير طرديًا مع t و $r = -20$ عندما يكون $t = 4$، فأوجد r عندما يكون $t = -6$. 30

من أنواع التغير الأخرى التغير المشترك. يحدث **التغير المشترك** عندما تتغير كمية واحدة طرديًا مع ناتج ضرب كميتين أو أكثر من الكميات الأخرى.

المفهوم الأساسي التغير المشترك

الشرح y تتغير بشكل مشترك مع x و z إذا كان هناك ثابت غير صفري k بحيث يكون $y = kxz$.

مثال إذا كان $y = 5xz$ و $x = 6$ و $z = -2$، إذا $y = 5(6)(-2)$ أو -60.

نصيحة دراسية

التغير المشترك يعتبر بعض علماء الرياضيات التغير المشترك نوعًا خاصًا من التغير المركب.

إذا عرفت أن y تتغير بشكل مشترك مع x و z ومجموعة واحدة من القيم. يمكنك استخدام التناسب لإيجاد المجموعة الأخرى من القيم المتقابلة.

$y_1 = kx_1z_1$ و $y_2 = kx_2z_2$

$\frac{y_1}{x_1z_1} = k$ و $\frac{y_2}{x_2z_2} = k$ وبالتالي $\frac{y_1}{x_1z_1} = \frac{y_2}{x_2z_2}$

مثال 2 التغير المشترك

افترض أن y يتغير بشكل مشترك مع x و z. أوجد y عندما تكون $x = 9$ و $z = 2$ إذا كانت $y = 20$ عندما تكون $x = 3$ و $z = 5$.

استخدم التناسب الذي يربط هذه القيم ببعضها البعض.

$y_1 = 20,\ x_1 = 5,\ z_1 = 3,\ x_2 = 9,\ z_2 = 2$

اضرب ضربًا تقاطعيًا.

بسّط.

اقسم كل طرف على 15.

تمرين موجه

2. افترض أن r تتغير بشكل مشترك مع v و t. أوجد r عندما يكون $v = 2$ و $t = 8$، إذا كان $r = 70$ عندما يكون $v = 10$ و $t = 4$. 28

www.almanahj.com

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

655

2 التغير العكسي والتغير المركَّب

المثال 3 يوضح كيفية استخدام تناسب لحل مسألة تغير عكسي. **المثال** 4 يقدم مثالاً على التطبيق السياقي للتغير العكسي. **المثال** 5 يوضح كيفية حل معادلة تغير مركَّب.

مثال إضافي

3 إذا كان r يتغير عكسيًا مع t و $r = -6$ حيث يكون $t = 2$، فأوجد r حيث يكون $t = -7$. $\frac{12}{7}$

نصيحة للمعلمين الجدد

طريقة بديلة في المثال 3، قد يرغب الطلاب في حل المسألة باستخدام المعادلة $a_1b_1 = a_2b_2$.

نصيحة للمعلمين الجدد

الاستنتاج المنطقي ساعد الطلاب على استيعاب الفرق بين نوعي التغير باستخدام مثال السرعة والمسافة ووقت القيادة. عند القيادة على معدل محدد، تزيد المسافة بزيادة وقت القيادة (طردي). ومع ذلك، لمسافة محددة، يقل الوقت اللازم بزيادة السرعة (عكسي).

2 التغير العكسي والمركب

نوعان آخران من أنواع التغير. إذا كانت الكميتان x و y بينهما **علاقة تغير عكسي**، فإن ناتج ضربهما يساوي الثابت k.

وتوصف علاقة التغير العكسي في أغلب الأحيان بأنها زيادة إحدى الكميات مع تناقص الكمية الأخرى. فعلى سبيل المثال، بتغير كل من السرعة والزمن لمسافة ثابتة عكسيًا مع بعضهما البعض؛ وكلما زادت سرعتك، قل الزمن الذي تستغرقه للوصول.

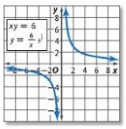
المفهوم الأساسي التغير العكسي

الشرح y تتغير عكسيًا مع x إذا كان هناك ثابتًا غير صفري k بحيث يكون $xy = k$ أو $y = \frac{k}{x}$، حيث يكون $x \neq 0$ و $y \neq 0$.

مثال إذا كان $xy = 2$ و $x = 6$، فإن $y = \frac{2}{6}$ أو $\frac{1}{3}$.

نصيحة دراسية

التغير الطردي والعكسي يمكنك تحديد نوع التغير بالاطلاع على جدول قيم كل من x و y. إذا كان ناتج قسمة $\frac{y}{x}$ يساوي قيمة ثابتة، فإن y تتغير طرديًا مع x. إذا كان ناتج ضرب xy يساوي قيمة ثابتة، فإن y تتغير عكسيًا مع x.



افترض أن y تتغير عكسيًا مع x بحيث يكون $xy = 6$ أو $y = \frac{6}{x}$.

ويوضح التمثيل البياني لهذه المعادلة على اليسار، حيث إن k قيمة موجبة، ومع تزايد قيمة x، تتناقص قيمة y.

لاحظ أن التمثيل البياني للتغير العكسي يكون دالة عكسية

ويمكن استخدام التناسب مع التغير العكسي لحل المسائل التي تكون فيها الكميات معروفة. وتعتبر علاقة التناسب التالية واحدة من علاقات التناسب العديدة التي يمكن تشكيلها.

$x_1y_1 = k$ ، $x_2y_2 = k$

$x_1y_1 = x_2y_2$ خاصية التعويض في المعادلة

$\frac{x_1}{y_2} = \frac{x_2}{y_1}$ اقسم كل طرف على y_1y_2.

مثال 3 التغير العكسي

إذا كانت a تتغير عكسيًا مع b و $a = 28$ عندما يكون $b = -2$، فأوجد a عندما يكون $b = -10$.

استخدم التناسب الذي يربط هذه القيم ببعضها البعض.

$\frac{a_1}{b_2} = \frac{a_2}{b_1}$ تغير عكسي

$\frac{28}{-10} = \frac{a_2}{-2}$ $a_1 = 28, b_2 = -10, a_2 = ?, b_1 = -2$

$28(-2) = -10(a_2)$ اضرب ضربًا تقاطعيًا.

$-56 = -10(a_2)$ بسّط.

$5\frac{3}{5} = a_2$ اقسم كل طرف على -10.

تمرين موجّه

3. إذا كانت x تتغير عكسيًا مع y وكانت $x = 24$ عندما كانت $y = 4$، فأوجد x عندما تكون $y = 12$. 8

يستخدم التغير العكسي في أغلب الأحيان في مواقف من الحياة اليومية.

حقوق الطبع والتأليف © بمحفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

www.almanahj.com

مثال 4 من الحياة اليومية اكتب علاقة التغير العكسي وحلها

الموسيقى يتغير طول أوتار الكمان عكسيًا مع تردد اهتزازاته. ويهتز وتر كمان طوله 25.4 بوصات بتردد 512 دورة في الثانية. أوجد تردد وتر كمان طوله 20.3 بوصات.

افترض أن $v_1 = 25.4$ و $f_1 = 512$ و $v_2 = 20.3$. أوجد الحل لإيجاد قيمة f_2.

$v_1 f_1 = v_2 f_2$	المعادلة الأصلية
$25.4 \cdot 512 = 20.3 \cdot f_2$	$v_1 = 10,\ f_1 = 512,\ v_2 = 8$
$\frac{13004.8}{20.3} = f_2$	اقسم كل طرف على 8.
$640.6 = f_2$	بسّط.

يهتز وتر الكمان الذي يبلغ طوله 20.3 سنتيميترات بتردد 640 دورة في الثانية.

تمرين موجّه

4. يناسب الحجول الظاهر لأحد الأجسام عكسيًا مع المسافة التي يبعدها الشخص عن الجسم. ويبعد كوكب الأرض بنحو 150 مليون كيلومتر عن الشمس. ويبعد المشتري 778.3 مليون كيلومتر عن الشمس. أوجد كم سيبدو محيط الشمس أكبر من على الأرض مما هو عليه من المشتري. **5.2 أضعاف أكبر.**

الربط بالحياة اليومية

عندما تنقر وتر الآلة الموسيقية، يبدأ في الاهتزاز ذهابًا وإيابًا. وتتسبب ذلك في انتقال المقاطة الميكانيكية عبر الهواء في صورة موجات. ويطلق على عدد المرات التي تصطدم بها الموجات بطبلة الأذن في الثانية لدينا التردد. وكلما زاد عدد الموجات في الثانية، كلما زادت حدة الصوت.

من أنواع التغير الأخرى التغير المركب. يحدث **التغير المركب** عندما تختلف كمية واحدة طرديًا و/ أو عكسيًا مع اثنين أو أكثر من الكميات الأخرى.

إذا عرفت أن y تتغير طرديًا مع x وتتغير y عكسيًا مع z ومجموعة واحدة من القيم. يمكنك استخدام التناسب لإيجاد المجموعة الأخرى من القيم المتقابلة.

$$\frac{y_2 z_2}{x_2} = k \quad , \quad y_1 = \frac{kx_1}{z_1}$$

$$\frac{y_1 z_1}{x_1} = \frac{y_2 z_2}{x_2} \text{ وبالتالي } \frac{y_1 z_1}{x_1} = k$$

مثال 5 التغير المركّب

افترض أن f تتغير طرديًا مع g وأن f تتغير عكسيًا مع h. أوجد g عندما يكون $f = 18$ و $h = -3$، إذا كان $g = 24$ عندما يكون $h = 2$ و $f = 6$.

أولاً احسب التناسب الصحيح للمعطيات المخدمة.

g تتغير طرديًا مع f، إذا ثابتي g في البسط. h تتغير عكسيًا مع f، إذا ثابتي h في المقام.

$$f_1 = \frac{kg_1}{h_1} \quad , \quad f_2 = \frac{kg_2}{h_2}$$

أوجد الحل لإيجاد k.

$$k = \frac{f_1 h_1}{g_1} \quad , \quad k = \frac{f_2 h_2}{g_2}$$

اجعل ملاقي التناسب متساويين.

$$\frac{f_1 h_1}{g_1} = \frac{f_2 h_2}{g_2}$$

$f_1 = 6,\ g_1 = 24,\ h_1 = 2,\ f_2 = 18,\ h_2 = -3$

$$\frac{6(2)}{24} = \frac{18(-3)}{g_2}$$

اضرب ضربًا تقاطعيًا.

$$24(18)(-3) = 6(2)(g_2)$$

بسّط.

$$-1296 = 12g_2$$

اقسم كل طرف على 12.

$$-108 = g_2$$

عندما تكون $f = 18$ و $h = -3$، ستكون قيمة g تساوي -108.

تمرين موجّه

5. افترض أن p تتغير طرديًا مع r وأن p تتغير عكسيًا مع t. أوجد t عندما تكون $r = 10$ و $p = -5$، إذا كانت $t = 20$ عندما تكون $p = 4$ و $r = 2$. **−80**

نصيحة دراسية

التغير المركب

تظهر الكميات التي تتغير طرديًا في البسط.

وتظهر الكميات التي تتغير عكسيًا في المقام.

أمثلة إضافية

4 الفضاء استخدم المعلومات المأخوذة من *التمرين الموجه* وحقيقة أن كوكب الزهرة يبعد مسافة 107.8 مليون كيلو متر عن الشمس. كم سيبدو قطر الشمس أكبر على الزهرة منه من الأرض؟ أكبر بنحو 1.39 مرة.

5 افترض أن f يتغير طرديًا مع g. و f يتغير عكسيًا مع h. أوجد g حيث يكون $f = 6$ و $h = -5$. إذا كان $g = 18$ حيث يكون $h = 3$ و $f = 5$. -36

التدريس باستخدام التكنولوجيا

التسجيل الصوتي قم بعمل تسجيل لعدد من أمثلة التغير مقروءة بصوت عال. قم بتشغيل التسجيلات للصف (أو حملهم على مشغلات الوسائط المتنقلة الخاصة بالطلاب) واطلب من الطلاب كتابة وحل مسائل التغير.

www.almanahj.com

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

657

3 التمرين

التقييم التكويني

استخدم التمارين 6-1 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس الممارسات الرياضية

استخدام النماذج يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات تطبيق الرياضيات التي يعرفونها لحل المسائل الناشئة في الحياة اليومية، وتحليل العلاقات من منطلق الرياضيات لاستخلاص الاستنتاجات، وتفسير نتائج الرياضيات في سياق الحال.

المتابعة

لقد استكشف الطلاب الدوال المتغيرة.

اسأل:

- كيف يمكن أن يساعدك تحليل الدالة النسبية جبريًا و بيانيًا على رؤية "الصورة كاملة"؟ الإجابة النموذجية: يمكن للتحليل الجبري أن يساعدك في تحديد نقاط التقاطع التي قد تكون غير واضحة أو غير ملحوظة عند مشاهدة التمثيل البياني للدالة. يمكن للتحليل البياني أن يساعدك في رؤية خطوط التقارب والسلوك الطرفي للدالة.

التحقق من فهمك

الأمثلة 3-1

1. إذا كانت y تتغير طرديًا مع x وكانت $y = 12$ عندما $x = 8$، فأوجد y حيث $x = 14$. 21

2. افترض أن y يتغير بشكل مشترك مع x و z. أوجد y عندما تكون $x = 9$ و $z = -3$، إذا كانت $y = -50$ عندما تكون z تساوي 5 و x تساوي 10−. 27−

3. إذا كانت y تتغير عكسيًا مع x وكانت $y = -18$ عندما $x = 16$، فأوجد x عندما تكون $y = 9$. 32−

مثال 4

4. **السفر** رسمت خريطة ثولاية إلينوي بمقياس رسم بحيث تمثل كل سنتيمترين 15 km . فكم تبعد شيكاغو وروكفورد إذا كانت المسافة بينهما على الخريطة 12 cm؟ 90 km

مثال 5

5. افترض أن a تتغير طرديًا مع b وأن a تتغير عكسيًا مع c. أوجد b عندما تكون $a = 8$ وتكون $c = -3$، إذا كانت $b = 16$ عندما تكون $c = 2$ وتكون $a = 4$. 48−

6. افترض أن d تتغير طرديًا مع f وأن d تتغير عكسيًا مع g. أوجد g عندما تكون $d = 6$ وتكون $f = -7$، إذا كانت $g = 12$ عندما تكون $d = 9$ وتكون $f = 3$. 42−

التمرين وحل المسائل

مثال 1

إذا كانت x تتغير طرديًا مع y، فأوجد x عندما تكون $y = 8$.

7. $x = 6$ عندما تكون $y = 32$ 1.5

8. $x = 11$ عندما تكون $y = -3$ $-\frac{88}{3}$

9. $x = 14$ عندما تكون $y = -2$ 56−

10. $x = -4$ عندما تكون $y = 10$ 3.2−

11. **القمر** كان وزن رائد الفضاء نيل آرمسترونغ، أول من مشى على سطح القمر، على الأرض 163.3 kg وهو يحمل جميع معداته، بينما كان وزنه على القمر 27.2 kg. اكتب معادلة تربط بين الوزن على القمر m والوزن على الأرض w. $m = \frac{1}{6}w$

مثال 2

إذا كانت a تتغير بشكل مشترك مع b و c، فأوجد a عندما تكون $b = 4$ و $c = -3$.

12. $a = -96$ عندما تكون $b = 3$ و $c = -8$ 48−

13. $a = -60$ عندما تكون $b = -5$ و $c = 4$ 36−

14. $a = -108$ عندما تكون $b = 2$ و $c = 9$ 72

15. $a = 24$ عندما تكون $b = 8$ و $c = 12$ 3−

16. **التمثيل بالنماذج** وفقًا لشركة نيلسن فإن متوسط مشاهدة المواطن الأمريكي للتلفاز هي 4 ساعات يوميًا.
   a. اكتب معادلة لتمثيل متوسط عدد الساعات الذي يُقضى في مشاهدة التلفاز من قبل عدد m من أفراد الأسرة أثناء فترة من d أيام. $t = 4md$
   b. افترض أن أفراد أسرة يشاهدون التلفاز كل يوم بنفس مقدار متوسط مشاهدة المواطن الأمريكي. فكم عدد الساعات التي ستقضيها أفراد أسرتك في مشاهدة التلفاز أسبوعيًا؟ **الإجابة النموذجية: لأربعة أفراد من أفراد الأسرة، 112 ساعة**

مثال 3

إذا كانت f تتغير عكسيًا مع g، فأوجد f عندما تكون $g = -6$.

17. $f = 15$ عندما تكون $g = 9$ 22.5−

18. $f = 4$ عندما تكون $g = 28$ $-\frac{56}{3}$

19. $f = -12$ عندما تكون $g = 19$ 38

20. $f = 0.6$ عندما تكون $g = -21$ 2.1

21. **الخدمة المجتمعية** يجمع طلاب مدرسة الثانوية كل عام التبرعات الفعلية لحجرة مؤن الطعام المحلية. ويخططون لتوزيع المنشورات الدعائية على المنازل بالحي طالبين من السكان التبرع. وفي العام الماضي، تمكن 12 طالبًا من توزيع 1000 منشور دعائي في أربع ساعات.
   a. اكتب معادلة تربط بين عدد الطلاب s ومقدار الزمن t المستغرق لتوزيع 1000 منشور دعائي. $s = \frac{48}{t}$
   b. كم سيبلغ الزمن المستغرق في توزيع 15 طالبًا لنفس العدد من المنشورات هذا العام؟ 3.2 h

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	7-24, 48, 50-72	53-56, فردي 7-23	48, 50-52, 57-72, زوجي 8-24
OL أساسي	44-48, 50-72, فردي 7-43	53-56, 7-24	50-52, 57-72, زوجي 25-48
BL متقدم	25-66, (اختياري: 67-72)		

www.alnahj.com

مثال 4

22. **الطيور** عندما تهاجر مجموعة من أوز الثلج، تتغير المسافة التي تطيرها طرديًا مع مقدار الزمن الذي تقضيه في الطيران.

a. هاجرت مجموعة من أوز الثلج مسافة 375 km في 7.5 h. اكتب معادلة تغير طردي تمثل هذه الحالة.
$d = 50t$

b. في كل عام، يهاجر الأوز 3000 km من موطنهم في الشتاء بجنوب غرب الولايات المتحدة الأمريكية إلى موطنهم في الصيف بأقصى الشمالي الكندي. قدّر عدد ساعات الطيران المستغرقة في هجرة الأوز. 60 ساعة

مثال 5

23. افترض أن a تتغير طرديًا مع b وأن a تتغير عكسيًا مع c. أوجد b عندما تكون $a = 5$ وتكون $c = -4$، إذا كانت $b = 12$ عندما تكون $c = 3$ وتكون $a = 8$. -10

24. افترض أن x تتغير طرديًا مع y وأن x تتغير عكسيًا مع z. أوجد z عندما تكون $x = 10$ وتكون $y = -7$، إذا كانت $z = 20$ عندما تكون $x = 6$ وتكون $y = 14$. -6

حدد إن كانت كل علاقة توضح تغيرًا طرديًا أم عكسيًا أم لا توضح أيًا منها.

25. طردي
26. عكسي
27. لا هذا ولا ذاك

25.

x	y
4	12
8	24
16	48
32	96

26.

x	y
8	2
4	4
−2	−8
−8	−2

27.

x	y
2	4
3	9
4	16
5	25

28. إذا كان y يتغير عكسيًا مع x، و $y = 6$ حيث $x = 519$، فأوجد x حيث $x = 2$. 57

29. إذا كانت x تتغير عكسيًا مع y وكانت $x = 16$ عندما كانت $y = 5$، فأوجد x عندما تكون $y = 20$. 4

30. افترض أن a تتغير طرديًا مع b وأن a تتغير عكسيًا مع c. أوجد b عندما تكون $a = 7$ وتكون $c = -8$، إذا كانت $b = 15$ عندما تكون $c = 2$ وتكون $a = 4$. -105

31. افترض أن x تتغير طرديًا مع y وأن x تتغير عكسيًا مع z. أوجد z عندما تكون $x = 8$ وتكون $y = -6$، إذا كانت $z = 26$ عندما تكون $x = 8$ وتكون $y = 13$. -12

اذكر إذا كانت كل معادلة تمثل تغيرًا طرديًا أم مشتركًا أم عكسيًا أم مركبًا، ثم عيّن ثابت التغير.

32. طردي؛ 2.75
33. عكسي؛ -2
34. مشترك؛ 3
35. مركب؛ 10
36. طردي؛ -11
37. طردي؛ 4
38. مركب؛ 9
39. طردي؛ -2
40. طردي؛ 27
41. عكسي؛ 7
42. عكسي؛ -10
43. مشترك؛ 20

32. $\frac{x}{y} = 2.75$ 33. $fg = -2$ 34. $a = 3bc$ 35. $10 = \frac{xy^2}{z}$

36. $y = -11x$ 37. $\frac{n}{p} = 4$ 38. $9n = pr$ 39. $-2y = z$

40. $a = 27b$ 41. $c = \frac{7}{d}$ 42. $-10 = gh$ 43. $m = 20cd$

44. **الدقة** يتغير حجم الغاز v عكسيًا مع ضغطه p وطرديًا مع درجة حرارته t.

a. اكتب معادلة تمثل حجم الغاز بدلالة ضغطه ودرجة حرارته. هل هذه المعادلة تمثل تغيرًا طرديًا أم عكسيًا أم مشتركًا أم مركبًا؟ $v = \frac{kt}{p}$؛ مركب

b. يبلغ حجم أحد الغازات 8 L ويبلغ درجة حرارته 275 كلفن ويبلغ ضغطه 1.25 بيمتياس الضغط الجوي. فإذا تم ضغط الغاز إلى 6 L وتسخينه إلى درجة حرارة 300 كلفن، فكم سيكون ضغطه؟
نحو 1.82 بيمتياس الضغط الجوي أو $\frac{20}{11}$ atm

c. إذا ظل الحجم ينقص مقداره، بينما انخفض الضغط إلى النصف. فما الذي قد حدث في درجة الحرارة؟ انخفضت إلى النصف.

45. **العطلات** يتغير الزمن الذي يستغرقه سائق وأخوه في الوصول إلى خور دبي عكسيًا مع متوسط معدل سرعتهم.

a. إذا كانا على بعد 800 mi، فاكتب معادلة تربط بين زمن السفر ومتوسط معدل سرعتهم ثم مثّلها بيانيًا. انظر الهامش.

b. ما أدنى قيمة لمتوسط السرعة تسمح لهم بالوصول خلال 18 h؟ $44.\overline{4}$ mi/h

التدريس المتمايز OL AL

إذا كان الطلاب يواجهون صعوبة في الحفاظ على الصيغ الخاصة بدوال التغير المختلفة مستقيمة،

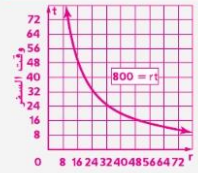
إذن اطلب من الطلاب كتابة الصيغ باستخدام ألوان مختلفة لكل متغير ولون آخر للرمز k. على سبيل المثال: التغير الطردي: $y = kx$؛ التغير المشترك: $y = kxz$؛ والتغير العكسي: $y = \frac{k}{x}$.

تدريس الممارسات الرياضية

الدقة يحاول الطلاب المتفوقون في الرياضيات استخدام تعريفات واضحة في استنتاجاتهم وسيحسبون بدقة وكفاءة وسيستفيدون جيدًا من التعريفات.

إجابة إضافية

45a.



www.almanahj.com

حقوق الطبع والتأليف © مجموعة تعليم مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريس الممارسات الرياضية

النقد يُمكن للطلاب المتفوقين في مادة الرياضيات أيضًا المقارنة بين كفاءة فرضيتين مقبولتين والتفريق بين المنطق السليم أو القويم وبين المنطق الخاطئ، وفي حالة وجود خطأ في فرضية ما، يستطيعون توضيح ماهية هذا الخطأ.

46. **الموسيقى** يعتمد العدد الأقصى للأغاني التي يمكن لمشغل صوت رقمي الاحتفاظ بها على طول وجودة الأغاني المسجلة. فمستغل الأغنية مساحة أكبر على المشغل إذا تم تسجيلها بجودة عالية، من قرص مضغوط على سبيل المثال، بدلاً من الجودة المنخفضة الموجودة على الإنترنت.

a. إذا كان مشغل يحتوي على مساحة تخزين 5400 ميجا بايت، فاكتب دالة تمثل عدد الأغاني التي يمكن للمشغل الاحتفاظ بها كدالة لمتوسط حجم الأغنية. $f(x) = \frac{5400}{x}$

b. هل هذه الدالة تمثل تغيرًا طرديًا أم مشتركًا أم عكسيًا أم مركبًا. عكسي

c. افترض أن متوسط حجم الملف المرتفع الجودة هو 8 ميجا بايت ومتوسط حجم الملف المنخفض الجودة هو 5 ميجا بايت. حدد كم عدد الأغاني التي يمكن إضافتها للمشغل ويستطيع الاحتفاظ بها إذا كانت الأغاني منخفضة الجودة أكثر من المرتفعة الجودة. 405

47. **الجاذبية الأرضية** وفقًا لقانون الجاذبية الأرضية، فإن القوة الجاذبة F بالنيوتن بين أي جسمين في المجرة الأرضية تتناسب طرديًا مع ناتج ضرب كتلتيهما m_1 و m_2 بالكيلوجرام وتتناسب عكسيًا مع مربع المسافة d بينهما بالأمتار. بمعنى، $F = \frac{Gm_1m_2}{d^2}$. G هو ثابت الجاذبية الأرضية. وتبلغ قيمته $6.67 \times 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2$.

a. تبلغ المسافة بين الأرض والقمر نحو 3.84×10^8 m. وتبلغ كتلة القمر 7.36×10^{22} kg. وتبلغ كتلة الأرض 5.97×10^{24} kg. فما قوة الجاذبية التي يبذلها كل من الأرض والقمر على بعضهما البعض؟ نحو 2×10^{20} N

b. تبلغ المسافة بين الشمس والأرض نحو 1.5×10^{11} m. وتبلغ كتلة الشمس نحو 1.99×10^{30} kg. فما قوة الجاذبية التي تبذلها كل من الأرض والشمس على بعضهما البعض؟ نحو 3.5×10^{22} نيوتن

c. أوجد قوة الجاذبية التي يبذلها كل من كرتي حديد كتلتيهما 1000 kg على الأخرى إذا كانت المسافة بينهما 0.1 m. 6.67×10^{-3} N

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

48. **التفكير الناقد** يحدد كل من يوسف وسعيد علاقة تناسب تبيدأ حل التغير المركب الذي تتغير فيه z طرديًا مع x وتتغير فيه z عكسيًا مع y. أي منهما حدد علاقة التناسب الصحيحة؟ اشرح استنتاجك.

سعيد

$$y_1 = \frac{kx_1}{z_1} \quad y_2 = \frac{kx_2}{z_2}$$
$$k = \frac{y_1z_1}{x_1} \quad k = \frac{y_2z_2}{x_2}$$
$$\frac{y_1z_1}{x_1} = \frac{y_2z_2}{x_2}$$

يوسف

$$z_1 = \frac{kx_1}{y_1} \quad z_2 = \frac{kx_2}{y_2}$$
$$k = \frac{z_1y_1}{x_1} \quad k = \frac{z_2y_2}{x_2}$$
$$\frac{z_1y_1}{x_1} = \frac{z_2y_2}{x_2}$$

يوسف؛ حيث إن سعيد قام بالضرب في الوقت الذي كان يفترض فيه القسمة وقام بالقسمة في الوقت الذي كان يفترض فيه الضرب.

49. **التحدي** إذا كانت a تتغير مركبًا مع b وتتغير طرديًا مع c وعكسيًا مع d، فاكتب معادلة تتضمن a و b و c و d و f التي تمثل هذه العلاقة. $a = \frac{fbc}{d}$

50. **التبرير** اشرح السبب في أن بعض علماء الرياضيات يعتبرون أن كل علاقة تغير بشكل مشترك هي علاقة تغير مركب. بينما لا تعبر كل علاقة تغير مركبة علاقة تغير بشكل مشترك.

51. **مسألة غير محددة الإجابة** اذكر ثلاث كميات من الحياة اليومية بينهم علاقة تغير بشكل مشترك. **الإجابة النموذجية: تتغير القوة المبذولة على جسم بشكل مشترك مع كتلته وتسارعها.**

52. **الكتابة في الرياضيات** حدد نوع (أنواع) علاقة (علاقات) التغير التي لا يمكن أن يكون فيها 0 إحدى القيم. اشرح استنتاجك.

50. **الإجابة النموذجية:** يعتبر كل تغير مشترك تغيرًا مركبًا حيث إنه يحتوي على تغيرين مركبين طرديين. بالرغم من ذلك، يمكن أن يحتوي التغير المركب على مزيد من التغير العكسي والطردي. لذا لا يمكن اعتباره تغيرًا مشتركًا.

52. **الإجابة النموذجية:** الدوال العكسية وبعض دوال أنواع التغير المركب الأخرى لا يمكن أن تحتوي على قيمة 0 في المجال حيث إنه لا يمكن القسمة على صفر.

www.almanahj.com

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبارات المعيارية

53. SAT/ACT غادر عيسى من منزل الطلاب وقاد في اتجاه أحد الأكواخ بمتوسط سرعة 40 km/h. وغادر عدنان في وقت متأخر عنه في نفس الاتجاه بمتوسط سرعة 48 km/h. بعد القيادة لمدة خمس ساعات، لحق عدنان بعيسى. فكم المدة التي قادها عيسى قبل أن يلحق به عدنان؟ D

A ساعة
B ساعتان
C 4 ساعات
D 6 ساعات
E 8 ساعات

54. إذا كان 75% من 88 = 60% من عدد. فما ذلك العدد؟ J

F 100
G 105
H 108
J 110

55. **إجابة موسعة** يبلغ طول شعر طفل أماني 7 cm ويتوقع أن ينمو بمتوسط معدل 3 cm في العام.

a. **انظر الحاشية.**

a. ضع جدولًا يوضح الطول المتوقع لشعر أماني بعد كل من السنوات الأربع الأولى.

b. اكتب دالة يمكن استخدامها لتحديد طول شعرها بعد كل عام. $f(x) = 3x + 7$

c. إذا لم تقص أماني شعرها على الإطلاق، فحدد طول شعرها بعد 9 سنوات. 34 in

56. أي مما يلي يساوي مجموع عددين صحيحين زوجيين متتاليين؟ B

A 144
B 146
C 147
D 148

مراجعة شاملة

حدد خطوط التقارب الرأسية والفجوات في التمثيل البياني لكل دالة. (الدرس 4-9)

الفجوة: $x = -3$ 59. $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 3}$ **خطوط التقارب:** $x = -4,\ x = 1$ 58. $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + 3x - 4}$ **خطوط التقارب:** $x = -2,\ x = -3$ 57. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 5x + 6}$

60. **التصوير الفوتوغرافي** يمكن استخدام القانون $\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p}$ في تحديد المسافة التي ينبغي أن تفصل بين الفيلم وعدسة الكاميرا لتقديم أفضل صورة فوتوغرافية. ويمثل المتغير q المسافة من العدسة إلى الفيلم، وتمثل f البؤري للعدسة. وتمثل p المسافة من الجسم إلى العدسة. (الدرس 3-9)

a. أوجد حل القانون لإيجاد $\frac{1}{p}$. $\frac{1}{p} = \frac{1}{f} - \frac{1}{q}$

b. اكتب التعبير الذي يحتوي على f و q في صورة تعبير نسبي واحد. $\frac{q - f}{fq}$

c. إذا كان البعد البؤري للكاميرا يبلغ 8 cm وتبلغ المسافة بين الفيلم والعدسة 10 cm. فكم ينبغي أن تكون المسافة بين الجسم والعدسة بحيث تكون الصورة في مركز الفيلم؟ 40 cm

أوجد حل كل من المعادلات التالية. تحقق من حلولك.

62. $\log_3(3x) + \log_3 5 = \log_3 30$ 2
61. $\log_3 42 - \log_3 n = \log_3 7$ 6
64. $\log_{10} a + \log_{10}(a + 21) = 2$ 4
63. $2\log_5 x = \log_5 9$ 3

باستخدام كثيرة حدود واحد عواملها، أوجد باقي العوامل. قد لا تكون بعض العوامل ذوات حدين.

66. $3x^3 + 10x^2 - x - 12;\ x + 3$ $x - 1, x + \frac{4}{3}$، أو $3x + 4$
65. $2x^3 - 5x^2 - 28x + 15;\ x - 5$ $x + 3, x - \frac{1}{2}$، أو $2x - 1$

مراجعة المهارات

أوجد المضاعف المشترك الأصغر لكل مجموعة من كثيرات الحدود.

69. $8,\ 24x,\ 12$ $24x$
68. $x,\ 4y,\ x - y$ $4xy(x - y)$
67. $a,\ 2a,\ a + 1$ $2a(a + 1)$
72. $x + 2,\ x - 3,\ x^2 - x - 6$ $x^2 - x - 6$
71. $12a,\ 15,\ 4b^2$ $60ab^2$
70. $x^4,\ 3x^2,\ 2xy$ $6x^4y$

Macmillan-Hill Education © محفوظ لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

التدريس المتمايز OL BL

التوسع اكتب المعادلة $y = kx^3$ على السبورة. اطلب من الطلاب وصف نوع التغير الذي تعبر عنه هذه المعادلة. اطلب منهم وصف ما يحدث لقيمة y عندما تكون قيمة x مضاعفة أو ثلاثة أضعاف أو نصف. إلخ. وبالنسبة لهذه المعادلة، y تختلف طرديًا مع مكعب x. عندما يكون x مضاعفًا، y يكون مضروبًا في 8. عندما يكون x ثلاثة أضعاف، y يكون مضروبًا في27. عندما يكون x منصفًا، y يكون مقسومًا على 8.

انتبه!

تجنب المفاهيم الخاطئة

تأكد من استيعاب الطلاب للفروق الأساسية بين التغير الطردي والعكسي، على سبيل المثال. اسألهم إذا كان عدد الشموع في كعكة عيد ميلاد يختلف طرديًا أو غير طردي مع عمر الشخص صاحب عيد الميلاد. ثم اسأل عن كيفية اختلاف الوقت الذي تستغرقه الشمعة للاحتراق مع طول الشمعة المتبقي.

4 التقييم

بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب

على قطعة ورق صغيرة، اطلب من جميع الطلاب كتابة معادلة لبعض التغير في الحياة اليومية (الوقت المستغرق في الدراسة وساعات النوم، إلخ.). عند الصف الدراسي، اطلب من جميع الطلاب أن يقولوا ما هو نوع التغير الذي تناقشه المعادلة.

إجابة إضافية

55a.

العام	الطول
1	10
2	13
3	16
4	19

www.almanahj.com

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 6-9 تحويل التعابير النسبية إلى أبسط صورة.

بعد الدرس 6-9 حل المعادلات النسبية. حل المتباينات النسبية.

بعد الدرس 6-9 حل معادلات تتضمن الأسس النسبية.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اسأل:

- ما تكلفة الزيارة إذا أجرى فرد 10 زيارات في شهر محدد؟ AED 7
- إذا أجرى فرد 10 زيارات للنادي في شهر محدد، فكم تبلغ رسوم العضوية الشهرية بالإضافة إلى تكلفة كل زيارة؟ تضيف الرسوم AED 2 لكل زيارة.
- إذا أجرى فرد عدد x من الزيارات في شهر محدد، فكم ستضيف رسوم العضوية الشهرية لتكلفة كل زيارة؟ تضيف الرسوم AED $\frac{20}{x}$ لكل زيارة.

الدرس 6-9 حل المعادلات والمتباينات النسبية

السابق
- حولت التعابير النسبية إلى أبسط صورة.

الحالي
1. حل المعادلات النسبية.
2. حل المتباينات النسبية.

لماذا؟
- تبلغ تكلفة العضوية لأحد النوادي الرياضية AED 20 في الشهر. وينبغي على الأعضاء كذلك دفع AED 5 في كل مرة يزورون فيها النادي. فإذا زار أحد الأعضاء النادي x مرات في شهر واحد، فستكون تكلفة هذا الشهر $5x + 20$. وستكون التكلفة الفعلية لكل زيارة $\frac{20 + 5x}{x}$ لتحديد عدد الزيارات التي ينبغي القيام بها لتصبح تكلفة الزيارة AED 6. فستحتاج إلى حل المعادلة $\frac{20 + 5x}{x} = 6$.

مفردات جديدة
- معادلة نسبية rational equation
- المتوسط الحسابي المرجح weighted average
- متباينة نسبية rational inequality

ممارسات في الرياضيات
6 مراعاة الدقة.

1 حل المعادلات النسبية

تُعرف المعادلات التي تحتوي على تعبير نسبي واحد أو أكثر باسم **المعادلات النسبية**. وتكون هذه المعادلات في أغلب الأحيان أسهل في الحل ما أن يتم التخلص من الكسور. ويمكن التخلص من الكسور بضرب كل طرف في المقام المشترك الأصغر.

مثال 1 حل معادلة نسبية

حُلّ $\frac{4}{x+3} + \frac{5}{6} = \frac{23}{18}$. ثم تحقق من صحة الحل.

يساوي المقام المشترك الأصغر $18(x + 3)$.

$\frac{4}{x+3} + \frac{5}{6} = \frac{23}{18}$	المعادلة الأصلية
$18(x+3)\left(\frac{4}{x+3}\right) + 18(x+3)\left(\frac{5}{6}\right) = 18(x+3)\frac{23}{18}$	اضرب في المقام المشترك الأصغر.
$\cancel{18}(x+3)\left(\frac{4}{\cancel{x+3}}\right) + \cancel{18}(x+3)\left(\frac{5}{\cancel{6}}\right) = \cancel{18}(x+3)\left(\frac{23}{\cancel{18}}\right)$	اختصر العوامل المشتركة.
$72 + 15x + 45 = 23x + 69$	اضرب.
$15x + 117 = 23x + 69$	بسّط.
$48 = 8x$	اطرح $15x$ و 69.
$6 = x$	اقسم.

التحقق

$\frac{4}{x+3} + \frac{5}{6} = \frac{23}{18}$	المعادلة الأصلية
$\frac{4}{6+3} + \frac{5}{6} \stackrel{?}{=} \frac{23}{18}$	$x = 6$
$\frac{4}{9} + \frac{5}{6} \stackrel{?}{=} \frac{23}{18}$	بسّط.
$\frac{8}{18} + \frac{15}{18} \stackrel{?}{=} \frac{23}{18}$	بسّط.
$\frac{23}{18} = \frac{23}{18}$ ✓	اجمع.

تمرين موجّه

حُلّ كل من المعادلات التالية. ثم تحقق من صحة الحل.

1A. $\frac{2}{x+3} + \frac{3}{2} = \frac{19}{10}$ 2

1B. $\frac{7}{12} + \frac{9}{x-4} = \frac{55}{48}$ 20

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

www.almanahj.com

1 حل المعادلات النسبية

المثال 1 يوضح كيفية حل معادلة نسبية. **المثال 2** يوضح كيفية حل معادلة نسبية واختزال أي حلول دخيلة. **الأمثلة 3-5** توضح كيفية استخدام معادلات نسبية لحل مشكلات المزيج والمسافة والعمل.

التقييم التكويني

استخدم أسئلة "تمرين موجه" الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أسئلة إضافية

1. حل $\frac{5}{24} + \frac{2}{3-x} = \frac{1}{4}$. تحقق من حلك. $x = -45$
2. حل $\frac{p^2-p-5}{p+1} = \frac{p^2-7}{p-1} + p$. تحقق من حلك. $p = -3, -2, 2$

التركيز على محتوى الرياضيات

حل المعادلات النسبية خلال عملية الحل، عادةً ما يتم تحويل المعادلة النسبية إلى نوع آخر من المعادلات. قد يتطلب حل معادلة نسبية حل معادلة خطية أو تربيعية أو نوعًا آخر من المعادلات.

قد يؤدي ضرب كل طرف من المعادلة في المقام المشترك الأصغر للتعابير النسبية إلى نتائج لا تعتبر حلولاً للمعادلة الأصلية. وتسمى هذه بالحلول الدخيلة.

الربط بتاريخ الرياضيات

بروك تايلور (1685–1731)

عالم الرياضيات الذي وضع نظرية استخدمت في التفاضل والتكامل وتعرف بنظرية تايلور وتعتمد على الباقي بعد العمليات الحسابية على التعابير النسبية.

مثال 2 حل معادلة نسبية

حُلّ $\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2-x-10}{x^2+8x+15} = \frac{3}{x+3}$، **ثم تحقق من صحة الحل.**

المقام المشترك الأصغر للحدود هو $(x+5)(x+3)$.

المعادلة الأصلية $\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2-x-10}{x^2+8x+15} = \frac{3}{x+3}$

اضرب في المقام المشترك الأصغر. $\frac{(x+3)(x+5)(2x)}{x+5} - \frac{(x+3)(x+5)(x^2-x-10)}{x^2+8x+15} = \frac{(x+3)(x+5)3}{x+3}$

اقسم العوامل المشتركة. $\frac{(x+3)(x+5)(2x)}{x+5} - \frac{(x+3)(x+5)(x^2-x-10)}{x^2+8x+15} = \frac{(x+5)(x+3)3}{x+3}$

بسّط. $(x+3)(2x) - (x^2-x-10) = 3(x+5)$

وزّع. $2x^2+6x-x^2+x+10 = 3x+15$

بسّط. $x^2+7x+10 = 3x+15$

اطرح $3x + 15$. $x^2+4x-5 = 0$

عامل. $(x+5)(x-1) = 0$

خاصية ناتج الضرب الصفري $x+5=0$ أو $x-1=0$

$x=-5$ $x=1$

التحقق جرب $x=-5$.

$\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2-x-10}{x^2+8x+15} = \frac{3}{x+3}$

$\frac{2(-5)}{-5+5} - \frac{(-5)^2-(-5)-10}{(-5)^2+8(-5)+15} \stackrel{?}{=} \frac{3}{-5+3}$

$\frac{-10}{0} - \frac{25+5-10}{25-40+15} \neq -\frac{3}{2}$ ✗

جرب $x=1$.

$\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2-x-10}{x^2+8x+15} = \frac{3}{x+3}$

$\frac{2(1)}{1+5} - \frac{1^2-1-10}{1^2+8(1)+15} \stackrel{?}{=} \frac{3}{1+3}$

$\frac{2}{6} - \frac{-10}{24} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4}$

$\frac{8}{24} - \frac{10}{24} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4}$

$\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ ✓

عند حل المعادلة النسبية، فإن أي حل محتمل يؤدي إلى صفر في المقام يجب استبعاده من قائمة الحلول.

مراجعة المصطلحات

حل دخيل (extraneous solution) هو حل لا يحقق المعادلة الأصلية

حيث إن $x = -5$ تؤدي إلى صفر في المقام، فهي حل دخيل. استبعد -5 من قائمة الحلول. الحل يساوي 1.

تمرين موجّه

لا يوجد حلول

2A. $\frac{5}{y-2} + 2 = \frac{17}{6}$ **8**

2B. $\frac{2}{z+1} - \frac{1}{z-1} = \frac{-2}{z^2-1}$

2C. $\frac{7n}{3n+3} - \frac{5}{4n-4} = \frac{3n}{2n+2}$ $-\frac{1}{2}$, **3**

2D. $\frac{1}{p-2} = \frac{2p+1}{p^2+2} + \frac{2}{p+4}$ $\frac{7}{3}$

حقوق الطبع والتأليف © McGraw-Hill Education مخصصة لمعلم مخصص

انتبه!

تجنب المفاهيم الخاطئة ذكّر الطلاب أنه يجب دومًا التحقق من الحل المحتمل في المعادلة الأصلية بدلاً من أي من الخطوات الموجودة في الحل. ومع ذلك، لا يُسمح باستبدال الحل بمتغير ومن ثم ضرب كلا جانبي المعادلة في المقام المشترك الأصغر لأنه يتم اختبار حقيقة المعادلة.

663

www.almanahj.com

المتوسط الحسابي المرجح هو طريقة لإيجاد المتوسط الحسابي لمجموعة من الأعداد يكون لبعض العناصر فيها أهمية أكبر أو ترجيح عن الأخرى. تتضمن العديد من مسائل الحياة اليومية المزج والعمل والمسافات والفائدة والتي يمكن حلها باستخدام المعادلات النسبية.

مثال 3 من الحياة اليومية مسائل المزج

الكيمياء **تضيف مها محلول حمضي بنسبة 70% إلى 12 mL نسبة المحلول الحمضي فيه 15%. كم ينبغي إضافته من المحلول الحمضي بنسبة 70% لعمل محلول حمضي بنسبة 60%؟**

الفهم تحتاج مها إلى أن تعرف المقدار اللازم إضافته من المحلول للمحلول الأصلي لصنع محلول جديد.

التخطيط يحتوي كل محلول على نسبة معينة من الحمض. يجب أن تكون نسبة الحمض في المحلول الأخير مساوية لمقدار الحمض مضموما على إجمالي المحلول.

	الأصلي	المضاف	الجديد
كمية الحمض	0.15(12)	0.7(x)	0.15(12) + 0.7x
إجمالي المحلول	12	x	12 + x

$$\text{نسبة الحمض في المحلول} = \frac{\text{نسبة الحمض}}{\text{إجمالي المحلول}}$$

الحل

$$\frac{\text{النسبة}}{100} = \frac{\text{مقدار الحمض}}{\text{إجمالي المحلول}}$$ اكتب علاقة تناسب.

$$\frac{60}{100} = \frac{0.15(12) + 0.7x}{12 + x}$$ عوض.

$$\frac{60}{100} = \frac{1.8 + 0.7x}{12 + x}$$ بسّط.

$$100(12 + x)\frac{60}{100} = 100(12 + x)\frac{1.8 + 0.7x}{12 + x}$$ يساوي المقام المشترك الأصغر $100(12 + x)$. اضرب في المقام المشترك الأصغر.

$$\frac{100}{1}(12 + x)\frac{60}{100} = 100(12 + x)\frac{1.8 + 0.7x}{12 + x}$$ اقسم العوامل المشتركة.

$$(12 + x)60 = 100(1.8 + 0.7x)$$ بسّط.

$$720 + 60x = 180 + 70x$$ وزّع.

$$540 = 10x$$ اطرح $60x$ و 180.

$$54 = x$$ اقسم على 10.

التحقق المعادلة الأصلية

$$\frac{60}{100} = \frac{0.15(12) + 0.7x}{12 + x}$$

$$\frac{60}{100} \overset{?}{=} \frac{0.15(12) + 0.7(54)}{12 + 54}$$ $x = 54$

$$\frac{60}{100} \overset{?}{=} \frac{37.8}{66}$$ بسّط.

$0.6 = 0.6$ ✓ بسّط.

تحتاج مها إلى إضافة 54 mL من المحلول الحمضي بنسبة 70%.

تمرين موجّه

3. يضيف منصور محلول عصير فاكهة بتركيز 65% إلى 15 mL من شراب عصير فاكهة بتركيز 10%. فكم ينبغي إضافته من محلول عصير الفاكهة تركيز 65% لصنع عصير فاكهة بتركيز 35%؟ 12.5 mL

نصيحة دراسية

التمثيل بالنماذج تكون الجداول مثل المذكور في المثال 3 مفيدة في ترتيب وحل مسائل المزج والعمل والمتوسط الحسابي المرجح والمسافة.

حقوق الطبع والتأليف © لصاحبها مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال إضافي

3 **محلول ملحي** أضاف أحمد 80% من محلول ملحي (الملح والمياه) إلى 16 أوقية من المحلول الذي يحتوي على 10% محلول ملحي. كم من المحلول ينبغي إضافته لعمل محلول يحتوي على 50% محلول ملحي؟ $21\frac{1}{3}$ أوقية

التمثيل باستخدام الرياضيات

يقدر الطلاب المتفوقين في الرياضيات تحديد الكميات المهمة في موقف عملي ورسم مخطط بالعلاقات باستخدام أدوات مثل الرسوم التخطيطية. والجداول بمدخلين، والتمثيلات البيانية والمخططات الانسيابية والمعادلات. شجّع الطلاب على استخدام التمثيلات المتعددة في تحليل الدوال تحليلاً أفضل.

www.almanahj.com

664 | الدرس 6-9 | حل المعادلات والمتباينات النسبية

يمكن استخدام القانون الذي يربط بين المسافة والسرعة والزمن لحل المعادلات النسبية. ويعتبر الاستخدام الأكثر شيوعًا هو $d = rt$. ومع ذلك يمكن تمثيلها عن طريق $t = \frac{d}{r}$ و $r = \frac{d}{t}$.

مثال 4 من الحياة اليومية مسائل المسافة

التجديد يجدّف ناصر على زورق في خور دبي، ويبلغ معدل سرعته في المياه الراكد 6 mi/h، ويستغرق ناصر 3 ساعات ليقوم برحلة ذهاب وإياب بمسافة 10 mi، بافتراض أن ناصر قام بالتجديف بمعدل ثابت للسرعة، فحدد معدل التيار.

الفهم الآن لدينا سرعة ناصر في المياه الراكد والزمن الذي يستغرقه للتحرك مع التيار وضده. ونحتاج إلى تحديد سرعة التيار.

التخطيط تحرك ناصر 5 mi في اتجاه التيار و 5 mi عكسه. ويعتبر القانون الذي يربط بين المسافة والسرعة والزمن هو $d = rt$ أو $t = \frac{d}{r}$.

إجمالي الزمن	الزمن المستغرق عكس التيار	الزمن المستغرق في اتجاه التيار
3 ساعات	$\frac{5}{6-r}$	$\frac{5}{6+r}$

الحل اكتب المعادلة.

$$\frac{5}{6+r} + \frac{5}{6-r} = 3$$

المقام المشترك الأصغر $= (6+r)(6-r)$

$$(6+r)(6-r)\frac{5}{6+r} + (6+r)(6-r)\frac{5}{6-r} = (6+r)(6-r)3$$

اضرب في المقام المشترك الأصغر.

$$(\cancel{6+r})(6-r)\frac{5}{\cancel{6+r}} + (6+r)(\cancel{6-r})\frac{5}{\cancel{6-r}} = (6+r)(6-r)3$$

اقسم العوامل المشتركة.

$$(6-r)5 + (6+r)5 = (36-r^2)3$$

بسّط.

$$30 - 5r + 30 + 5r = 108 - 3r^2$$

بسّط.

$$60 = 108 - 3r^2$$

بسّط.

$$0 = -3r^2 + 48$$

اطرح 108.

$$0 = -3(r+4)(r-4)$$

حلل.

$$0 = (r+4)(r-4)$$

اقسم كل طرف على -3.

$$r = 4 \text{ أو } -4$$

خاصية ناتج الضرب الصفري

التحقق المعادلة الأصلية

$$\frac{5}{6+r} + \frac{5}{6-r} = 3$$

$r = 4$

$$\frac{5}{6+4} + \frac{5}{6-4} \stackrel{?}{=} 3$$

بسّط.

$$\frac{5}{10} + \frac{5}{2} \stackrel{?}{=} 3$$

بسّط.

$$\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{6}{2} \checkmark$$

حيث إنه لا يمكن أن تكون السرعة سالبة، تكون سرعة التيار 4 mi/h.

تمرين موجّه

4. **الطيران** تبلغ سرعة الرياح 20 mi/h. فإذا استغرقت طائرة 7 h لتقطع رحلة ذهاب وعودة بمسافة 2368 mi، فحدد سرعة الطائرة في انعدام الرياح.

339.5 mi/h

نصيحة دراسية

مسائل المسافة عندما تتضمن المسافة رحلة ذهاب وعودة، تساوي المسافة في إحدى الاتجاهين المسافة في الاتجاه المماثل.

Glencoe/McGraw-Hill Education © محفوظ لمنهاج مؤسسة

مثال إضافي

4 السباحة تسبح ليلى لمدة 5 ساعات في جدول ذو تيار بسرعة 1 mi/h. وقد تركت الرصيف البحري وسبحت ضد التيار لمسافة 2 mi ومن ثم سبحت عائدة للرصيف. ما سرعتها في السباحة في المياه الراكدة؟ حوالي 1.5 mi/h

انتبه!

تجنب المفاهيم الخاطئة في المثال 4، تأكد من أن الطلاب استوعبوا الفرق بين الحلول في المعادلة التربيعية (التي يوجد منها اثنان) وحل المسألة (الذي لا يوجد منه إلا واحد فقط).

تجنب الأخطاء عند حل المعادلات النسبية، غالبًا ما ينسى الطلاب أنه يجب ضرب كافة حدود المعادلة في المقام المشترك الأصغر. ذكّرهم بالقيام بذلك من أجل الحصول على معادلات متكافئة.

www.almanahj.com

يمكن حل المسائل من الحياة اليومية التي تتضمن العمل باستخدام المعادلات النسبية.

مثال 5 من الحياة اليومية مسائل العمل

الخدمة المجتمعية في كل عام، يبني طلاب الصفين الثاني والثالث الثانوي في مدرسة المنذر الثانوية منزلاً للحي. فإذا احتاج طلاب الصف الثالث الثانوي 24 يوماً لإكمال منزل و 18 يوماً إذا قاموا بالعمل مع طلاب الصف الثاني الثانوي، فكم سيستغرق الصف الثاني الثانوي لإكمال منزل إذا قاموا بالعمل وحدهم؟

الفهم تتلخص المعطيات التي لدينا في الجملة المستغرقة عندما يعمل طلاب الصف الثالث الثانوي وحدهم والوقت المستغرق عندما يعمل الصفين معًا. ونحتاج لتحديد المدة المستغرقة عند عمل طلاب الصف الثاني وحدهم.

التخطيط يستطيع طلاب الصف الثالث الثانوي إكمال منزل واحد في 24 يومًا. وبالتالي يكون معدل إنجازهم $\frac{1}{24}$ منزل في اليوم.

ويبلغ معدل إنجاز الصف الثاني الثانوي $\frac{1}{j}$.

ويبلغ المعدل المركب لكلا الصفين $\frac{1}{18}$.

المعدل المركب	معدل طلاب الصف الثاني الثانوي	معدل طلاب الصف الثالث الثانوي
$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{j}$	$\frac{1}{24}$

حَلّ

اكتب المعادلة: $\frac{1}{24}+\frac{1}{j}=\frac{1}{18}$

المقام المشترك الأصغر $= 72j$

اضرب في المقام المشترك الأصغر. $72j\frac{1}{24}+72j\frac{1}{j}=72j\frac{1}{18}$

اقسم العوامل المشتركة: $\frac{3}{72j}\frac{1}{\frac{24}{1}}+72j\frac{1}{j}=\frac{4}{72j}\frac{1}{\frac{18}{1}}$

وزع $3j+72=4j$

اطرح $3j$: $72=j$

التحقق يوجد طريقتان محتملتان.

الطريقة 1 التعويض عن القيم.

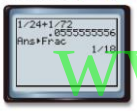
المعادلة الأصلية $\frac{1}{24}+\frac{1}{j}=\frac{1}{18}$

$j=72$ $\frac{1}{24}+\frac{1}{72}=\frac{1}{18}$

المقام المشترك الأصغر $= 72$ $\frac{3}{72}+\frac{1}{72}=\frac{4}{72}$

بسّط. ✓ $\frac{4}{72}=\frac{4}{72}$

الطريقة 2 استخدام الحاسبة.



سيستغرق طلاب الصف الثاني الثانوي 72 يومًا لإكمال المنزل وحدهم.

تمرين موجّه

5A. استغرق عدنان وطارق 6 ساعات لجرف الأوراق معًا في العام الماضي. وفي العام الماضي استغرق طارق 10 ساعات ليقوم بذلك وحده. فكم سيستغرق عدنان من الزمن ليقوم بذلك وحده هذا العام؟ **15 ساعة**

5B. يقوم عمر وعلي بطلاء المنازل معًا. إذا تمكن عمر من طلاء أحد المنازل في 6 أيام وتمكن علي من طلاء نفس المنزل في 5 أيام. فكم سيستغرق طلاء المنزل إذا قاما بالطلاء معًا؟ $2\frac{8}{11}$ **يوم**

الربط بالحياة اليومية

منذ 1997، يقضي طلاب مدرسة روك بوينت في برلنغتون بفيرمونت أسبوع في خدمة المجتمعات في جميع أنحاء العالم. وأثناء العمل مع مؤسسة هابيتات فور هيومانيتي، يقضي الطلاب الزمن في ريف تينيسي، حيث يبدؤون ويكملون سقف منزل من منازل هابيتات في أسبوع واحد.

المصدر: معهد المستهلك الشمالي لولاية فيرمونت لشؤون العمل

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

انتبه!

تجنب الأخطاء اقترح في حال وجود مسألة تتضمن إكمال جزء من مهمة أثناء العمل معًا، أن يفكر الطلاب في أي جزء من العمل تم إنجازه في يوم واحد أو سنة واحدة أو وحدة وقت واحدة.

مثال إضافي

5 **قص العشب** يقص عمر وسعيد العشب معًا. عندما يعمل عمر وحده يمكنه إنجاز مهمة محددة في 4.5 ساعات ويمكن لسعيد وحده إنجازها في 3.7 ساعات. كم سيستغرقون من الوقت لإنجاز المهمة معًا؟ **نحو ساعتين**

نصيحة للمعلمين الجدد

طريقة بديلة يجب أيضًا حل المعادلة في المثال 5 من خلال أولاً طرح $\frac{1}{24}$ من كلا الطرفين. ثم إيجاد الضرب التبادلي والحل.

www.almanahj.com

التدريس المتمايز OL BL

المتعلمون أصحاب النمط المنطقي اطلب من الطلاب التفكير في الفرق بين الرياضيات "البحتة"، مثل حل معادلة، والرياضيات "التطبيقية"، مثل حل مسألة من الحياة اليومية. اطلب منهم ذكر بعض الطرق التي يتشابه فيها هذان النوعان وبعض الطرق التي يختلفان فيها.

2 حل المتباينات النسبية

المثال 6 يوضح كيفية حل متباينة نسبية.

مثال إضافي

6 حل $\frac{1}{3k} + \frac{2}{9k} < \frac{2}{3}$.

$k < 0$ أو $k > \frac{5}{6}$

انتبه!

تجنب الأخطاء اقترح أن يقوم الطلاب أيضا بالتأكد مما إذا كان الحد المُشار إليه في حل المعادلة موجودًا أو غير موجود في حل المتباينة.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

كاميرا المستندات اختر طالبًا لشرح وتوضيح كيفية حل متباينة نسبية. تأكد من توضيح الطالب لكيفية استخدام نقاط الاختبار ومخطط العلامات لإيجاد مجموعة الحل.

2 حل المتباينات النسبية

حل المتباينات النسبية تحل **المتباينات النسبية** وهي المتباينات التي تحتوي على تعبير نسبي أو أكثر. اتبع هذه الخطوات.

المفهوم الأساسي حل المتباينات النسبية

الخطوة 1 اذكر القيم المستثناة. وهي القيم التي تجعل المقام يساوي 0.

الخطوة 2 حل المعادلة ذات الصلة.

الخطوة 3 استخدم القيم المحددة بواسطة الخطوات السابقة لقسمة خط الأعداد إلى فترات.

الخطوة 4 اختبر إحدى القيم في كل فترة لتحديد أي الفترات تحتوي على قيم تحقق المتباينة.

مثال 6 حل متباينة نسبية

حُلّ $\frac{x}{3} - \frac{1}{x-2} < \frac{x+1}{4}$.

الخطوة 1 القيمة المستثناة لهذه المتباينة هي 2.

الخطوة 2 حل المعادلة ذات الصلة.

المعادلة ذات الصلة $\frac{x}{3} - \frac{1}{x-2} = \frac{x+1}{4}$

يساوي المقام المشترك الأصغر $12(x-2)$ $12(x-2)\frac{x}{3} - 12(x-2)\frac{1}{x-2} = 12(x-2)\frac{x+1}{4}$

اضرب في المقام المشترك الأصغر. $4x^2 - 8x - 12 = 3x^2 - 3x - 6$

وزع.

اطرح $3x^2 - 3x - 6$. $x^2 - 5x - 6 = 0$

عامل. $(x-6)(x+1) = 0$

خاصية حاصل الضرب الصفري $x = 6 \text{ or } -1$

الخطوة 3 ارسم مستقيمات رأسية عند القيم المستثناة وعند الحلول لتقسيم خط الأعداد إلى فترات.

الخطوة 4 والآن اختبر إحدى القيم في كل فترة لتحدد ما إذا كانت القيم في الفترة تحقق المتباينة أم لا.

اختبر $x = -3$: $\frac{-3}{3} - \frac{1}{-3-2} < \frac{-3+1}{4}$ ، $-1 + \frac{1}{5} < -\frac{2}{4}$ ، $-\frac{4}{5} < -\frac{1}{2}$ ✓

اختبر $x = 0$: $\frac{0}{3} - \frac{1}{0-2} < \frac{0+1}{4}$ ، $0 + \frac{1}{2} < \frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2} \not< \frac{1}{4}$

اختبر $x = 4$: $\frac{4}{3} - \frac{1}{4-2} < \frac{4+1}{4}$ ، $\frac{4}{3} - \frac{1}{2} < \frac{5}{4}$ ، $\frac{5}{6} < \frac{5}{4}$ ✓

اختبر $x = 8$: $\frac{8}{3} - \frac{1}{8-2} < \frac{8+1}{4}$ ، $\frac{32}{12} - \frac{2}{12} < \frac{27}{12}$ ، $\frac{30}{12} \not< \frac{27}{12}$

تكون العبارة صحيحة لكل من $x = -3$ و $x = 4$. وبالتالي، فالحل هو $x < -1$ أو $2 < x < 6$.

نصيحة دراسية

المتباينات النسبية من المحتمل أن تؤدي جميع الفترات إلى عبارة صحيحة كما قد لا تؤدي منها إلى عبارة صحيحة.

تمرين موجّه حل كل متباينة مما يلي.

6A. $\frac{5}{x} + \frac{6}{5} > \frac{2}{3}$ $0 < x < 9.3$

6B. $\frac{4}{3} + \frac{7}{x} < \frac{5}{9}$ $x < 0$ أو $x > 15$

www.almanahj.com

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

المثالان 1-2 حُلّ كل من المعادلات التالية. وتحقق من صحة الحل.

1. $\frac{4}{7}+\frac{3}{x-3}=\frac{53}{56}$ 11
2. $\frac{7}{3}-\frac{3}{x-5}=\frac{19}{12}$ 9
3. $\frac{10}{2x+1}+\frac{4}{3}=2$ 7
4. $\frac{11}{4}-\frac{5}{y+3}=\frac{23}{12}$ 3
5. $\frac{8}{x-5}-\frac{9}{x-4}=\frac{5}{x^2-9x+20}$ 8
6. $\frac{14}{x+3}+\frac{10}{x-2}=\frac{122}{x^2+x-6}$ 5
7. $\frac{14}{x-8}-\frac{5}{x-6}=\frac{82}{x^2-14x+48}$ 14
8. $\frac{5}{x+2}-\frac{3}{x-2}=\frac{12}{x^2-4}$ 14

مثال 3: 9. **البنية** غدى نورا 10 كيلوجرامات من الفاكهة المجمعة وتبيع كل كيلوجرام منها مقابل AED 6.25. وتود أن تعرف كم تحتاج من كيلوجرامات مزيج المكسرات المباعة مقابل AED 4.50 للكيلوجرام لتصنع مزيجًا من المكسرات والفاكهة المجمعة يباع مقابل AED 5 للكيلوجرام.

a. افترض أن m = عدد كيلوجرامات مزيج المكسرات. أكمل الجدول التالي.

	الكيلوجرامات	السعر لكل كيلوجرام	السعر الإجمالي
الفاكهة المجففة	4.5	51	51 (4.5)
مزيج المكسرات	m	AED 4.50	$4.5m$
مزيج المكسرات والفاكهة	$m+10$	AED 5.00	$5(10+m)$

b. اكتب معادلة نسبية مستخدمًا العمود الأخير من الجدول. $62.5+4.5m=50+5m$

c. حُلّ المعادلة لتحدد عدد كيلوجرامات مزيج المكسرات اللازم. 25

مثال 4 10. **المسافة** يبلغ متوسط سرعة قيادة موزة لدراجتها 11.5 كيلومترًا في الساعة. وتقوم برحلة ذهاب وعودة بمسافة 40 كيلومترًا. وتستغرق ساعة و 20 دقيقة في نفس اتجاه الرياح وساعتين و 30 دقيقة عكس اتجاه الرياح.

a. اكتب تعبيرًا يمثل الزمن الذي قضته موزة في اتجاه الريح. $\frac{20}{11.5-x}$

b. اكتب تعبيرًا يمثل الزمن الذي قضته موزة عكس اتجاه الريح

c. كم يستغرق إكمال الرحلة؟ 3 h و 50 min

d. اكتب معادلة نسبية لتحديد سرعة الرياح وأوجد حلها. $\frac{20}{11.5+x}+\frac{20}{11.5-x}=\frac{23}{6}$؛ 3.5 mph

مثال 5 11. **العمل** يعمل أيوب وفارس في تلميع السيارات. ويستطيع أيوب تلميع إحدى السيارات في 60 دقيقة بينما يستطيع فارس تلميع نفس السيارة في 80 دقيقة. ويخطط الاثنان إلى تلميع نفس السيارة معًا ويودان معرفة كم من الزمن سيستغرق ذلك.

a. ما المقدار الذي سيكمله أيوب في دقيقة؟ $\frac{1}{60}$

b. ما المقدار الذي سيكمله أيوب في x دقيقة؟ $\frac{x}{60}$

c. ما المقدار الذي سيكمله فارس في دقيقة؟ $\frac{1}{80}$

d. ما المقدار الذي سيكمله فارس في x دقيقة؟ $\frac{x}{80}$

e. اكتب معادلة نسبية تمثل عمل أيوب وفارس معًا على السيارة. $\frac{x}{60}+\frac{x}{80}=1$

f. حُلّ المعادلة لتحدد الزمن المستغرق لإكمال تلميع السيارة. حوالي 3.43 min

مثال 6 حُلّ كل من المتباينات التالية. وتحقق من حلولك.

12. $\frac{3}{5x}+\frac{1}{6x}>\frac{2}{3}$ $0<x<1.15$
13. $\frac{1}{4c}+\frac{1}{9c}<\frac{1}{2}$ $c<0$, أو $\frac{13}{18}<c$
14. $\frac{4}{3y}+\frac{2}{5y}<\frac{3}{2}$ $y>\frac{52}{45}$ أو $y<0$
15. $\frac{1}{3b}+\frac{1}{4b}<\frac{1}{5}$ $b<0$, أو $\frac{35}{12}<b$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

خيارات الواجب المنزلي المتباينة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	16-30, 36, 38-54	40-43 ،فردي 17-29	36, 38, 39, 44-54 ،زوجي 16-30
OL أساسي	31-36, 38-54 ،فردي 17-29	16-30, 40-43	31-36, 38, 39, 44-54
BL متقدم	31-51, (52-54 ،اختياري)		

3 التمرين

التقييم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 15 للتحقق من الاستيعاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس الممارسات الرياضية

البنية يدقق الطلاب المتفوقون في مادة الرياضيات لتمييز نمط أو بنية، ويمكنهم رؤية الأشياء المعقدة، مثل بعض التعابير الجبرية، كأشياء مفردة أو تتألف من عدة أشياء.

ملاحظات لحل التمرين

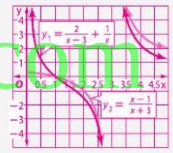
ورق مربعات بالنسبة للتمارين 33 و 47 إلى 49. سيحتاج الطلاب إلى ورق مربعات.

التمثيلات المتعددة

في التمرين 33. سيستخدم الطلاب التمثيلات البيانية للدوال ذات الصلة للتحقق من حلول المعادلات النسبية.

إجابات إضافية

33b.



36. الإجابة النموذجية:

38. الإجابة النموذجية: $\frac{4}{x+3}=\frac{x}{x-4}+\frac{7}{4}$ القيمتان -2 و 3 هما قيمتان غير معرفتان. في التمثيل البياني للدالة $f(x)$ ستكون هناك خطوط تقارب رأسية عند هاتين القيمتين.

39. الإجابة النموذجية: يمكن أن يؤدي ضرب كلا طرفي المعادلة أو المتباينة النسبية في المقام المشترك الأصغر إلى ظهور حلول دخيلة. وبالتالي، ينبغي عليك التحقق من كافة الحلول للتأكد من مناسبتها للمعادلة أو المتباينة الأصلية.

www.almanahj.com

تدريس الممارسات الرياضية

الأدوات عند إنشاء نماذج الرياضيات، يدرك الطلاب المتفوقون في الرياضيات أن التكنولوجيا قد تتيح لهم تصور نتائج الافتراضات المختلفة، واستكشاف عواقبها، ومقارنة التوقعات مع البيانات. ويمكنهم استعمال الأدوات التكنولوجية لاستكشاف المفاهيم وتعميق فهمهم لها.

التمرين وحل المسائل

المثالان 1-2 حُـلّ كل من المعادلات التالية. وتحقق من حلولك.

16. $\frac{9}{x-7}-\frac{7}{x-6}=\frac{13}{x^2-13x+42}$ 9
17. $\frac{13}{y+3}-\frac{12}{y+4}=\frac{18}{y^2+7y+12}$ 2
18. $\frac{14}{x-2}-\frac{18}{x+1}=\frac{22}{x^2-x-2}$ 7
19. $\frac{11}{a+2}-\frac{10}{a+5}=\frac{36}{a^2+7a+10}$ 1
20. $\frac{x}{2x-1}+\frac{3}{x+4}=\frac{21}{2x^2+7x-4}$ $-12, 2$
21. $\frac{2}{y-5}+\frac{y-1}{2y+1}=\frac{2}{2y^2-9y-5}$ $\varnothing$

الأمثلة 3-5

22. **الكيمياء** كم عدد ميلليترات محلول حمضي بتركيز 20% التي يجب إضافتها إلى 30 mL من محلول حمضي بتركيز 75% للحصول على محلول حمضي بتركيز 30%؟ 180 mL
23. **البقالة** اشترت سالي 1.4 kg من الموز مقابل 7.35 AED للكيلوجرام. فكم عدد كيلوجرام التفاح الذي يبلغ 10.20 AED للكيلوجرام التي يجب أن تشتريها بحيث تكون تكلفة كيلوجرام الفاكهة 8.15 AED؟ 4.07 kg
24. **المباني** تستطيع مجموعة بدر التطوعية بناء مرآب في 12 ساعة. وتستطيع مجموعة شيماء بناء مرآب في 16 ساعة. كم من الزمن سيستغرقان إذا عملا معًا؟ حوالي 6.86 ساعات.

مثال 6 حُـلّ كل من المتباينات التالية. وتحقق من حلولك.

25. $3-\frac{4}{x}>\frac{5}{4x}$ $x<0$ أو $x>1.75$
26. $\frac{5}{3a}-\frac{3}{4a}>\frac{5}{6}$ $0<a<1.1$
27. $\frac{x-2}{x+2}+\frac{1}{x-2}>\frac{x-4}{x-2}$ $x<-2$, أو $2<x<14$
28. $\frac{3}{4}-\frac{1}{x-3}>\frac{x}{x+4}$ $-4<x<3$
29. $\frac{x}{5}+\frac{2}{3}<\frac{3}{x-4}$ $x<-5$ أو $4<x<\frac{17}{3}$
30. $\frac{x}{x+2}+\frac{1}{x-1}<\frac{3}{2}$ $2<x, -2<x<1,$ $x<-5$

31. **السفر** جوًا تستغرق إحدى القطارات 20 ساعة لتطير إلى وجهتها عكس اتجاه الرياح. تستغرق رحلة العودة 16 ساعة. إذا كان متوسط سرعة القطارة في الهواء الساكن 500 كيلومتر في الساعة، فما متوسط سرعة الرياح أثناء الرحلة؟ 55.56 mi/h
32. **المعرفة المالية** ترغب هدى في استثمار 10,000 AED في حسابين مختلفين. ويمكن للحساب المحفوف بالمخاطر أن يجني فائدة 9%، بينما يجني الحساب الآخر فائدة 5%. وتود أن تجني فائدة 750 AED هذا العام. من بين الجداول أو التمثيل البياني أو المعادلات، اختر أفضل طريقة تمثيل تلزمها لتحديد المقدار المفترض استثماره في كل حساب.
33. **التمثيلات المتعددة** فكّر في $\frac{2}{x-3}+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x-3}$ 6250 AED بفائدة 9% و 3750 AED بفائدة 5%

a. **الصيغ الجبرية** حُـلّ المعادلة لإيجاد x. هل كانت أي من قيم x دخيلة؟ 1؛ نعم؛ 3

b. **التمثيل البياني** مثّل $y_1=\frac{2}{x-3}+\frac{1}{x}$ و $y_2=\frac{x-1}{x-3}$ بيانيًا على نفس التمثيل البياني لـ $0<x<5$. انظر الحاشية.

c. **التحليلات** بأي قيم x تتقاطع؟ هل تتقاطع القيم عندما تكون x دخيلة بالنسبة لحل المعادلة الأصلية؟ 1؛ لا

d. **الصيغ اللفظية** استخدم المعرفة لذكر كيفية استخدام تمثيل بياني لتحديد إن كانت الحلول المحتملة لمعادلة نسبية دخيلة أم لا. مثل بيانيًا كل من طرفي

C حُـلّ كل من المعادلات التالية. وتحقق من حلولك.

المعادلة. في النقاط التي يتقاطع عندها التمثيل البياني. لا يوجد حل. فإذا لم تتقاطع. يكون الحل المحتمل دخيلاً.

34. $\frac{2}{y+3}-\frac{3}{4-y}=\frac{2y-2}{y^2-y-12}$ -1
35. $\frac{2}{y+2}-\frac{y}{2-y}=\frac{y^2-4}{y^2-4}$ $\varnothing$

مسائل مهارات التفكير العليا

36. **مسألة غير محددة** الإجابة قدّم مثالًا على معادلة نسبية يمكن حلها بضرب كل طرف من طرفي المعادلة في $4(x+3)(x-4)$. انظر الحاشية.
37. **التحدي** حُـلّ $\frac{1+\frac{9}{x}+\frac{20}{x^2}}{1-\frac{25}{x^2}}=\frac{x+4}{x-5}$. جميع الأعداد الحقيقة عدا 0 ,5 ,-5
38. **الأدوات** عند استخدام خاصّية Table على حاسبة التمثيل البياني لاستكشاف $f(x)=\frac{1}{x^2-x-6}$، ستظهر القيم 2− و 3 على الحاسبة "ERROR". وضح دلالتها. انظر الحاشية.
39. **الكتابة في الرياضيات** لماذا ينبغي عليك التحقق من حلولك للمعادلات والمتباينات النسبية؟ انظر الحاشية.

www.almanahj.com

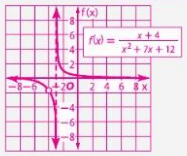
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4 التقييم

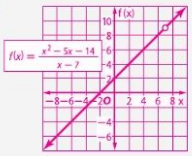
تعيين مصطلح الرياضيات اطلب من الطلاب كتابة مسائل من الحياة اليومية تشبه تلك التي رأوها في هذا الدرس ولكن باستخدام البيانات الخاصة بهم. اطلب من الطلاب حل المسائل.

إجابات إضافية

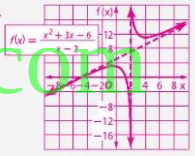
47.



48.



49.



تدريب على الاختبارات المعيارية

40. يحتوي 9 kg من مزيج البكسرات على 55% من الفول السوداني ممزوجًا بـ 6 kg من نوع آخر من مزيج البكسرات يحتوي على 40% من الفول السوداني. فكم نسبة الفول السوداني في المزيج الجديد؟

C

A 58% B 51% C 49% D 47%

41. بالعمل وحده، يستطيع سائم حفر حفرة 3 m في 3 m في خمس ساعات. ويستطيع حسن حفر نفس الحفرة في ست ساعات. كم من الزمن سيستغرقان إذا عملا معًا؟

J

F 1.5 h H 25.2 h

G 2.34 h J 37.2 h

42. انطلقت حاملة طائرات في رحلة إلى مدينة ما ثم عادت. وقد استغرقت رحلة الذهاب ثلاث ساعات ورحلة العودة أربع ساعات. وقد كان متوسط السرعة في رحلة العودة 6 km/h أوجد متوسط سرعة الطرحلة إلى غوام.

B

A 6 km/h C 10 km/h

B 8 km/h D 12 km/h

43. **إجابة قصيرة** إذا كان المستقيم ℓ متعامدًا على قطعة مستقيمة CD في نقطة F و $CF = FD$، فكم عدد النقاط على المستقيم ℓ التي تكون مسافاتها من النقطة C تنص مسافاتها من النقطة D جميع النقاط

مراجعة شاملة

حدد إن كانت كل علاقة توضح تغيرًا طرديًا أم عكسيًا أم لا توضح أيًا منها. (الدرس 5-9)

44. لا هذا ولا ذاك

x	y
12	18
24	36
36	18
72	9

45. طردي

x	y
0.2	24
0.6	72
1.8	216
5.4	648

46. لا هذا ولا ذاك

x	y
14	3
28	1.5
56	0.75
112	0.375

مثّل كل دالة بيانيًا. (الدرس 4-9) 47-49. **انظر الحاشية.**

47. $f(x) = \frac{x+4}{x^2+7x+12}$

48. $f(x) = \frac{x^2-5x-14}{x-7}$

49. $f(x) = \frac{x^2+3x-6}{x-2}$

50. **المناخ** يعبر عن الضغط الجوي P، بالبار، لارتفاع معين عن الأرض من خلال المعادلة $P = a \cdot e^{-\frac{h}{k}}$، في المعادلة، a تمثل الضغط على سطح الأرض، والذي يبلغ نحو 1 بار، ويمثل k الارتفاع الذي تود إيجاد الضغط عنده بالكيلومترات بينما تبلغ H 7 km ثابتًا.

a. أوجد الضغط عند ارتفاع 2 km و 4 km و 7 km. 0.75 بار؛ 0.56 بار؛ 0.37 بار

b. ما الذي تلاحظه حول الضغط مع تزايد الارتفاع؟ ينخفض الضغط كلما زاد الارتفاع

51. **أجهزة الكمبيوتر** منذ أن تم اختراع أجهزة الكمبيوتر، تضاعفت السرعة الحاسوبية بعامل من 4 كل ثلاث سنوات.

a. إذا كان جهاز الحاسب يعمل بسرعة حاسوبية s فيوم، فاكتب تعبيرًا للسرعة التي تتوقع أن يعمل بها جهاز حاسب مكافئ بعد x فترات من ثلاث سنوات. $s \times 4^x$

b. افترض أن جهاز الحاسب يعمل بسرعة 2.8 جيجا هرتز وترغب في شراء جهاز يعمل بسرعة 5.6 جيجا هرتز. إذا وجدت جهاز حاسب سريع جدًا ولكنه غير متاح حاليًا وكنت تعلم أن التقدم التكنولوجي يسير بالسرعة التي يستطيع بها جهاز حاسب كهذا، 0.5 فترة من ثلاث سنوات أو 1.5 yr

مراجعة المهارات

حدد ما إذا كان التالي أطوال محتملة لأضلاع مثلث قائم.

54. 7, 24, 25 نعم

53. 60, 80, 100 نعم 54

52. 5, 12, 13 نعم

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التدريس المتمايز OL BL

التوسع يُطلق على المعادلة $\frac{1}{f} = \frac{1}{d} + \frac{1}{i}$ أحيانًا "معادلة العدسة." توضح كيفية اتصال الطول البؤري f لعدسة ما بالمسافات d و i من العدسة إلى شيء ما ومن صورة الشيء، كما تتم رؤيته عبر العدسة. على التوالي. اطلب من الطلاب إيجاد الطول البؤري لعدسة ما، بالنسبة لشيء محدد، إذا كان يبلغ قياس d 20 cm ويبلغ قياس i 12 cm. اطلب منهم حل معادلة العدسة لإيجاد f بالنسبة إلى d و i.

7.5 cm؛ $f = \frac{di}{d+i}$

www.almanahj.com

1 التركيز

الهدف استخدام حاسبة التمثيل البياني لحل المعادلات النسبية من خلال التمثيل البياني أو من خلال استخدام خاصية الجدول.

المواد الخاصة لكل مجموعة

- حاسبة التمثيل البياني

نصيحة للتدريس

عندما يُدخل الطلاب الدوال في محرر الدالة (قائمة Y=)، ينبغي عليهم استخدام أقواس حول أي بسط أو مقام لا يكون رقم مفرد أو متغير.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

اطلب من الطلاب العمل في مجموعات ثنائية بحيث يمكنهم مساعدة بعضهم البعض في تصحيح أخطاء خطوات العملية على الحاسبة. اطلب من المجموعات إتمام النشاطين 1 و 2 والتمرينين 1 و 5.

نشاط 1

- عند استخدام خاصية التقاطع في الخطوة 2، ينبغي على الطلاب الضغط ENTER لاختيار التمثيل البياني الخاص بكل دالة. ومن ثم سيتم الاستفسار منهم عن **خمن؟**. ينبغي عليهم تحريك السهم بالقرب من نقطة مقدرة للتقاطع قبل الضغط على ENTER للمرة الثالثة.
- كبديل لاستخدام خاصية الجدول في الخطوة 3، يمكن للطلاب إثبات صحة الحل الخاص بكل دالة على الشاشة الرئيسية مباشرة. سينتج عن إدخال **Y1** = (5/3) و **Y2** = (5/3) نتائج 1.5.

9-6 مختبر تقنية التمثيل البياني
حل المعادلات والمتباينات النسبية

يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لحل المعادلات النسبية من خلال التمثيل البياني أو من خلال استخدام خاصية Table. مثّل كلا طرفي المعادلة بيانيًا، وحدد موضع نقطة (نقاط) التقاطع.

نشاط 1 معادلة نسبية

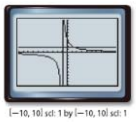
حُلّ المعادلة: $\frac{4}{x+1} = \frac{3}{2}$.

الخطوة 1 مثّل كل طرف من أطراف المعادلة بيانيًا.

مثّل كل طرف من أطراف المعادلة بيانيًا كما لو كان دالة منفصلة. أدخل $\frac{4}{x+1}$ بالشكل Y1 و $\frac{3}{2}$ بالشكل Y2. ثم مثّل المعادلتين بيانيًا في نافذة العرض القياسية.

خطوات العملية على الحاسبة:

Y= 4 ÷ (X,T,θ,n + 1) ENTER 3 ÷ 2 ZOOM 6



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

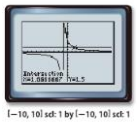
وحيث إن الحاسبة في وضع الاتصال، فقد يظهر خط عمودي يربط بين فرعي المقطع الزائد. هذا الخط ليس جزءًا من التمثيل البياني.

الخطوة 2 استخدم خاصية intersect (التقاطع).

تتيح لك خاصية **intersect (التقاطع)** من قائمة CALC **(احسب)** تقريب الإحداثيات المرتب للنقطة التي تتداخل عندها التمثيلات البيانية.

خطوات العملية على الحاسبة: 2nd [CALC] 5

اختر تمثيلاً بيانيًا واضغط ENTER. اختر التمثيل البياني الآخر. واضغط ENTER ثم اضغط ENTER مجددًا.



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

الإجابة $1\frac{2}{3}$.

الخطوة 3 استخدم خاصية TABLE (الجدول).

تحقق من الحل باستخدام خاصية **TABLE (الجدول)** لعرض الجدول لإظهار قيم x بزيادات تساوي $1\frac{2}{3}$.

خطوات العملية على الحاسبة: 2nd [TABLE] 2nd [TBLSET] 0 ENTER 1 ÷ 3 ENTER

يعرض الجدول قيم x وقيم y المقابلة لها في كل تمثيل بياني. عند $x = 1\frac{2}{3}$، يكون لكلتا الدالتين قيمة y تساوي 1.5. لذلك، يكون حل المعادلة $1\frac{2}{3}$.

(يتبع في الصفحة التالية)

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

www.almanahj.com

نشاط 2

- في النشاط 2، بما أن التمثيل البياني للمتباينة $y > 9$ يبدأ عند قيمة شاشة النافذة القياسية، فقد يرغب الطلاب في تغيير النافذة للحصول على y من أجل $[-10, 20]$.

تمرين اجعل الطلاب يكملوا التمارين 2-5 و 9-9.

3 التقييم

التقييم التكويني

استخدم التمرين 2 لتقويم ما إذا كان يمكن للطلاب فهم كيفية إيجاد تقاطع التمثيلات البيانية على الطرفين الأيسر والأيمن للمعادلة النسبية.

من الملموس إلى المجرد

اطلب من الطلاب حل المعادلة $\frac{x}{2} = \frac{8}{x}$. سيجدون أن التمثيلين البيانيين لكل من $y = \frac{x}{2}$ و $y = \frac{8}{x}$ يتقاطعان في موضعين. إنه من الضروري بشكل خاص في الحالات مثل هذه أن يستخدموا خاصية **التقاطع** بشكل صحيح. ردًا على **خمن؟**، يجب عليهم أولاً اختيار إحدى نقاط التقاطع. ومن ثم تكرار عملية **التقاطع** واختيار النقطة الأخرى للتقاطع. الحلان هما $x = 4$ و $x = -4$.

مختبر تقنية التمثيل البياني
حل المعادلات والمتباينات النسبية تابع

يمكنك استخدام إجراء مماثل لحل المتباينات النسبية باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

النشاط 2 المتباينة النسبية

حُلّ المتباينة $\frac{3}{x} + \frac{7}{x} > 9$.

الخطوة 1 أدخل المتباينات.

أعد كتابة المسألة في صورة نظام متباينات.

المتباينة الأولى هي $y > \frac{3}{x} + \frac{7}{x}$ أو $y < \frac{3}{x} + \frac{7}{x}$. بما أن هذه المتباينة تحوي رمز أصغر من.

فظلّل تحت المنحنى. أدخل الحد أولاً ثم استخدم الأزرار والأسهم

ENTER لاختيار أيقونة "التظليل تحت".

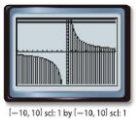
المتباينة الثانية هي $y > 9$. ظلّل تحت المنحنى بما أن هذه المتباينة تحوي رمز أكبر من.

خطوات العملية على الحاسبة:

Y= ◀ ◀ ENTER ENTER ENTER ▶ ▶ 3 ÷ X,T,θ,n + 7 ÷ X,T,θ,n
ENTER ◀ ◀ ENTER ENTER ▶ ▶ 9

الخطوة 1 تمثيل النظام بيانيًا.

خطوات العملية على الحاسبة: GRAPH



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

مجموعة الحل للمتباينة الأصلية هي مجموعة قيم x للنقاط الواقعة في المنطقة التي تتداخل فيها المناطق المظللة.

باستخدام خاصية intersect **(التقاطع)** في الحاسبة، يمكنك استنتاج أن مجموعة الحل هي $\left\{x \middle| 0 < x < 1\frac{2}{9}\right\}$.

الخطوة 2 استخدم خاصية TABLE **(الجدول)**

تحقق باستخدام خاصية TABLE **(الجدول)**. رتب الجدول لإظهار قيم x بزيادات تساوي $\frac{1}{9}$.

خطوات العملية على الحاسبة:

2nd [TBLSET] 0 ENTER 1 ÷ 9 ENTER
2nd [TABLE]

X	Y1	Y2
.99999	22.5	9
.55556	18	9
.66667	15	9
.22222	12.857	9
.88889	11.25	9
1.1111	10	9

X=1.1111111111

مرر عبر الجدول لإيجاد أول قيمة في العمود Y2 التي تكون أكبر من 0 والأصغر من 9. Y1 و Y2 لهذا x هو $1\frac{2}{9}$.

يؤكد بأن حل المتباينة هو $\left\{x \middle| 0 < x < 1\frac{2}{9}\right\}$.

تمارين

حُلّ كل معادلة أو متباينة.

1. $\frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{2}{x}$ **2**
2. $\frac{1}{x-4} = \frac{2}{x-2}$ **6**
3. $\frac{4}{x} = \frac{6}{x^2}$ **1.5**
4. $\frac{1}{1-x} = 1 - \frac{x}{x-1}$ **4.** $\{x | x \neq 1\}$
5. $\frac{1}{x+4} = \frac{2}{x^2+3x-4} - \frac{1}{1-x}$ **5.** $\varnothing$
6. $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} > 5$ $\{x | 0 < x < 0.3\}$
7. $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x} < 0$
8. $1 + \frac{5}{x-1} \leq 0$ $\{x | -4 \leq x < 1\}$
9. $2 + \frac{1}{x-1} \geq 0$ $\{x | x \leq 0.5 \text{ أو } x > 1\}$

7. $\left\{x \middle| x < 0 \text{ أو } \frac{2}{3} < x < 1\right\}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

www.almanahj.com

9 دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

التعابير النسبية (الدرسان 9-1 و 9-2)

- ضرب التعابير النسبية وقسمتها عمليتان مشابهتان لضرب الكسور وقسمتها.
- تحويل الكسور المركبة إلى أبسط صورة. يمكن تبسيط كل من البسط والمقام على حدة، ثم تبسيط المقدار الناتج.

الدوال النسبية ودوال المقلوب (الدروس 9-3 و 9-4)

- تأخذ دالة المقلوب الصيغة $f(x) = \frac{1}{a(x)}$، حيث $a(x)$ دالة خطية و $a(x) \neq 0$.
- تأخذ الدالة النسبية الصيغة $\frac{a(x)}{b(x)}$، حيث $a(x)$ و $b(x)$ دالتان كثيرتا الحدود و $b(x) \neq 0$.

التغير الطردي والمشترك والعكسي (الدرس 9-5)

- التغير الطردي: يكون هناك عدد غير صفري k بحيث تكون $y = kx$
- التغير المشترك: يكون هناك عدد غير صفري k بحيث تكون $y = kxz$
- التغير العكسي: يكون هناك عدد غير صفري k بحيث يكون $xy = k$ أو $y = \frac{k}{x}$، حيث $x \neq 0$ و $y \neq 0$.

المعادلات والمتباينات النسبية (الدرس 9-6)

- تخلص من الكسور في المعادلات النسبية عبر ضرب كل طرف من طرفي المعادلة بالمقام المشترك الأصغر.
- يجب ألا تمثل الحلول المستبعدة لمعادلة نسبية العدم التي ينتج عنها صفر في المقام.

مطويات منظم الدراسة

تأكد من إدراج المفاهيم الأساسية في المطوية.

المفردات الأساسية

التغير المركب combined variation	نقطة الانفصال point discontinuity
كسر مركَّب complex fraction	معادلة نسبية rational equation
ثابت التغير constant of variation	التعبير النسبي rational expression
التغير الطردي direct variation	دالة نسبية rational function
خط تقارب أفقي horizontal asymptote	متباينة نسبية rational inequality
قطع زائد hyperbola	دالة المقلوب reciprocal function
تغير عكسي inverse variation	خط تقارب رأسي vertical asymptote
تغير مشترك joint variation	المتوسط المرجح weighted average
خط تقارب مائل oblique asymptote	

مراجعة المفردات

اختر من القائمة أعلاه المصطلح الذي يكمل كل جملة أو عبارة بأفضل شكل.

1. _____ هو تعبيرٌ نسبي يحتوي بسطه و/ أو مقامه على تعبير نسبي. **كسر مركَّب (complex fraction)**
2. إذا أظهرت كميتان _____ فإن ناتج ضربهما يساوي ثابتًا k. **تغير عكسي (inverse variation)**
3. خط التقارب _____ هو خط تقارب خطي ليس أفقيًا ولا رأسيًا. **المائل**
4. يمكن التعبير عن _____ بالصيغة $y = kx$. **التغير الطردي (direct variation)**
5. تعرف المعادلات التي تحتوي على كسر واحد أو أكثر بأسم _____ **المعادلات النسبية (rational equations)**
6. يحتوي التمثيل البياني لـ $y = \frac{k}{x+2}$ على _____ عند $x = -2$. **خط تقارب رأسي (vertical asymptote)**
7. يحدث _____ عندما تختلف كمية واحدة بشكل مباشر بوصفها ناتج ضرب لاثنين أو أكثر من الكميات الأخرى. **التغير المشترك**
8. تدعى نسبة تعبيرين كثيري الحدود بأسم _____ **التعبير النسبي (rational expression)**
9. تبدو _____ مثل فجوة في التمثيل البياني لأن التمثيل البياني غير معرّف عند تلك النقطة. **نقطة الانفصال**
10. يحدث _____ عندما تختلف كمية واحدة بشكل مباشر و/ أو عكسي مثل اثنين أو أكثر من الكميات الأخرى. **التغير المركَّب (Combined variation)**

673

حقوق الطبع والتأليف © مجموعة تصدر عن مؤسسة McGraw-Hill Education

التقييم التكويني

المفردات الأساسية تشير مراجع الصفحة بعد كل كلمة إلى المكان الذي ذُكر فيه المصطلح لأول مرة. إذا واجه الطلاب صعوبة في الإجابة عن الأسئلة 1–10، فذكرهم باستخدام هذه الصفحات المرجعية لإنعاش ذاكرتهم بشأن المفردات.

مطويات منظم الدراسة

مطويات دينا زايك©

اطلب من الطلاب إلقاء نظرة على الوحدة للتأكد من أنهم قد أضافوا بعض الأمثلة إلى مطوياتهم. اقترح على الطلاب الاحتفاظ بمطوياتهم بجانبهم أثناء إنجاز صفحات دليل الدراسة والمراجعة. وبين لهم أن المطويات تمثل أداة مراجعة سريعة عند المذاكرة لاختبار الوحدة.

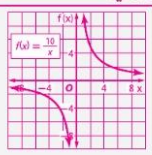
www.dinahj.com

مراجعة درس بدرس

التدخل التقييمي إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لعرض الموضوعات التي تتناولها الأسئلة، فذكّر الطلاب بأن مراجع الدروس ترشدهم إلى مكان مراجعة الموضوع في كتبهم المدرسية.

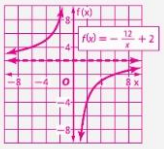
إجابات إضافية

24.



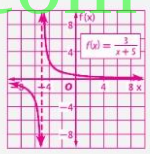
$D = \{x \mid x \geq 0\}$;
$R = \{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$

25.



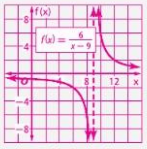
$D = \{x \mid x \neq 0\}$
$R = \{f(x) \mid f(x) \neq 2\}$

26.



$D = \{x \mid x \neq -5\}$,
$R = \{ f(x) \mid f(x) \neq 0\}$

27.



$D = \{x \mid x \neq 9\}$, $R = \{f(x) \mid f(x) \neq 0\}$

مراجعة درس بدرس

9-1 ضرب التعابير النسبية وقسمتها

مثال 1

حوّل $\frac{4a}{3b^3} \times \frac{9b^4}{2a^2}$ لأبسط صورة.

$$\frac{4a}{3b^3} \times \frac{9b^4}{2a^2} = \frac{2^2 \times 2 \times a \times 3^2 \times 3 \times b^4 \times b \times b}{3^2 \times b^3 \times 2 \times a^2 \times a}$$
$$= \frac{6b^3}{a}$$

مثال 2

حوّل $\frac{r^2 + 5r}{2r} \div \frac{r^2 - 25}{6r - 12}$ لأبسط صورة.

$$\frac{r^2 + 5r}{2r} \div \frac{r^2 - 25}{6r - 12} = \frac{r^2 + 5r}{2r} \times \frac{6r - 12}{r^2 - 25}$$
$$= \frac{r(r + 5)}{2r} \times \frac{6(r - 2)}{(r + 5)(r - 5)}$$
$$= \frac{3(r - 2)}{r - 5}$$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

11. $\frac{-16xy}{27z} \times \frac{15z^3}{8x^2}$ $\frac{10yz^2}{9x}$

12. $\frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 + x - 12} \times \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 7x + 10}$ $\frac{x - 4}{x + 4}$

13. $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} \times \frac{x^2 - 5x - 14}{x^2 - 6x - 7}$ $\frac{x - 1}{x - 2}$

14. $\frac{x + y}{15x} \div \frac{x^2 - y^2}{3x^2}$ $\frac{x}{5(x - y)}$

15. $\frac{x^2 + 3x - 18}{x + 4} \div \frac{x^2 + 7x + 6}{x + 4}$ $\frac{x - 3}{x + 1}$

16. **الهندسة** تبلغ مساحة مثلث $3x^2 + 9x - 54$ سنتيمترا مربعا. إذا كان ارتفاع المثلث $x + 6$ سنتيمترات. أوجد طول القاعدة. $6x - 18$ cm

9-2 جمع التعابير النسبية وطرحها

مثال 3

حوّل $\frac{3a}{a^2 - 4} - \frac{2}{a - 2}$ لأبسط صورة.

$$\frac{3a}{a^2 - 4} - \frac{2}{a - 2} = \frac{3a}{(a - 2)(a + 2)} - \frac{2}{a - 2}$$
$$= \frac{3a}{(a - 2)(a + 2)} - \frac{2(a + 2)}{(a - 2)(a + 2)}$$
$$= \frac{3a - 2(a + 2)}{(a - 2)(a + 2)}$$
$$= \frac{a - 4}{(a - 2)(a + 2)}$$

خاصية التوزيع

بسّط

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

17. $\frac{9}{4ab} + \frac{5a}{6b^2}$ $\frac{27b + 10a^2}{12ab^2}$

18. $\frac{3}{4x - 8} - \frac{x - 1}{x^2 - 4}$ $\frac{-x + 10}{4(x - 2)(x + 2)}$

19. $\frac{y}{2x} + \frac{4y}{3x^2} - \frac{5}{6xy^2}$ $\frac{3xy^3 + 8y^3 - 5x}{6x^2y^2}$

20. $\frac{2}{x^2 - 3x - 10} - \frac{6}{8x + 16}$ $\frac{-4x - 18}{(x - 5)(x + 2)(x - 4)}$

21. $\frac{3}{3x^2 + 2x - 8} - \frac{4}{2x^2 + 6x + 4}$ $\frac{12x^2 - 10x + 6}{2(x + 2)(3x - 4)(x + 1)}$

22. $\frac{3}{2x + 3} - \frac{x}{x + 1}$ $\frac{-2x^2 + 3}{4x^2 + 11x + 5}$
$\frac{2x}{x + 1} + \frac{5}{2x + 3}$

23. **الهندسة** ما محيط المستطيل؟

$\frac{10x + 20}{(x + 6)(x + 1)}$

$\frac{1}{x+1}$

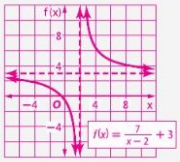
$\frac{4}{x+6}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

www.almanahj.com

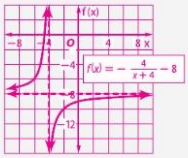
إجابات إضافية

28.



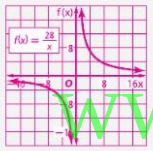
$D = \{x \mid x \neq 2\}$,
$R = \{f(x) \mid f(x) \neq 3\}$

29.

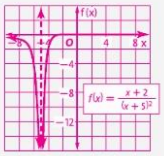


$D = \{x \mid x \neq -4\}$,
$R = \{f(x) \mid f(x) \neq -8\}$

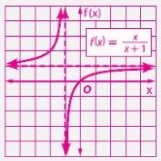
30b.



34.



35.

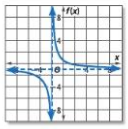


9-3 تمثيل دوال المطلوب بيانيًا

مثال 4

مثّل $f(x) = \frac{3}{x+2} - 1$ بيانيًا. واذكر المجال والمدى.

$a = 3$: يمتد التمثيل البياني رأسيًا.
$h = -2$: أزِح الرسم البياني وحددين لأسفل.
يوجد خط تقارب عند $x = -2$.
$k = -1$: أزِح الرسم البياني وحدة واحدة لأسفل.
يوجد خط تقارب عند $f(x) = -1$.



المجال: $\{x \mid x \neq -2\}$,
المدى: $\{f(x) \mid f(x) \neq -1\}$

مثّل كل دالة بيانيًا، واذكر المجال والمدى.

24. $f(x) = \frac{10}{x}$
25. $f(x) = -\frac{12}{x} + 2$
26. $f(x) = \frac{3}{x+5}$
27. $f(x) = \frac{6}{x-9}$
28. $f(x) = \frac{7}{x-2} + 3$
29. $f(x) = \frac{4}{x+4} - 8$

30. **الحقل** يزرع مجلس الطلاب 28 شجرة لمشروع خدمي. ويعتمد عدد الأشجار التي سيزرعها كل شخص على عدد أعضاء مجلس الطلاب.
a. اكتب دالة لتمثيل هذه الحالة $f(x) = \frac{28}{x}$
b. ارسم الدالة بيانيًا. **انظر الهامش.**

9-4 التمثيل البياني للدوال النسبية

مثال 5

حدد معادلات خطوط التقارب الرأسية وقيم x لأي فجوات في التمثيل البياني للدالة

$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2x-3}$

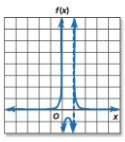
$\frac{x^2-1}{x^2+2x-3} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)}$

الدالة غير معرّفة عندما $x = 1$ و $x = -3$.

بما أن $\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{x+1}{x+3}$ عندما $x = -3$، يوجد خط تقارب رأسي، و $x = 1$ تمثل فجوة في التمثيل البياني.

مثال 6

مثّل $f(x) = \frac{1}{6x(x-1)}$ بيانيًا.



الدالة غير معرّفة عندما $x = 0$ و $x = 1$. لأن $\frac{1}{6x(x-1)}$ في أبسط صيغة. $x = 0$ و $x = 1$ خطان تقاربيان رأسيان. ارسم خطي التقارب وارسم التمثيل البياني.

حدد معادلات خطوط التقارب الرأسية وقيم x لأي فجوات في التمثيل البياني لكل دالة نسبية.

31. $f(x) = \frac{3}{x^2+4x}$ $x = -4, x = 0$
32. $f(x) = \frac{x+2}{x^2+6x+8}$ $x = -4$:الفجوة $x = -2$
33. $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-5x-24}$ $x = 8$:الفجوة $x = -3$

مثل كل دالة نسبية بيانيًا. **انظر الهامش.** 34-39

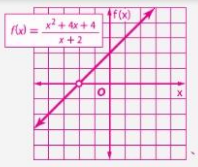
34. $f(x) = \frac{x+2}{(x+5)^2}$
35. $f(x) = \frac{x}{x+1}$
36. $f(x) = \frac{x^2+4x+4}{x+2}$
37. $f(x) = \frac{x-1}{x^2+5x+6}$

38. **المبيعات** تبيع أمل اشتراكات لإحدى المجلات. من أول 15 منزلًا باعت اشتراكات في 10 منها. لنفترض أن أمل ذهبت إلى مجموعة أخرى من المنازل يبلغ عددها x وباعت اشتراكات فيها جميعًا. يمكن تحديد نسبة المنازل التي باعت فيها من إجمالي المنازل باستخدام $P(x) = \frac{10+x}{15+x}$.
a. ارسم الدالة بيانيًا. **انظر الهامش في الصفحة 584.**
b. ما قيم المجال والمدى التي لها معنى في سياق المسألة؟
$D = \{x \geq 0\}$, $R = \{0 \leq P(x) \leq 1.0\}$

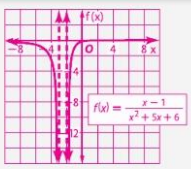
حقوق الطبع والتأليف © مجموعة تعليم ماكجروهيل McGraw-Hill Education

675

36.



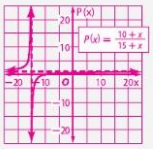
37.



www.almanahi.com

إجابة إضافية

38a.



9 دليل الدراسة والمراجعة تابع

9-5 دوال التغير

39. إذا كانت a تتغير طرديًا مع b وكانت $b = 18$ عندما $a = 27$، فأوجد a عندما $b = 10$. $a = 15$

40. إذا كانت y تتغير عكسيًا مع x وكانت $y = 15$ عندما $x = 3.5$، فأوجد y عندما $x = -5$. $y = -10.5$

41. إذا كانت y تتغير عكسيًا مع x وكانت $y = -3$ عندما $x = 9$، فأوجد y عندما $x = 81$. $y = -\frac{1}{3}$

42. إذا كانت y تتغير بشكل مشترك مع x و z، وكانت $x = 8$ و $z = 3$ عندما $y = 72$ فأوجد y عندما $x = -2$ و $z = -5$. $y = 30$

43. إذا كانت y تتغير بشكل مشترك مع x و z، وكانت $y = 18$ عندما $x = 6$ و $z = 15$، فأوجد y عندما $x = 12$ و $z = 4$. $y = \frac{48}{5}$

44. **أعمال** يتغير دخل ليلى طرديًا مع عدد ساعات رعايتها للأطفال. إذا كانت تكسب AED 68 لكل 8 ساعات من رعاية الأطفال، فأوجد مقدار ما كسبته بعد 5 ساعات من رعاية الأطفال. AED 42.50

مثال 7

إذا كانت y تتغير عكسيًا مع x وكانت $x = 24$ عندما $y = -8$، فأوجد x عندما $y = 15$.

تغير عكسي $\frac{x_1}{y_2} = \frac{x_2}{y_1}$

$x_1 = 24, y_1 = -8, y_2 = 15$ $\frac{24}{15} = \frac{x_2}{-8}$

اضرب ضربًا تباديليًا. $24(-8) = 15(x_2)$

بسّط. $-192 = 15x_2$

اقسم كل طرف على 15. $-12\frac{4}{5} = x_2$

عندما تكون $y = 15$ فإن قيمة x تكون $-12\frac{4}{5}$.

9-6 حل المعادلات والمتباينات النسبية

حُلّ كل معادلة أو متباينة. تحقق من حلولك.

45. $\frac{1}{3} + \frac{4}{x-2} = 6$ $x = \frac{46}{17}$

46. $\frac{6}{x+5} - \frac{3}{x-3} = \frac{6}{x^2+2x-15}$ $x = 13$

47. $\frac{2}{x^2-9} = \frac{3}{x^2-2x-3}$ $x = -7$

48. $\frac{4}{2x-3} + \frac{x}{x+1} = \frac{8x}{2x^2-x-3}$ $x = -\frac{1}{2}, -4$

49. $\frac{x}{x+4} - \frac{28}{x^2+x-12} = \frac{1}{x-3}$ $x = 8$

50. $\frac{x}{2} + \frac{1}{x-1} < \frac{x}{4}$ $x < 1$

51. $\frac{1}{2x} - \frac{4}{5x} > \frac{1}{3}$ $-\frac{9}{10} < x < 0$

52. **أعمال الحديقة** تستطيع ياسمين أن تزرع حديقة خلال 3 ساعات. وتستطيع هالة زراعة الحديقة نفسها خلال 4 ساعات. كم من الزمن سيستغرقان إذا عملا معًا؟ $1\frac{5}{7}$ h

مثال 8

حُلّ المعادلة: $\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} = 0$.

المقام المشترك الأصغر هو $x(x+2)$.

$\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} = 0$

$x(x+2)\left(\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x}\right) = x(x+2)0$

$x(x+2)\left(\frac{3}{x+2}\right) + x(x+2)\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

$3(x) + 1(x+2) = 0$

$3x + x + 2 = 0$

$4x + 2 = 0$

$4x = -2$

$x = -\frac{1}{2}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

www.amanahj.com

إجابات إضافية

5. $\frac{x+7}{3(2x+1)}$

6. $\frac{-x+3}{2(x-1)(x+1)}$

7. $\frac{4y^2+14y-21}{14y^2}$

9. $x=-2; f(x)=-5;$
$D=\{x \mid x \neq -2\},$
$R=\{f(x) \mid f(x) \neq -5\}$

9 تدريب على الاختبار

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. 1–5. **انظر الهامش.**

1. $\frac{r^2+rt}{2r} \div \frac{r+t}{16r^2}$ $8r^2$

2. $\frac{m^2-4}{3m^2} \times \frac{6m}{2-m}$ $-\frac{2(m+2)}{m}$

3. $\frac{m^2+m-6}{n^2-9} \div \frac{m-2}{n+3}$ $\frac{m+3}{n-3}$

4. $\frac{x^2+4x+3}{x^2-2x-15} \cdot \frac{x^2-1}{x^2-x-20}$ $\frac{x+4}{x-1}$

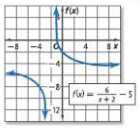
5. $\frac{x+4}{6x+3} + \frac{1}{2x+1}$

6. $\frac{x}{x^2-1} - \frac{3}{2x+2}$

7. $\frac{1}{y} + \frac{2}{7} - \frac{3}{2y^2}$

8. $\frac{2+\frac{1}{x}}{5-\frac{1}{x}}$ $\frac{2x+1}{5x-1}$

9. اذكر خطوط التقارب للدالة الممثلة بيانيًا ومجالها ومداها. **انظر الهامش.**



10. **اختيار من متعدّد** ما معادلة خط التقارب الرأسي للدالة النسبية

$f(x) = \frac{x+1}{x^2+3x+2}$؟ **A**

A $x=-2$

B $x=-1$

C $x=1$

D $x=2$

مثّل كل دالة بيانيًا. 11–16. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

11. $f(x) = -\frac{8}{x} - 9$

12. $f(x) = \frac{2}{x+4}$

13. $f(x) = \frac{3}{x-1} + 8$

14. $f(x) = -\frac{5x}{x+1}$

15. $f(x) = \frac{x}{x-5}$

16. $f(x) = \frac{x^2+5x-6}{x-1}$

17. حدد معادلات أي خطوط التقارب الرأسية وقيم x لأي فجوات في التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{x+5}{x^2-2x-35}$. **خط تقارب رأسي: $x=7$، الفجوة: $x=-5$**

18. حدد معادلات أي خطوط التقارب المائلة في التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{x^2+x-5}{x+3}$. **$f(x)=x-2$**

حُلّ كل معادلة أو متباينة.

19. $\frac{-1}{x+4} = 6 - \frac{x}{x+4}$ $x=-5$

20. $\frac{1}{3} = \frac{5}{m+3} + \frac{8}{21}$ $m=-108$

21. $7 + \frac{2}{x} < -\frac{5}{x}$ $-1<x<0$

22. $r + \frac{6}{r} - 5 = 0$ $r=2, 3$

23. $\frac{6}{7} - \frac{3m}{2m-1} = \frac{11}{7}$ $m=\frac{5}{31}$

24. $\frac{r+2}{3r} = \frac{r+4}{r-2} - \frac{2}{3}$ $r=\frac{-1}{4}$

25. إذا كانت y تتغير عكسيًا مع x وكانت $y=18$ عندما $x=-\frac{1}{2}$، فأوجد x عندما $y=-10$. $\frac{9}{10}$

26. إذا كانت m تتغير طرديًا مع n وكانت $m=24$ عندما $n=-3$، فأوجد n عندما $m=30$. $-\frac{15}{4}$

27. افترض أن r تتغير بشكل مشترك مع s و z. إذا كانت $s=20$ و $r=2.5$ عندما $t=-5$، فأوجد s عندما $r=7$ و $t=-2$. 140

28. **ركوب الدراجات** عندما تركب سها دراجتها، تتغير المسافة التي تقطعها طرديًا مع مقدار وقت ركوبها للدراجة. لنفترض أنها تقطع بالدراجة مسافة 50 km خلال 2.5 ساعة. وفق هذا التمثيل، كم ساعة سيستغرقها قطع مسافة 80 km بالدراجة؟ **4 ساعات**

29. **الطلاء** يستطيع عمر طلاء منزل خلال 10 ساعات. ويستطيع عامر طلاء المنزل نفسه خلال 9 ساعات. كم من الزمن سيستغرقان إذا عملا معًا؟ **حوالي 4.7 ساعات.**

30. **الاختيار من متعدد** كم عدد لترات محلول حمضي بتركيز 25% التي يجب إضافتها إلى 30 L من محلول حمضي بتركيز 80% للحصول على محلول حمضي بتركيز 50%؟ H

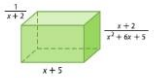
F 18

G 30

H 36

J 66

31. ما حجم متوازي المستطيلات؟



وحدات مكعبة. $\frac{1}{x+1}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

www.almanahj.com

1 التركيز

الهدف استخدام إستراتيجية الحل بترتيب عكسي لحل مسائل الاختبار المعياري.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اسأل:

- لماذا تعتبر طريقة التخمين والتحقق إستراتيجية جيدة لاستخدامها في الاختبارات المعيارية؟
  الإجابة النموذجية: أنت تعرف أن الإجابة الصحيحة موجودة ضمن الخيارات المقدمة. بمجرد إجراء تخمين منطقي، يمكنك التحقق منه في مقابل المعلومات الموجودة في المسألة لتحديد ما إذا كانت صحيحة أو ما إذا كان ينبغي عليك الانتقال للتخمين المنطقي التالي. ومن ثم يمكنك الوثوق في إجابتك.
- متى ينبغي عليك استخدام إستراتيجية التخمين والتحقق؟ الإجابة النموذجية: يمكنك التخمين والتحقق في أي وقت من الاختبار المعياري. من الأمور المفيدة للغاية عندما يمكن لخيارات الإجابة أن تحل محل المعلومات الواردة في المسألة. على سبيل المثال، عندما تكون الخيارات قيم يمكن أن تحل محل متغير في تعبير أو معادلة.

9 التحضير للاختبارات المعيارية

التخمين والتحقق

من المهم جدا أن تتابع سرعتك وتتابع معها مقدار الوقت الذي يكون متاحا لك عند إجراء اختبار معياري. إذا كان الوقت ينفد، أو إذا كنت غير متأكد من كيفية حل إحدى المسائل، فإن إستراتيجية التخمين والتحقق قد تساعدك على تحديد الإجابة الصحيحة بسرعة.

إستراتيجيات للتخمين والتحقق

الخطوة 1

أمعن النظر في كل اختيار إجابة ممكنة، وقوّمه لمعرفة مدى صحته. أنع الإجابات الخاطئة.

اسأل نفسك:

- هل هناك أي خيارات إجابة غير صحيحة بشكل واضح؟
- هل أي من خيارات الإجابة ليست بالشكل الصحيح؟
- هل توجد أي خيارات إجابة لا تحتوي الوحدات المناسبة للإجابة الصحيحة؟

الخطوة 2

لخيارات الإجابة المتبقية، استخدام أسلوب التخمين والتحقق.

- **المعادلات:** إذا كنت تحل معادلة، فاستبدل خيار الإجابة بالمتغير وانظر ما إذا كان هذا يؤدي إلى جملة عددية صحيحة.
- **نظام المعادلات:** في نظام المعادلات، استبدل خيار الإجابة بجميع المتغيرات وتأكد أن جميع المعادلات تؤدي إلى جملة عددية صحيحة.

الخطوة 3

اختر خيار إجابة وانظر ما إذا كان يفي بقيود بيان المسألة. حدّد الإجابة الصحيحة.

- إذا كان خيار الإجابة الذي تختبره لا يحل المسألة، فانتقل إلى التخمين المعقول التالي، وتحقق منه.
- عندما تصل إلى خيار الإجابة الصحيح، توقف.

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته، ثم استخدم معطيات المسألة لحلها.

أوجد حل $\frac{2}{x-3} - \frac{4}{x+3} = \frac{8}{x^2-9}$.

A -1
B 1
C 5
D 7

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

www.almanahj.com

حل المعادلة الكسرية سيكون عددًا حقيقيًا. وبما أن جميع خيارات الإجابة الأربعة أعداد حقيقية، فهي جميعًا إجابات صحيحة ممكنة ويجب التحقق منها. ابدأ بخيار الإجابة الأول وتحقق منه في المعادلة الكسرية. تابع حتى تجد خيار الإجابة الذي ينتج عنه جملة عددية صحيحة.

التعيين: -1

التحقّق:

$$\frac{2}{(-1)-3}-\frac{4}{(-1)+3}=\frac{8}{(-1)^2-5}$$

$$-\frac{5}{2}\neq -1 \quad ✗$$

التعيين: 1

التحقّق:

$$\frac{2}{1-3}-\frac{4}{1+3}=\frac{8}{(1)^2-5}$$

$$-2\neq -1 \quad ✗$$

التعيين: 5

التحقّق:

$$\frac{2}{5-3}-\frac{4}{5+3}=\frac{8}{(5)^2-5}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \quad ✓$$

إذا كانت $x = 5$، فالنتيجة جملة عددية صحيحة. فإن الإجابة الصحيحة هي C.

تمارين

اقرأ كل مسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم معطيات المسألة لحلها.

1. أوجد حل، $\frac{2}{5x}-\frac{1}{2x}=-\frac{1}{2}$. B

A $\frac{1}{10}$

B $\frac{1}{5}$

C $\frac{1}{4}$

D $\frac{1}{2}$

2. مجموع أعمار خالد وأسماء ونورا يساوي 40. أسماء أكبر بعام واحد من مثلي نورا. خالد أكبر من أسماء بـ 3 أعوام. كم عمر أسماء؟ H

F 7
G 14
H 15
J 18

3. حدد النقطة (أو النقاط) التي تتقاطع عندها الدالة النسبية التالية مع المحور x. D

$$f(x)=\frac{2}{x-1}-\frac{x+4}{3}$$

A -5
B 4
C 3 أو 2
D -5 or 2

4. تبيع شركة المسرح التي يملكها عيسى التذاكر بقيمة AED 10. وبهذا السعر يبيعون 400 تذكرة. يقدر عيسى بأن الأسبوعات ستنخفض بمقدار 40 تذكرة مع كل زيادة في السعر تبلغ AED 2. ما السعر الذي سينتج عنه أكبر مقدار من الإيرادات؟ H

F 10
G 13
H 15
J 20

حقوق الطبع والتأليف © مجموعة تعليم ماكجرو هيل McGraw-Hill Education

مثال إضافي

تمرين على الاختبار المعياري افترض أن y تتغير بشكل مشترك مع x و z. أوجد y عندما تكون $x = 12$ و $z = 7$. إذا كانت $y = 40$ عندما تكون $z = 15$ و $x = 28$. A

A 8
B 20
C 80
D 200

3 التقييم

استخدم التمارين من 1 إلى 4 لتقويم استيعاب الطلاب.

www.almanahj.com

تشخيص أخطاء الطلاب

اطلع على إجابات الطلاب عن كل سؤال. قد تشير توجهات الصف إلى وجود أخطاء أو سوء فهم شائعين بين الطلاب.

1. A كتب بالخطأ ساعة واحدة و45 دقيقة في شكل 1.45
   B جمع المقامات بالخطأ
   C صحيح
   D خمن

2. F وجد الاختلاف الصحيح، لكنه جمعه عندما كان ينبغي عليه الضرب فيه
   G صحيح
   H قسم على الفارق الصحيح بدلاً من الضرب فيه
   J استخدم الضرب ولكن ليس الفارق الصحيح

3. A صحيح
   B فسر بشكل خاطئ العدد 2 باعتباره التقاطع x
   C لم يستخدم علامة + للإشارة لاتجاه التحول
   D فسر بشكل خاطئ العدد 2 باعتباره التقاطع x

4. F تجاهل كلمة *ليس* في السؤال
   G تجاهل كلمة *ليس* في السؤال
   H تجاهل كلمة *ليس* في السؤال
   J صحيح

5. A لم يحلل العامل $x^2 - 16$ بشكل صحيح
   B حوّل الكسر لأبسط صورة بشكل غير صحيح
   C صحيح
   D حوّل الكسر المحول لأبسط صورة بشكل خاطئ

6. F فسر التمثيل البياني بشكل خاطئ
   G صحيح
   H فسر التمثيل البياني بشكل خاطئ
   J فسر التمثيل البياني بشكل خاطئ

7. A صحيح
   B في هذه الدالة عندما تكون x سالبة، تكون y سالبة
   C في هذه الدالة عندما تكون x سالبة، تكون y غير معرفة
   D في هذه الدالة عندما تكون x سالبة، تكون y سالبة

9 تدريب على الاختبارات المعيارية

اختيار من متعدّد

اقرأ كُل سؤال، ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي قدمها المعلم أو ورقة أخرى.

1. يستطيع وافد صانع جز الخشب على آلة جز الخشب المعقدة تلركوب في 45 دقيقة. ويستغرق الأمر من صانع ساعة و45 دقيقة باستخدام آلة جز الخشب المدفوعة باليد. فأي المعادلات النسبية التالية يمكن حلها لاحتساب عدد الدقائق t اللازمة لجز الخشب إذا تعاون الاثنان معًا؟ C

   A $\frac{t}{45} + \frac{t}{145} = 1$
   C $\frac{t}{45} + \frac{t}{105} = 1$
   B $\frac{t}{150} = 1$
   D $\frac{t + 45}{t + 105} = 1$

2. تختلف التكلفة الإجمالية لحجز موقع تخييم بشكل مباشر حسب عدد ليالي استئجار الموقع. كما هو موضح بالجدول.

الأيام	التكلفة الإجمالية
1	AED 24
2	AED 48
	AED 72
4	AED 96

   أي معادلة تمثل الاختلاف المباشر؟ G

   F $y = x + 24$
   H $y = \frac{24}{x}$
   G $y = 24x$
   J $y = 96x$

3. في أي اتجاه يجب إزاحة التمثيل المباني لـ $y = \frac{1}{x}$ لينتج التمثيل المباني لـ $y = \frac{1}{x} + 2$ ؟ A

   A الأعلى
   B الأسفل
   C اليمين
   D اليسار

نصيحة عند حل الاختبار

السؤال 2 تحقق من الإجابة من خلال التعويض عن x بالأعداد 1 و 2 و 3 و 4 والتأكد من الحصول على القيم الموجودة بالجدول.

4. أي مما يلي **ليس** خطًا تقاربيًا لدالة النسبية $f(x) = \frac{1}{x^2 - 49}$ ؟ J

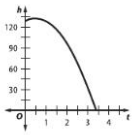
   F $f(x) = 0$
   H $x = 7$
   G $x = -7$
   J $f(x) = 1$

5. حوّل المكسر المجمع لأبسط صورة. C

$$\frac{\frac{(x+3)^2}{x^2-16}}{\frac{x+3}{x+4}}$$

   A $\frac{x+3}{x+4}$
   C $\frac{x+3}{x-4}$
   B $\frac{1}{x-4}$
   D $\frac{x-4}{x+3}$

6. تم قذف كرة لأعلى بسرعة ابتدائية 16 ft/s من أعلى بناية ارتفاعها 128 ft. ارتفاعها h بالقدم فوق سطح الأرض بعد t ثانية سيكون $h = 128 + 16t - 16t^2$.



   فما الاستنتاج الأمثل عن حركة الكرة؟

   F ظلت الكرة فوق ارتفاع 128 ft لأكثر من 3 s.
   G عادت الكرة إلى سطح الأرض في أقل من 4 s.
   H تحركت الكرة لأعلى مسافة أكبر من تحركها لأسفل.
   J تحركت الكرة أقل من 128 ft في 3.4 s.

7. أي هذه المعادلات يصف علاقة يناظر فيها كل عدد حقيقي سالب x عددًا حقيقيًا غير سالب y؟ A

   A $y = -x$
   C $y = \sqrt{x}$
   B $y = x$
   D $y = x^3$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

www.almanahj.com

ورقة إجابات التمارين

اطلب من الطلاب المحاكاة عن طريق إجراء اختبار معياري من خلال تسجيل إجاباتهم في أوراق تسجيل التمرين.

إجابات إضافية

14a. الإجابة النموذجية:
خطوط تقارب رأسية عند $x = 4$ و $x = -4$؛ خط تقارب أفقي عند $y = 0$

14b. $y = \frac{1}{x^2 - 16}$

الإجابة المختصرة/الإجابة الشبكية

اكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها المعلم أو ورقة أخرى.

8. تحيط سعاد الحديقة المبينة في الصورة بسياج حجري. كم عدد أمتار الحجارة اللازمة تقريبًا؟ **56.8 m**

9. **إجابة شبكية** ادخرت هدى بعض المال لعطلة مدتها أسبوع. أنفقت في اليوم الأول من العطلة AED 125 على الطعام والفندق. وفي اليوم الثاني، أعطتها أختها AED 80 كمدخرات. وحينما تبقى لدى فاطمة AED 635 لباقي العطلة. فكم درهمًا كان لديها في بداية العطلة؟ **680**

10. يريد سائق طباعة 800 منشور من صفحة واحدة لعمله في المناطر الطبيعية. ولديه طابعة يمكنها طباعة 8 صفحات في الدقيقة. ولدى شريكه في العمل طابعة أخرى يمكنها طباعة 10 صفحات في الدقيقة.

a. كم تستغرق طابعة سالم لطباعة جميع المنشورات؟ كم تستغرق طابعة شريكه؟ **100 min; 80 min**

b. ضع معادلة نسبية يمكن استخدامها لإيجاد عدد الدقائق t اللازمة لطباعة جميع المنشورات وعددها 800 في حالة استخدام الطابعتين في الوقت ذاته.

c. حل المعادلة التي كتبت في الجزء b. كم تستغرق طباعة جميع المنشورات في حالة استخدام الطابعتين في الوقت ذاته؟ قرب إلى أقرب دقيقة. **حوالي 44 min**

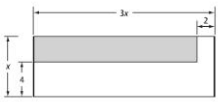
11. **إجابة شبكية** يمكن تمثيل عدد سكان دولة بالمعادلة $P(t) = 40e^{0.02t}$، حيث يمثل P عدد السكان بالمليون ويمثل t عدد الأعوام منذ 2005. متى سيكون عدد السكان 400 مليون؟ **2120**

10b. $\frac{t}{100} + \frac{t}{80} = 1$

الإجابة الموسعة

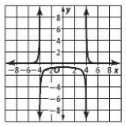
اكتب إجاباتك على ورقة. اكتب الحل هنا. 14a, b.
انظر الهامش.

12. ما مساحة المنطقة المظللة من المستطيل المعبر عنها كثيرة حدود في أبسط صورة؟ $3x^2 - 14x + 8$



13. **إجابة شبكية** افترض أن y تتناسب عكسيًا حيث x و $y = 4$ عندما $x = 12$. ما قيمة y عندما x تساوي 5؟ قرب إلى أقرب جزء من عشرة. **9.6**

14. استخدم التمثيل البياني للدالة النسبية الموضحة لحل كل معادلة.



a. صف خطي التقارب الرأسي والأفقي للتمثيل البياني.

b. اكتب معادلة الدالة النسبية. اشرح كيف توصلت لإجابتك.

15. فكّر في الدالة كثيرة الحدود $f(x) = 3x^4 + 19x^3 + 7x^2 - 11x - 2$.

a. ما درجة الدالة؟

b. ما المعامل الرئيسي للدالة؟

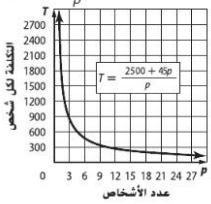
c. أوجد قيمة $f(2)$، $f(-2)$، و $f(2a)$. اكتب الحل هنا.

16; −56; $48a^4 + 152a^3 + 28a^2 - 22a - 2$

حقوق الطبع والتأليف © مملوكة لشركة مؤسسة McGraw-Hill Education

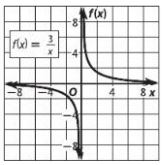
www.almanahj.com

4. $T = \frac{2500 + 45p}{p}$

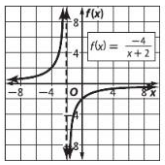


لن يصل المجال للصفر لأنه يجب أن يتواجد شخص ما في الحملة. لن يصل المدى للصفر لأنه حتى وإن وجد آلاف الأشخاص هناك، فإنهم سيتكبدون بعض التكاليف. لن تكون أي قيمة سالبة لأنه لا يمكن وجود تكلفة سالبة أو عدد سالب من الأشخاص.

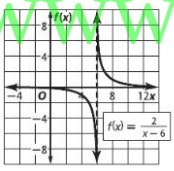
الدرس 9-3

11. 

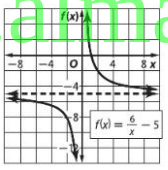
$D = \{x \mid x \neq 0\}$;
$R = \{f(x) \mid f(x) \neq 0\}$

12. 

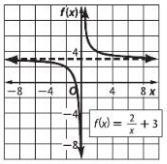
$D = \{x \mid x \neq -2\}$;
$R = \{f(x) \mid f(x) \neq 0\}$

13. 

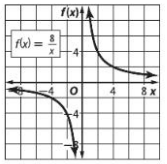
$D = \{x \mid x \neq 6\}$;
$R = \{f(x) \mid f(x) \neq 0\}$

14. 

$D = \{x \mid x \neq 0\}$;
$R = \{f(x) \mid f(x) \neq -5\}$

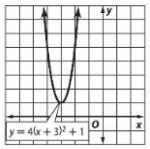
15. 

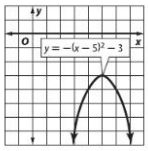
$D = \{x \mid x \neq 0\}$;
$R = \{f(x) \mid f(x) \neq 3\}$

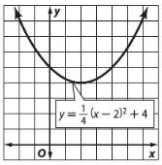
16. 

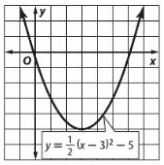
$D = \{x \mid x \neq 0\}$;
$R = \{f(x) \mid f(x) \neq 0\}$

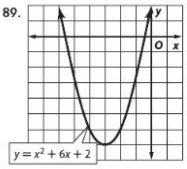
الدرس 9-2

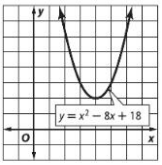
85. 

86. 

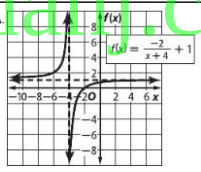
87. 

88. 

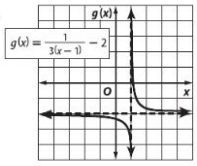
89. 

90. 

الدرس 9-3 (تمرين موجه)

3A. 

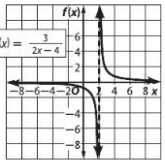
$D = \{x \mid x \neq -4\}$; $R = \{f(x) \mid f(x) \neq 1\}$

3B. 

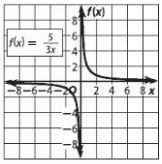
$D = \{x \mid x \neq 1\}$; $R = \{g(x) \mid g(x) \neq -2\}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح McGraw-Hill Education

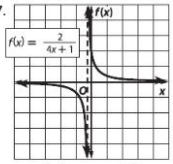
www.almanahj.com

25. 

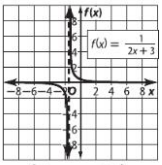
D = {x | x ≠ 2};
R = {f(x) | f(x) ≠ 0}

26. 

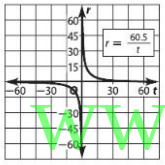
D = {x | x ≠ 0};
R = {f(x) | f(x) ≠ 0}

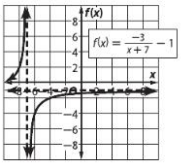
27. 

D = $\left\{x \mid x \neq -\frac{1}{4}\right\}$;
R = {f(x) | f(x) ≠ 0}

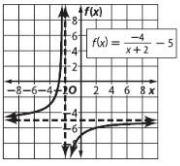
28. 

D = $\left\{x \mid x \neq -\frac{3}{2}\right\}$;
R = {f(x) | f(x) ≠ 0}

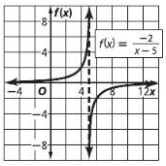
29b. 

30. 

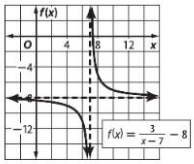
D = {x | x ≠ −7}; R = {f(x) | f(x) ≠ −1}; x = −7, f(x) = −1

31. 

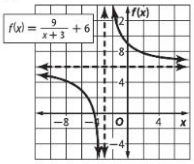
D = {x | x ≠ −2}; R = {f(x) | f(x) ≠ −5}; x = −2, f(x) = −5

17. 

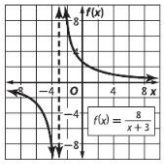
D = {x | x ≠ 5};
R = {f(x) | f(x) ≠ 0}

18. 

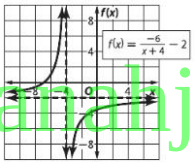
D = {x | x ≠ 7};
R = {f(x) | f(x) ≠ −8}

19. 

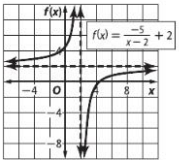
D = {x | x ≠ −3};
R = {f(x) | f(x) ≠ 6}

20. 

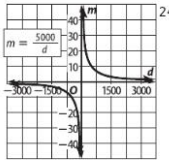
D = {x | x ≠ −3};
R = {f(x) | f(x) ≠ 0}

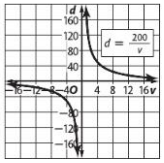
21. 

D = {x | x ≠ −4}; R = {f(x) | f(x) ≠ −2}

22. 

D = {x | x ≠ 2}; R = {f(x) | f(x) ≠ 2}

23b. 

24b. 

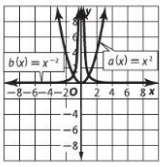
www.almanahj.com

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح © حقوق الطبع والتأليف

37a.

x	$a(x) = x^2$	$b(x) = x^{-2}$	$c(x) = x^3$	$d(x) = x^{-3}$
-4	16	$\frac{1}{16}$	-64	$-\frac{1}{64}$
-3	9	$\frac{1}{9}$	-27	$-\frac{1}{27}$
-2	4	$\frac{1}{4}$	-8	$-\frac{1}{8}$
-1	1	1	-1	-1
0	0	غير معرفة	0	غير معرفة
1	1	1	1	1
2	4	$\frac{1}{4}$	8	$\frac{1}{8}$
3	9	$\frac{1}{9}$	27	$\frac{1}{27}$
4	16	$\frac{1}{16}$	64	$\frac{1}{64}$

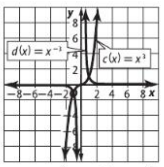
37b.



37c. D: {كافة الأعداد الحقيقية} = $a(x)$، R = {$a(x) \mid a(x) \geq 0$}؛ في $x \to -\infty$، $a(x) \to \infty$، وفي $x \to \infty$، $a(x) \to \infty$ عند $x = 0$، $a(x) = 0$؛ إذًا يوجد صفر عند $x = 0$.

D: $b(x)$ بما أن $x \neq 0$، R {$b(x) \mid b(x) > 0$}. بما أن $x \to -\infty$، $a(x) \to 0$، وعند $x \to \infty$، $a(x) \to 0$. عند $x = 0$، $b(x)$ غير معرّفة. إذًا يوجد خط تقارب عند $x = 0$.

37d.



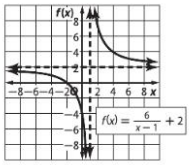
37e. D: {كافة الأعداد الحقيقية} = $c(x)$، R = {كافة الأعداد الحقيقية}؛ في $x \to -\infty$، $a(x) \to -\infty$، وفي $x \to \infty$، $a(x) \to \infty$؛ عند $x = 0$، $a(x) = 0$. وبالتالي يوجد صفر عند $x = 0$.

D: $d(x)$ بما أن $x \neq 0$، R = {$b(x) \mid b(x) \neq 0$}. بما أن $x \to -\infty$، $a(x) \to 0$، وعند $x \to \infty$، $a(x) \to 0$. عند $x = 0$، $b(x)$ غير معرّفة، إذًا يوجد خط تقارب عند $x = 0$.

37f. بالنسبة للدالتين الأسيتين $f(x) = ax^n$ و $g(x) = ax^{-n}$، لكل x، $f(x)$ و $g(x)$ هي معكوسات ضربية. تتشابه المجالات فيما عدا في $x \neq 0$، $g(x)$. علاوة على ذلك، عندما تحتوي $f(x)$ على صفر، تكون $g(x)$ غير معرفة.

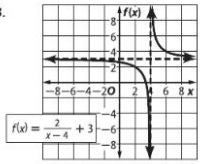
39a. يشتمل التمثيل البياني الأول على خط تقارب رأسي عند $x = 0$ وعلى خط تقارب أفقي عند $y = 0$. يزاح التمثيل البياني الثاني 7 وحدات لأعلى ويشتمل على خط تقارب رأسي عند $x = 0$ وعلى خط تقارب رأسي عند $y = 7$.

32.



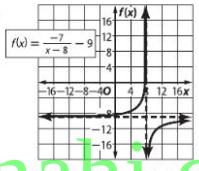
D = {$x \mid x \neq 1$}; R = {$f(x) \mid f(x) \neq 2$}; $x = 1$, $f(x) = 2$

33.



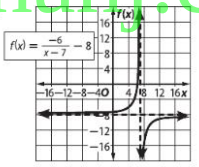
D = {$x \mid x \neq 4$}; R = {$f(x) \mid f(x) \neq 3$}; $x = 4$, $f(x) = 3$

34.



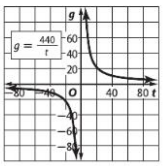
D = {$x \mid x \neq 8$}; R = {$f(x) \mid f(x) \neq -9$}; $x = 8$, $f(x) = -9$

35.



D = {$x \mid x \neq 7$}; R = {$f(x) \mid f(x) \neq -8$}; $x = 7$, $f(x) = -8$

36b.



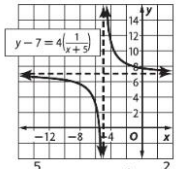
McGraw-Hill Education محفوظة لصالح © حقوق الطبع والتأليف

www.almanahj.com

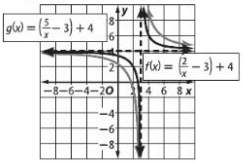
39b. يشتمل كلا التمثيلين البيانيين على خط تقارب رأسي عند $x = 0$ وعلى خط تقارب أفقي عند $y = 0$. التمثيل البياني الثاني متسع حسب العامل 4.

39c. يشتمل التمثيل البياني الأول على خط تقارب رأسي عند $x = 0$ وعلى خط تقارب أفقي عند $y = 0$. يُزاح التمثيل البياني الثاني 5 وحدات لأعلى ويشتمل على خط تقارب رأسي عند $x = -5$ وعلى خط تقارب رأسي عند $y = 0$.

39d.

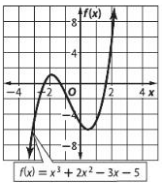


41. الإجابة النموذجية $f(x) = \frac{2}{x-3} + 4$ و $g(x) = \frac{5}{x-3} + 4$



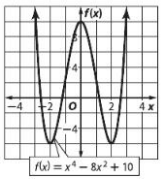
42. يمكن استخدام الدالة النسبية لتحديد ما يحتاج كل شخص إلى بيعه إذا كانت تكلفة الرحلة وعدد الأشخاص الذاهبين إلى الرحلة وبيع الحلوى يساوي 0. يجب أن يكون كل من عدد الأشخاص الذين يقومون بالبيع وعدد الحوالب لكل شخص أعداداً غير سالبة. كما يجب أن يكون كلاهما أعداداً صحيحة. وبالتالي، فإن الجزء الربيعي الأول من التمثيل البياني يعتبر ذو معنى في سياق المسألة.

60.



القيمة العظمى النسبية عند $x = -2$، القيمة الصغرى النسبية عند $x = 0.5$، D = {كافة الأعداد الحقيقية}، R = {كافة الأعداد الحقيقية}

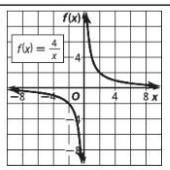
61.



القيمة العظمى النسبية عند $x = 0$، القيمة الصغرى النسبية عند $x = 2$، D = {كافة الأعداد الحقيقية}، R = {كافة الأعداد الحقيقية} $f(x) \geq -6$

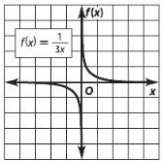
اختبار منتصف الوحدة

19.



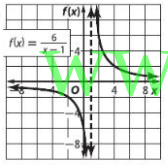
D = {$x \mid x \neq 0$}, R = {$f(x) \mid f(x) \neq 0$}

20.



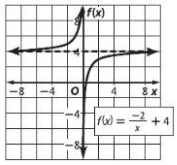
D = {$x \mid x \neq 0$}, R = {$f(x) \mid f(x) \neq 0$}

21.



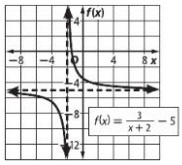
D = {$x \mid x \neq 1$}, R = {$f(x) \mid f(x) \neq 0$}

22.



D = {$x \mid x \neq 0$}, R = {$f(x) \mid f(x) \neq 4$}

23.

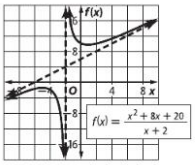


D = {$x \mid x \neq -2$}, R = {$f(x) \mid f(x) \neq -5$}

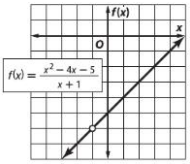
www.almanahj.com

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح McGraw-Hill Education

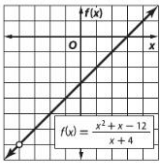
5.



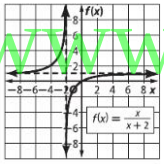
6.



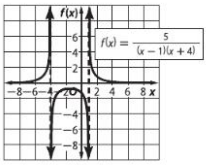
7.



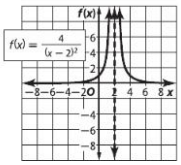
13.



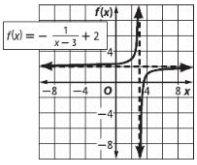
14.



15.



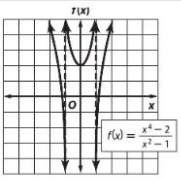
24.



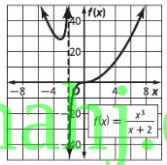
$D = \{x \mid x \neq 3\}$, $R = \{f(x) \mid f(x) \neq 2\}$

الدرس 9-4

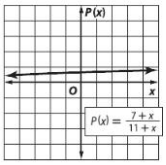
1.



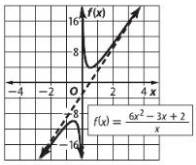
2.



3a.



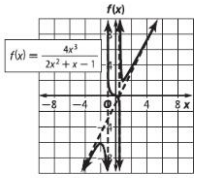
4.



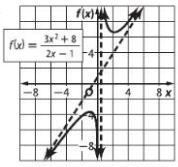
www.almanahj.com

McGraw-Hill Education محفوظة للناشر © حقوق الطبع والتأليف

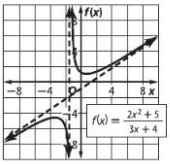
22.



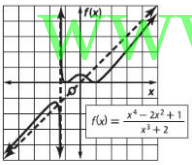
23.



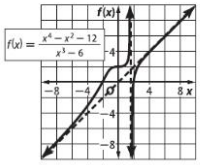
24.



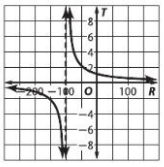
25.



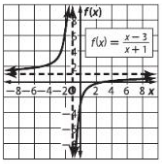
26.



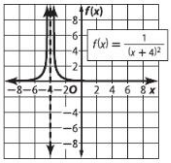
27a.



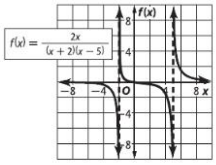
16.



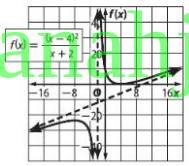
17.



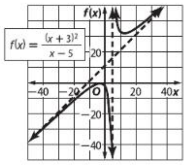
18.



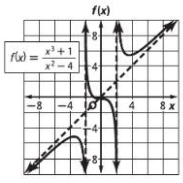
19.



20.



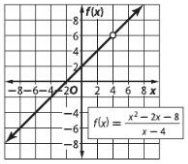
21.



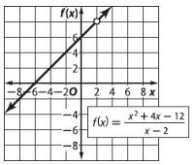
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح

www.almanahj.com

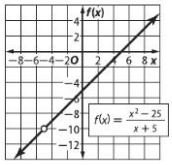
28.



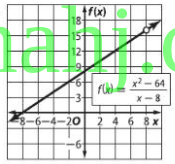
29.



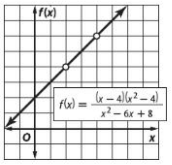
30.



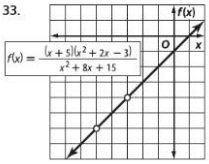
31.



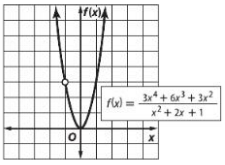
32.



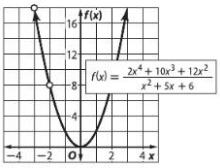
33.



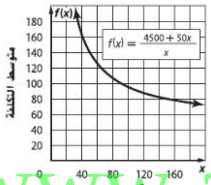
34.



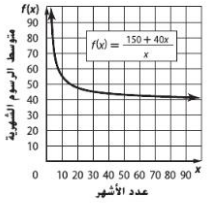
35.



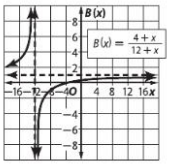
36a. $f(x) = \frac{4500 + 50x}{x}$



37a. $f(x) = \frac{150 + 40x}{x}$

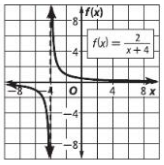


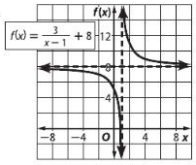
38a.

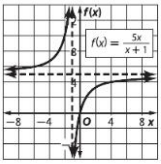


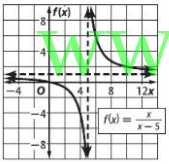
www.almanahj.com

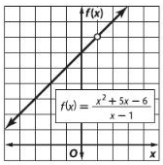
McGraw-Hill Education محفوظة لصالح © حقوق الطبع والتأليف

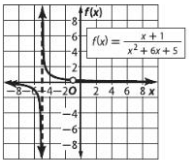
12. 

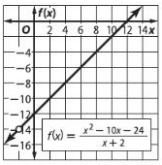
13. 

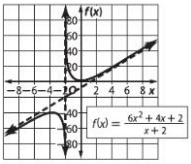
14. 

15. 

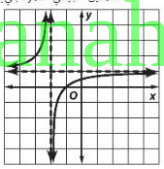
16. 

39. 

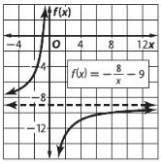
40. 

41. 

42. التمثيل البياني النموذجي:



تدريب على الاختبار

11. 

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح McGraw-Hill Education

www.almanahj.com