مجلس ابوظبي للتعليم	الصف الثاني عشر متقدم	الفصل الثاني
لوحدة الخامسة	مجموع ريمان (5-2)	حساب التكامل

لإيجاد مجموع الدوال تذكر ان

$$1)\sum_{i=1}^{n} c = cn \quad (c\text{ثابت})$$

$$2)\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1\ )}{6}$$

$$3)\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$4)\sum_{i=1}^{n}(ca_i + db_i) = c\sum_{i=1}^{n} a_i + d\sum_{i=1}^{n} b_i$$

احسب مجموع الدوال الآتية:

1) $\sum_{i=1}^{7} 3i$

2) $\sum_{i=1}^{5} i^2$

3) $\sum_{i=0}^{4} 3i$

4) $\sum_{i=2}^{10} 2i^2$

عبدالرحيم شوقي 0504911771 www.almanahj.com

5) $\sum_{n=1}^{4}(n+2)$

6) $\sum_{n=0}^{7}(n^2-3)$

7) $\sum_{k=3}^{n}(k-1)$

8) $\sum_{i=1}^{4} i^3$

www.almanahj.com

عبدالرحيم شوقي 0504911771

مجموع ريمان (فترات منتظمة)

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$ عدد الفترات n و $[a\ ،\ b]$ بداية الفترة في الفترة المغلقة a نهاية الفترة b حيث

$x_1 = x_0 + \Delta x$ طول الفترة Δx العنصر الثاني x_1 العنصر الاول x_0 حيث

باستخدام $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ اوجد مجموع الدوال الاتية

1) $f(x) = 2x^2 + 1$ $x = 0.3\ ,0.5\ ,0.7\ ,0.9$ $n = 4\ ,\Delta x = 0.2$

2) $f(x) = x^2 - 4$ $x = 1.2, 1{,}6, 2, 2.4, 2.8, 3.2$ $n = 6$ $\mathbf{\Delta x = 0.4}$

3) $f(x) = 2x + 4$ $x = 1.3, 2, 2.7, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 7.6$ $n = 10$ $\mathbf{\Delta x = 0.7}$

4) $f(x) = x^3 - 1$ $x = 2, 2.3, 2.6, 2.9$ $n = 4$ $\mathbf{\Delta x = 0.3}$

عبدالرحيم شرقي 0504911771
www.almanahj.com

مجلس ابوظبي للتعليم	الصف الثاني عشر متقدم	الفصل الثاني
الوحدة الخامسة	المساحة باستخدام مجموع ريمان(5-3)	حساب التكامل

لإيجاد المساحة باستخدام مجموع ريمان

$$A_n = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$ حيث Δx طول الفترة

x_0 هو الحد الاول $\quad x_i = x_0 + \Delta x$

ويستخدم في تقريب المساحة بمعلومية عدد المستطيلات

اوجد المساحة اسفل المنحني $f(x) = x^2 + 2x$ **في الفترة** $[1،4]$ **مستخدما 10**

اوجد المساحة اسفل المنحني في الفترة [0،5] مستخدما 5مستطيلات $f(x) = x^2 - 3$

عبدالرحيم شوقي 0504911771
www.almanahj.com

اذا كانت الدالة f معرفة علي الفترة $[a\,,b]$ ومستمرة علي هذه الفترة وكانت $f(x) \geq 0$

فان المساحة أسفل المنحني تساوى $A_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$

اوجد المساحة أسفل المنحنيات الآتية باستخدام مجموع ريمان و النهايات :

1) $f(x) = x^2 - 1 \quad on \quad [0\,,4]$

2) $f(x) = x - 2x^2 \quad on\ [1\,,5]$

3) $f(x) = 2x^2 - 4 \quad on [-1\,,3]$

عبدالرحيم شوقي 0504911771
www.almanahj.com

لإيجاد المساحة باستخدام النهاية اليمنى	$A = \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(C_i)$ وكانت $C_i = x_i$
لإيجاد المساحة في منتصف الفترة	$A = \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(C_i)$ وكانت $C_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$
لإيجاد المساحة في نهاية الفترة	$A = \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(C_i)$ وكانت $C_i = x_{i-1}$

اوجد المساحات الآتية باستخدام بداية الفترة ومنتصف الفترة ونهاية الفترة لكل مجموعة المنحنيات مستخدما

n عدد المستطيلات

1 $f(x) = x^2 \quad on\ [0\ ,5] \quad n = 12$)

2)$f(x) = \frac{2}{x+2} \quad on[-2\ ,1] \quad n = 10$

عبدالرحيم شوقي 0504911771
www.almanahj.com

3) $f(x) = \sqrt{x+1}$ $0n\ [1\ ,4]$ $n = 5$

4) $f\ (x) = \ 3x^2\ + x$ $on[0,2]$ $n = 4$

www.almanahj.com
0504911771 عبدالرحيم شرقي

f معرفة علي الفترة $[a,b]$ فان تكامل الدالة ويسمي التكامل المحدد

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} f(c_i)\ \Delta x$$

اوجد التكاملات الآتية باستخدام نهاية ريمان:

1) $\int_0^1 3x\,dx$

2) $\int_1^4 (2x-3)\,dx$

3) $\int_0^5 (x^2+3)\,dx$

عبدالرحيم شوقي 0504911771
www.almanahj.com

ملاحظة هامة

التكامل المحدد هو إيجاد مساحة المنحني

خواص التكامل المحدد

$$1)\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$2)\int_a^b -f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$3)\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

$$4)\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$6)\int_a^b cdx = c(b-a)$$

$$5)\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)$$

www.almanahj.com
عبدالرحيم شوقي 0504911771

وجد المساحات الآتية باستخدام التكامل:

1) $\int_1^3 4dx$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinx\,dx$

3) $\int_4^1 2x\,dx$

4) $\int_0^5 \frac{x}{x^2+4}\,dx$

5) $\int_1^3 \sqrt{x-4}\,dx$

6) $\int_1^1 x dx$

7) $\int_{-2}^{-4} \frac{\pi}{2} dx$

8) $\int_{-1}^{2} |x-1|\,dx$

www.almanahj.com
عبدالرحيم شوقي 0504911771

9) $\int_{-1}^{1}(2-|x|)dx$

10) $\int_{-2}^{3}\frac{x}{|x|}dx$

11) $\int_{-4}^{2}f(x)dx$ اوجد

$$f(x)=\begin{cases}x+4 & -4\le x\le -1\\ -x+2 & -1<x\le 2\end{cases}$$

عبدالرحيم شوقي 0504911771
www.almanahj.com

12) $\int_0^4 f(x)dx = 7$, $\int_0^3 f(t)dt$ اذا كان

وكانت f متصلة فاوجد التكاملات الاتية

1) $\int_3^4 f(x)dx$

2) $\int_4^3 f(t)dt$

www.almanahj.com

عبدالرحيم شوقي 0504911771

12) $\int_1^4 f(x)dx = -4$, $\int_1^4 g(x)dx = 3$ اذا كان

فاوجد التكاملات الآتية:

1) $\int_1^4 (f(x) + g(x))dx$

2) $\int_1^4 (3f(x) - 2g(x))\,dx$

$$3)\int_{4}^{1}((-f(x)+g(x))dx$$

اوجد المساحة للمنطقة بين المنحني ومحور السينات:

$$1)f(x)=x^3-x$$

$$2)f(x)=\sqrt{x^2-4}$$

$$3)f(x)=x^2+x-2$$

عبدالرحيم شرقي 0504911771 www.almanahj.com

القيمة المتوسطة1

$$f_{ave} = \frac{1}{b-1}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

اوجد القيمة المتوسطة لكلا من :

1) $f(x) = cosx \quad on \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

2) $f(x) = x^2 + 3 \quad on \ [1, 5]$

3) $f(x) = |x + 3| \quad on \ [-1, 4]$

عبدالرحيم شوقي 0504911771 www.almanahj.com

القيمة المتوسطة 2

fمتصلةعلي$[a\,.\,b]$وكان هناك$c \in [a\,.\,b]$فان

$$f_c = \frac{1}{b-1}\int_a^b f(x)dx$$

اوجد القيمة المتوسطة لكل من الدوال الاتية وعند أي من النقاط تاخذ الدالة هذه القيمة المتوسطة:

$1) f(x) = x^2 - 1 \qquad on[0\,,\sqrt{2}]$

$2)\ f(x) = 2x + 1 \qquad on[0\,,4]$

$3) f(x) = 2x - 2x^2 \qquad on[0\,,1]$

عبدالرحيم شوقي 0504911771
www.almanahj.com

اذا كان ل f قيمة عظمي وصغري في الفترة $[a\ ,b]$

اكتب المعادلة هنا

1) $\boldsymbol{minf.(b-1) \leq \int_a^b f(x)dx \leq maxf.(b-1)}$

2) $\boldsymbol{f(x) \leq g(x)}$

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx}$$

بين ان قيمة $\boldsymbol{\int_0^1 \sqrt{1+cosx}}$ اصغر من $\frac{3}{2}$

قدر قيم التكاملات الاتية:

1) $\boldsymbol{\int_1^2 \sqrt{x^2+1}\ dx}$

2) $\boldsymbol{\int_0^2 \frac{1}{x^{2-1}}\ dx}$

عبدالرحيم شوقي 0504911771
www.almanahj.com

اختر الإجابة الصحيحة:

1) قيمة $\int_1^3 4dx =$

$a)4$ $b)2$ $c)8$ $d)16$

2) $\int_2^2 x^2\,dx =$ قيمة

$a)0$ $b)4$ $c)16$ $d)8$

3) اذا كان $\int_2^3 f(x)dx = 5$ فان قيمة $\int_3^2 -f(x) =$

$a)5$ $b)-5$ $c)10$ $d)0$

4) اذا كان $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\frac{\Delta x}{2} = -2$ فان قيمة $\int_1^4 f(x)dx$

$a)-2$ $b)-4$ $c)2$ $d)3$

5) $\int_{-1}^{3} f(x)dx = 4$ و $\int_{-1}^{3} g(x)dx = 8$ فان قيمة $\int_{-1}^{3} \frac{g(x)dx}{f(x)dx}$

$a)2$ $b)\frac{1}{2}$ $c)32$ $d)$ليس مما سبق

6)اذاكان $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ فان المساحة

$a)\frac{\pi}{2}$ $b)\frac{\pi}{3}$ $c)\frac{\pi}{6}$ $d)\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}$

7)اذا كان $f(x) = 2x+1$فان مجموع ريمان في الفترة $[1,8]$ هي

$a)80$ $b)72$ $c)8$ $d)90$

عبدالرحيم شوقي 0504911771
www.almanahj.com

9) القيمةالتقريبية ل $\int_1^2 \sqrt{x^2-1}$

$a)0$ $b)1$ $c)1.5$ $d)2$

10) قيمة $\sum_{i=1}^{5} \sqrt{i}$

$a)1$ $b)\sqrt{5}$ $c)8$ $d)8.3$

11)اذاكان $\frac{1}{2}\int_1^3 f(x)dx = 8$ فان $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)dx =$

$a)8$ $b)16$ $c)\ 2$ $d)4$

12) ا القيمة المتوسطة للدالة $\int_1^2 xdx$

$a)1$ $b)1.2$ $c)1.5$ $d)2$

13) اذا كان $\int_0^1 x^3dx = \frac{1}{4}$ فان قيمة $\int_1^0 (1-x^3)dx$

$a)\frac{1}{4}$ $b)\frac{-1}{4}$ $c)\frac{-3}{4}$ $d)\frac{3}{4}$

14) قيمة $\int_0^{\pi} \sqrt{sec^4 x}\, dx$

$a)0$ $b)1$ $d)-1$ $c)$غير معرف

15) قيمة $\int_{-1}^{1} |x|^3 dx$

$a)0$ $b)2$ $c)-1$ $d)-2$

عبدالرحيم شوقي 0504911771 www.almanahj.com

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل1

fمتصلةعلي$[a,b]$ فان $\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a)$

احسب التكاملات الآتية باستخدام النظرية الأساسية :

1) $\int_2^4 (x+1)dx$

2) $\int_0^4 \sqrt{x+3}\, dx$

3) $\int_1^3 (x\sqrt{x} + \frac{3}{x})dx$

4) $\int_{-1}^3 (\sqrt[3]{x} - x)dx$

عبدالرحيم شوقي 0504911771
www.almanahj.com

5) $\int_{1}^{4} \frac{x-2}{\sqrt{x}}\, dx$

6) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3}{cos^2 u}\, du$

7) $\int_{0}^{\pi} sin^2 x dx$

8) $\int_{0}^{t} (x+1)^2 dx$

9) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{sinx}{cos^2 x}\, dx$

عبدالرحيم شرفي 0504911771
www.almanahj.com

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل 2

f متصلة على $[a\,.\,b]$ وكان $f(x) = \int_a^x f(t)dt$ فان

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt \rightarrow F(x)' = f(x)$$

ملاحظات هامة

$$1)\ \frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t).dt = f(g(x).g)x)'$$

$$2)\ \frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t).dt = f\big(g(x)\big).g(x)' - f\big(\big(h(x)\big).h(x)'$$

تستخدم في حالة وجود متغير او متغيرين في حدود التكامل

عبدالرحيم سوني 0504911771 www.almanahj.com

1) اوجد $f'(x)$

$$1)f(x) = \int_0^x (3t-1)dt$$

$$2)f(x) = \int_x^1 (4t^2 - t)dt$$

$$3) f(x) = \int_{2cosx}^{2x} sect.dt$$

$$4) f(x) = \int_{x^2}^{x^3} sin2t.dt$$

$$5) f(x) = \int_{-1}^{sinx} \sqrt{t^2+1}\, dt$$

$$6) f(x) = \int_{3-x}^{sinx} (t^2+1)dt$$

اوجد معادلة المماس لكلا من:

$$1)\ y = \int_{0}^{x} (t-3)dt \qquad x = 1$$

عبدالرحيم شرفي 0504911771
www.almanahj.com

$$2)y = \int_0^x sin\sqrt{t}\ dt \qquad x = 0$$

$$3)y = \int_2^x cost^3 \qquad x = -1$$

باستخدام التكامل اوجد المساحة

$$1)y = x^2 - 9$$

$$2)y = x^3 - 2x^2$$

عبدالرحيم شرفي 0504911771 www.almanahj.com

مجلس ابوظبي للتعليم	الصف 12متقدم	ف2
الوحدة الخامسة	التكامل بالتعويض(4-6)	حساب التكامل

باستخدام التعويض اوجد التكاملات الآتية:

1) $\int x^3(x^4+1)^{\frac{-2}{3}}dx$

2) $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$

3) $\int sinxcosxdx$

عبدالرحيم شرفي 0504911771
www.almanahj.com

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x+8}}$

5) $\int \frac{dx}{x \ln x}$

6) $\int xcos(2x^2)dx$

7) $\int s^{\frac{1}{3}} cos(s^{\frac{4}{3}} - 8)ds$

8) $\int sin^3 x \, cosx dx$

عبدالرحيم شرقي 0504911771 www.almanahj.com

9) $u = x^{\frac{1}{6}}$ اذا كان , فاثبت $\int \frac{1}{x^{\frac{5}{6}} + x^{\frac{2}{3}}} dx = 6 \int \frac{u}{u+1} du$

ملاحظة عند التعويض في التكامل المحدد نستخدم القاعدة

كامل بالنسبة ل u من $u = g(a)$ الي $u = g(b)$, $du = g'(x)dx$, $u = g(x)$ نعوض

$$\int_a^b f(g(x)).g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

www.almanahj.com
0504911771 عبدالرحيم سرحي

10) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\, dx$

12) $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} dx$

13) $\int_0^2 x\sqrt{x^2+1}\,dx$

14) $\int_0^2 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

15) اذا كان $I=\int_0^{10} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{10-x}}\,dx$

$I=\int_0^{10} \frac{\sqrt{10-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{10-x}}\,dx$

فاستخدم هذا التكامل واوجد قيمة I

www.almanahj.com
0504911771 عبدالرحيم شرقي

اختر الإجابة الصحيحة:

(1 $\int sinxcosxdx =$

$a)\frac{1}{2}sinx$ $b)\frac{1}{2}cos^2x$ $c)\frac{1}{2}sin^2x$ $d)\frac{1}{2}sinxcosx$

(2 $\int_0^4 \frac{f(\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx =$ بفرض ان $u=\sqrt{x}$

$a)\int_0^4 \frac{f(u)}{u}du$ $b)\int_0^4 \frac{f(u)}{u}$ $c)\int_0^4 f(u)$ $d)\int_0^4 f(u)du$

(3 $\int_2^6 \sqrt{\int_0^1 \sqrt{x}\,dx}\,dx =$

$a)4$ $b)-4$ $c)1$ $d)0$

www.almanahj.com

(4 $F(X)=\int_0^{\ln x} sintdt =$

$a)F(X)' = sin\ln x$ $b)F(X)' = \frac{-cos\ln x}{x}$ $c)F(X)' = \frac{sin\ln x}{x}$ $d)F(X)' = -cos\ln x$

5)اذا كان $F'(x) = xsinx + cosx + 2$ فان $F(x) =$

$a)\int cosxdx$ $b)\int sinxdx$ $c)\int xcosxdx$ $d)\int xsinxdx$

6) اذا كان $y = \int_x^5 3tsint\,dt$, فان قيمة $\frac{dy}{dx} =$

$a)3xsinx$ $b)-3xcosx$ $c)-3xsinx$ $d)3xcosx$

(7 $\int_0^5 \frac{1}{x-4}dx =$

$a)-1$ $b)5$ $c)0$ $d)-1$

عبدالله خيم شرفي 0504911771

8) اذا كان $F(x)=\int_0^{\frac{2}{x}} f(t)dt=$ فان قيمة $F'(x)=$

$a)f\left(\frac{2}{x}\right).x \quad b)-2f\left(\frac{2}{x}\right).x \quad c)\frac{2}{x} \quad d)2f\left(\frac{2}{x}\right)$

9) $\int (cosx^4)^{200}4x^3dx=$

$a)\frac{(sinx^5)^{200}}{5}+c \quad b)\frac{(sinx^5)^{200}}{5(200)}+c \quad c)\frac{(sinx^4)^{201}}{4(201)}+c \quad d)\frac{(sinx^4)^{201}}{201}+c$

10) $\int_1^2 x^2\sqrt{x^2}dx=$

$a)\frac{63}{4} \quad b)-\frac{63}{4} \quad c)\frac{1}{4} \quad d)\sqrt{\frac{63}{4}}$

11) $\int \frac{1}{cos^2 2x}dx=$

$a)\frac{1}{sin2x}+c \quad b)\frac{1}{2cosx}+c \quad 3)tan2x+c \quad d)\frac{tan2x}{2}+c$

قيم التكامل الأتي:

1) $\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}dx$

2) $\int_1^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}}dx$

www.almanahj.com
0504911771 عبدالرحيم شوقي

مجلس ابوظبي للتعليم	الصف 12 متقدم	ف2
الوحدة الخامسة	التكامل العددي(5-7)	حساب التكامل

احسب التكاملات الآتية باستخدام منتصف الفترة:

1) $\int_0^2 (x^2+1)dx \quad n=6$

2) $\int_1^3 \sqrt{x+3}\,dx \qquad n=5$

3) $\int_1^4 (2x-1)dx$

4) $\int_1^3 \frac{1}{x}dx$

عبدالرحيم شرفي 0504911771
www.almanahj.com

باستحدام قاعدة شبه المنحرف اوجد التكاملات الآتية:

1) $\int_{2}^{5} \frac{1}{x+2} dx \qquad n = 4$

2) $\int_{0}^{1} sinx \qquad n=2$

3) $\int_{3}^{5} x^3 dx \qquad n = 3$

4) $\int_{1}^{3} \sqrt{x^2 - 1}\, dx \qquad n = 4$

عبدالرحيم شرفي 0504911771
www.almanahj.com

باستخدام قاعدة سمبسون اوجد التكاملات الاتية :

1) $\int_0^4 \frac{1}{2}x^3 dx \quad n = 3$

2) $\int_1^2 \frac{x+3}{\sqrt{x}} dx \quad n = 2$

3) $\int_2^4 (x+1)dx \quad n = 4$

4) $\int_{-1}^1 (x - x^2)dx \quad n = 4$

عبدالرحيم شرفي 0504911771
www.almanahj.com

اوجد حدود الخطاء باستخدام منتصف الفترة وقاعدة شبه المنحرف وسمبسون

1) $\int_0^1 \frac{1}{x} dx \quad n = 6$

2) $\int_0^2 2x^4 dx$

3) $\int_1^3 4x^2 dx$

عبدالرحيم شرفي 0504911771 www.almanahj.com

$$3)\int_{0}^{4} x^3\,dx$$

عبدالرحيم شرقي 0504911771
www.almanahj.com

مجلس ابوظبي للتعليم	الصف 12 متقدم	ف2
الوحدة الخامسة	تكامل اللوغارتيم الطبيعي	حساب التكامل

تذكر ان:

$$\int \frac{u'}{u} du = \ln|u|$$

عبدالرحيم شرفي 0504911771
www.almanahj.com

اوجد التكاملات الآتية:

1) $\int \frac{dx}{x+1}$

2) $\int cotxdx$

3) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx$

4) $\int_{1}^{3} \frac{e^x - 3}{e^{-3x}} dx$

5) $\int_{0}^{1} tanx dx$

6) $\frac{dx}{x \ln x}$

7) $\int \frac{3x^3}{x^4 + 5} dx$

عبدالرحيم شرقي 0504911771
www.almanahj.com

عبدالرحيم شرقي 0504911771
www.almanahj.com

عبدالرحيم شرقي 0504911771
www.almanahj.com